Једначина са тоталним диференцијалом

Ако је у једначини $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ лијева страна диференцијал функције $U(x,y)$ тј. ако је $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ тада је решење $U(x,y)=C$. Услов који треба да буде задовољен да би једначина била са тоталним диференцијалом је $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Ако је услов задовољен треба одредити непознату функцију $U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y) \qquad \Rightarrow \quad U=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y)$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y);\ \varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx;$$

$$\varphi(y)=\int(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx)dy$$

$$U=\int P(x,y)dx+\int(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx)dy$$

опште решење је: $U(x,y)=C$.

<u>примјер:</u> Ријешити диф. ј-ну: $y'=\frac{(a-x^2-y^2)x}{(a+x^2+y^2)y}$.

<u>решење:</u> Једначина се може записати у облику:
$(x^2+y^2-a)xdx+(a+x^2+y^2)ydy=0$,тј. $Pdx+Qdy=0$ Како је задовољен услов $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$ имамо једначину са тоталним диференцијалом чиме се задатак своди на налажење функције $U=U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=x^3+xy^2-ax$ имамо $U=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{ax^2}{2}+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=y^3+x^2y+ay$ то је $\varphi'(y)=y^3+ay$; $\varphi(y)=\frac{y^4}{4}+\frac{ay^2}{2}$;
$U=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{ax^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{ay^2}{2}$. Опште решење је $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{ax^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{ay^2}{2}=\frac{C}{4}$ тј $(x^2+y^2)^2-2a(x^2-y^2)=C$.

<u>примјер:</u> $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$

<u>решење:</u> $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x^3+xy^2)}{\partial y}=2xy$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(x^2y+y^3)}{\partial x}=2xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=(x^3+xy^2)\Rightarrow U=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=(x^2y+y^3)\wedge\frac{\partial U}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)\Rightarrow\varphi'(y)=y^3\Rightarrow\varphi(y)=\frac{y^4}{4}$$

$U=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}$ па је опште решење: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C$.

Интеграциони множитељ

Ако код једначине $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ није задовољен услов $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ можемо покушати да множењем једначине неком функцијом $\lambda=\lambda(x,y)$ добијемо једначину $\lambda P(x,y)dx+\lambda Q(x,y)dy=0$ код које ће услов бити задовољен. Овдје ћемо размотрити само најједноставније облике функције $\lambda=\lambda(x,y)$, коју називамо интеграциони множитељ, који дозвољавају њено лако налажење.

Нека је $\lambda=\lambda(x)$. Тада из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y}=\frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$ то јест $\lambda(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=Q\frac{d\lambda}{dx}$. Добијену једнакост $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx=\frac{d\lambda}{\lambda}$ можемо интегралити ако је члан уз dx функција која зависи само од x. То представља услов за постојање интеграционог множитеља $\lambda=\lambda(x)$ и истовремено даје начин за његово одређивање.

Слично се из једнакости $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy=\frac{d\lambda}{\lambda}$ може добити интеграциони множитељ $\lambda=\lambda(y)$ ако је члан уз dy функција која зависи само од y.

<u>примјер:</u> $(x+y^2)dx-2xydy=0$

<u>решење:</u> Једначина није једначина са тоталним диференцијалом јер је $\frac{\partial P}{\partial y}=2y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$. Како је $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$ то из $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$ можемо одредити функцију $\lambda=\lambda(x)$ као интеграциони множитељ која ј-ну своди на ј-ну са тоталним диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{2}{x}dx\Rightarrow\ \ln\lambda=-2\ln x\Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{x^2}$. Послије множења: $(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2})dx-2\frac{y}{x}dy=0$ па је $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ чиме се задатак своди на налажење функције $U=U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}$ имамо $U=\ln x-\frac{y^2}{x}+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{2y}{x}$ то је $\varphi'(y)=0$. $U=\ln x-\frac{y^2}{x}$ Опште решење је $\ln x-\frac{y^2}{x}=C$.

<u>примјер:</u> Ријешити диф. ј-ну: $y'=\frac{xy}{y^3+x^2y+x^2}$.

