NAĆI OPŠTE REŠENJE REKURENTNE JEDNAČINE $a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$

$a_1 = 2; a_2 = 1; a_3 = 3.$

REŠENJE:

$$a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$$

$$x^3 = 7x^2 - 15x + 9$$

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0; \quad (x-1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$(x-1)(x-3)^2 = 0; \quad x_1 = 1; \; x_2 = x_3 = 3$$

$$a_n = \lambda_1 \cdot 1^n + \lambda_2 \cdot 3^n + \lambda_3 n \cdot 3^n$$

$n=1 \quad 2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \qquad 1 - 1$

$n=2 \quad 1 = \lambda_1 + 9\lambda_2 + 18\lambda_3$

$n=3 \quad 3 = \lambda_1 + 27\lambda_2 + 81\lambda_3$

$$-1 = 6\lambda_2 + 15\lambda_3 \qquad 1 - 4$$

$$1 = 24\lambda_2 + 78\lambda_3$$

$$5 = 18\lambda_3; \quad \lambda_3 = \frac{5}{18}$$

$$-1 = 6\lambda_2 + 15 \cdot \frac{5}{18}; \quad 6\lambda_2 = \frac{-93}{18}; \quad \lambda_2 = \frac{-31}{36}$$

$$2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3; \quad \lambda_1 = 2 - 3 \cdot \frac{-31}{36} - 3 \cdot \frac{5}{18}$$

$$\lambda_1 = \frac{45}{12}$$

$$a_n = \frac{45}{12} - \frac{31}{36} 3^n + \frac{5}{18} n \cdot 3^n$$

$$a_n = \frac{45}{12} - \frac{31}{12} \cdot 3^{n-1} + \frac{5}{6} n \cdot 3^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{12}\left(45 - 3^{n-1}(31 - 10n)\right); \quad n = 1; 2; 3; \ldots$$

NAĆI OPSTE RESENJE REKURENTNE JEDNAČINE

$$a_n = -5a_{n-1} + 14a_{n-2} + 4n^2 + 13 \;;\quad a_1 = 2 \;;\; a_2 = 1.$$

RESENJE:

$$a_n = -5a_{n-1} + 14a_{n-2}$$

$$x^2 = -5x + 14 \;;\quad x^2 + 5x - 14 = 0 \;;\quad (x-2)(x+7) = 0$$

$$x_1 = 2 \;;\; x_2 = -7$$

$$a_n^H = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 (-7)^n$$

$$a_n^P = An^2 + Bn + C$$

$$An^2 + Bn + C = -5\left(A(n-1)^2 + B(n-1) + C\right) + 14\left(A(n-2)^2 + B(n-2) + C\right) + 4n^2 + 13$$

$$An^2 + Bn + C = -5(An^2 - 2An + A + Bn - B + C)$$
$$+ 14(An^2 - 4An + 4A + Bn - 2B + C)$$
$$+ 4n^2 + 13$$

$$An^2 + Bn + C = (-5A + 14A + 4)n^2 + (10A - 5B - 56A + 14B)n +$$
$$+ (-5A + 5B - 5C + 56A - 28B + 14C + 13)$$

$$n^2 \qquad A = -5A + 14A + 4 \qquad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$n^1 \qquad B = 10A - 5B - 56A + 14B \qquad \Rightarrow \quad B = -\frac{23}{8}$$

$$n^0 \qquad C = 51A - 23B + 9C + 13 \qquad \Rightarrow \quad C = -\frac{429}{64}$$

$$a_n^P = An^2 + Bn + C$$

$$a_n^P = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{23}{8}n - \frac{429}{64}$$

$$a_n = a_n^H + a_n^P = \lambda_1 2^n + \lambda_2 (-7)^n - \frac{1}{64}(32n^2 + 184n + 429)$$

$$n=1 \qquad 2 = \lambda_1 \cdot 2 - \lambda_2 \cdot 7 - \frac{1}{64}(32 + 184 + 429)$$

$$n=2 \qquad 1 = \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 49 - \frac{1}{64}(128 + 368 + 429)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_1 - 7\lambda_2 = \dfrac{773}{64} \\ 4\lambda_1 + 49\lambda_2 = \dfrac{989}{64} \end{array}\right\} \quad /\cdot 7 \quad /\cdot(-2)$$

$$\lambda_1 = \frac{100}{18} = \frac{50}{9} \;;\quad \lambda_2 = -\frac{557}{63 \cdot 64} = \frac{-557}{4032}$$

$$a_n = \frac{50}{9} 2^n - \frac{557}{4032}(-7)^n - \frac{1}{64}(32n^2 + 184n + 429)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

NAĆI OPŠTE REŠENJE REKURENTNE JEDNAČINE

$a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3} + 5\cdot 2^n$; $a_1=-7$; $a_2=4$; $a_3=2$.

REŠENJE:

$a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$

$x^3 = 7x-6$; $x^3-7x+6=0$; $(x-1)(x^2+x-6)=0$

$(x-1)(x-2)(x+3)=0$; $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-3$

$a_n^H = \lambda_1\cdot 1^n + \lambda_2\cdot 2^n + \lambda_3(-3)^n$

$a_n^P = A\cdot n\cdot 2^n$

$An\cdot 2^n = 7A(n-2)2^{n-2} - 6A(n-3)2^{n-3} + 5\cdot 2^n$

$An\cdot 2^{n-3}\cdot 8 = 7A(n-2)2^{n-3}\cdot 2 - 6A(n-3)2^{n-3} + 5\cdot 2^{n-3}\cdot 8 \quad /:2^{n-3}$

$8An = 14A(n-2) - 6A(n-3) + 40$

$8An = 14An - 28A - 6An + 18A + 40$

$8An = 8An + 40 - 10A$

$n^1: \quad 8A = 8A$

$n^0: \quad 0 = 40 - 10A \Rightarrow A = 4$

$a_n^P = 4\cdot n\cdot 2^n = n\cdot 2^{n+2}$

$a_n = a_n^H + a_n^P = \lambda_1 + \lambda_2\cdot 2^n + \lambda_3(-3)^n + n\cdot 2^{n+2}$

$n=1 \quad -7 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + 8 \qquad -1$

$n=2 \quad 4 = \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 32$

$n=3 \quad 2 = \lambda_1 + 8\lambda_2 - 27\lambda_3 + 96$

$11 = 2\lambda_2 + 12\lambda_3 + 24 \qquad 1-3$

$9 = 6\lambda_2 - 24\lambda_3 + 88$

$-24 = -60\lambda_3 + 16$; $60\lambda_3 = 40$; $\lambda_3 = \frac{2}{3}$

$11 = 2\lambda_2 + 12\cdot\frac{2}{3} + 24$; $\lambda_2 = -\frac{21}{2}$

$\lambda_1 = -7 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 8$; $\lambda_1 = 8$

$a_n = 8 - \frac{21}{2}\cdot 2^n + \frac{2}{3}(-3)^n + n\cdot 2^{n+2}$

$a_n = 8 - 21\cdot 2^