<u>решење:</u> $xydx-(y^3+x^2y+x^2)dy=0$. Како је $\frac{\partial P}{\partial y}=x$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xy-2x$ тада је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{-2xy-2x-x}{xy}=\frac{-2y-3}{y}$ па из $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy$ можемо одредити функцију $\lambda=\lambda(y)$ као интеграциони множитељ која ј-ну своди на ј-ну са тоталним

диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2y-3}{y}dy \Rightarrow \ \ln\lambda = -2y - 3\ln y \Rightarrow \ \lambda = \frac{e^{-2y}}{y^3}$. Послије множења: $\frac{x}{e^{2y}y^2}dx - \frac{y^3 + x^2 y + x^2}{e^{2y}y^3}dy = 0$ па је $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x(y+1)}{e^{2y}y^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ чиме се задатак своди на налажење функције $U = U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{e^{2y}y^2}$ имамо $U = \frac{x^2}{2e^{2y}y^2} + \varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2\frac{-4y^2-4y}{4e^{2y}y^4} + \varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y^3 + x^2 y + x^2}{e^{2y}y^3}$ то је $\varphi'(y) = -e^{-2y}$ па је $\varphi(y) = \frac{e^{-2y}}{2}$.

$U = \frac{x^2}{2e^{2y}y^2} + \frac{1}{2e^{2y}}$. Опште решење је $\frac{x^2+y^2}{2e^{2y}y^2} = C$. Због множења са $\lambda = \frac{e^{-2y}}{y^3}$ вршимо провјеру да ли је $y = 0$ решење. Очигледно јесте, и не може се добити ни за једну вриједност константе из општег решења па представља сингуларно решење.

примјери за вјежбање:
$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$; $2xy + 5arctgx = C$.

У ситуацијама када се не може одредити интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве можемо покушати, зависно од облика функција $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ да одредимо множитељ у облику $\lambda = \lambda(x+y)$ или $\lambda = \lambda(x^2+y^2)$...

<u>примјер:</u> $x(xy-3)y' + (xy^2 - y) = 0$.

<u>решење:</u> Из $y(xy-1)dx + x(xy-3)dy = 0$ имамо $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3$. Како не постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве тражимо, обзиром на облик функција $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ функцију $\lambda = \lambda(xy)$. Ако означимо $t = xy$ тада је $\lambda = \lambda(t) = \lambda(t(x;y))$. Из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt}y$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}x$ то је $\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{d\lambda}{dt}x = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{d\lambda}{dt}y$. Из $P\frac{d\lambda}{dt}x - Q\frac{d\lambda}{dt}y = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} - \lambda\frac{\partial P}{\partial y}$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy}dt$ закључујемо да ако је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = F(t)$ онда постоји интеграциони множитељ $\lambda = \lambda(xy)$. Овдје је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = \frac{2xy - 3 - 2xy + 1}{xy(xy-1) - xy(xy-3)}$ па имамо $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2}{2xy}dt$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-dt}{t}$. Послије одређивања множитеља $\lambda = \frac{1}{t}$ тј. $\lambda = \frac{1}{xy}$ добија се једначина $\frac{xy-1}{x}dx + \frac{xy-3}{y}dy = 0$ код које је $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Опште решење једначине се може записати у облику $xy - \ln xy^3 = C.$ Осим тога, због множења са $\lambda = \frac{1}{xy}$ имамо и сингуларно решење $y = 0$.

(Задатак се може ријешити и смјеном $y = z^{\alpha}$)

<u>примјер:</u> риjешити $(3x+2y+y^2)dx+(x+4xy+5y^2)dy=0$ знаjући да је интеграциони множитељ облика $\lambda=\lambda(x+y^2)$.

<u>решење:</u> смјена $z=x+y^2$ даје $\lambda=\lambda(z)$ па из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y}=\frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добиjамо

$\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \lambda}{\partial y}=Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dz}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dz}2y$ то је

$$\lambda(2+2y)+(3x+2y+y^2)\frac{d\lambda}{dz}2y=(x+4xy+5y^2)\frac{d\lambda}{dz}+\lambda(1+4y)$$

$\frac{d\lambda}{dz}(6xy+4y^2+2y^3-x-4xy-5y^2)=\lambda(1+4y-2-2y)$; $\frac{d\lambda}{dz}(2xy-y^2+2y^3-x)=\lambda(-1+2y)$

$\frac{d\lambda}{dz}(x+y^2)(-1+2y)=\lambda(-1+2y)$; $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dz}{x+y^2}$; $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dz}{z}$ интеграциjом добиjамо $\lambda=z$ то јест $\lambda=x+y^2$. Послије множења добиjамо

$$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx+(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)dy=0$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+8xy+6y^2+4y^3=\frac{\partial Q}{\partial x}$ па добијена једначина јесте са тоталним диференциjалом. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4$ имамо

$U=x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4$ то је $\varphi'(y)=5y^4$,

$\varphi(y)=y^5$, $U=x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5$ Опште решење је

$x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=C$.

<u>примјер:</u> риjешити $(x-2y^3)dx+(2x-y^3)3y^2dy=0$

<u>решење:</u> $\frac{\partial P}{\partial y}=-6y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=6y^2$. Једначина није са тоталним диференциjалом и не постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве. Обзиром на облик функција $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ функцију $\lambda=\lambda(x;y)$ можемо тражити у неком од облика $\lambda=\lambda(x-y^3)$ или $\lambda=\lambda(x+y^3)$ или $\lambda=\lambda(2x+y^3)$... Ако постоји множитељ који на неки начин зависи од x и y^3, да не би нагађали какав је тај облик можемо га потражити као $\lambda=\lambda(ax+by^3)$. Ако означимо $t=ax+by^3$ тада је $\lambda=\lambda(t)=\lambda(t(x;y))$.

Из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y}=\frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добиjамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dt}a$ и

$\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dt}3by^2$ то је $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{d\lambda}{dt}3by^2=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{d\lambda}{dt}a$. Из

$(P3by^2-Qa)\frac{d\lambda}{dt}=\lambda(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2-Qa}dt$ закључуjемо да ако је

$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2-Qa}=F(t)=F(ax+by^3)$ онда постоји интеграциони множитељ $\lambda=\lambda(ax+by^3)$.

Из $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2-Qa}=\dfrac{6y^2+6y^2}{3by^2(x-2y^3)-3ay^2(2x-y^3)}$ имамо $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{12y^2}{3y^2((b-2a)x+(-2b+a)y^3)}dt$

тј. $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{(-2a+b)x+(a-2b)y^3}$. Ако можемо одредити константе a и b тако да буде

$(-2a+b)x+(a-2b)y^3=K(ax+by^3)$ тада ће бити $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{K(ax+by^3)}$. То значи да за те

вриједности a и b постоји множитељ $\lambda=\lambda(ax+by^3)$. Из

$(-2a+b)x+(a-2b)y^3=K(ax+by^3)$ добијамо систем за одређивање a и b

$\begin{cases}-2a+b=Ka\\ a-2b=Kb\end{cases}$ тј. $\begin{cases}(-2-K)a+b=0\\ a+(-2-K)b=0\end{cases}$. Детерминанта система је једнака нули (тј. систем има нетривијална решења) за $K=-3$ и $K=-1$. То значи да можемо одредити двије функције које множењем једначину доводе на жељени облик. Коју од њих је боље користити? За $K=-3$ добија се $b=-a$ па за $a=1$ добијамо $t=x-y^3$ и

$\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{-3(x-y^3)}$ па је $\lambda=(x-y^3)^{-4/3}$. За $K=-1$ добија се $b=a$ па за $a=1$ добијамо

$t=x+y^3$ и $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{-(x+y^3)}$ па је $\lambda=(x+y^3)^{-4}$. Послије множења са $\lambda=(x+y^3)^{-4}$

добијамо једначину $\dfrac{x-2y^3}{(x+y^3)^4}dx+\dfrac{(2x-y^3)3y^2}{(x+y^3)^4}dy=0$ за коју је $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{18y^2(-x+y^3)}{(x+y^3)^5}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Из $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{x-2y^3}{(x+y^3)^4}=\dfrac{x+y^3-3y^3}{(x+y^3)^4}=\dfrac{1}{(x+y^3)^3}-3y^3\dfrac{1}{(x+y^3)^4}$ добија се

$U(x;y)=\dfrac{-x+y^3}{2(x+y^3)^3}+\varphi(y)$. Послије диференцирања и одређивања $\varphi(y)$ добија се

опште решење $\dfrac{-x+y^3}{2(x+y^3)^3}=\dfrac{C}{2}$.(За $y=z^\alpha$ се послије одређивања $\alpha=\dfrac{1}{3}$ једначина своди на хомогену.)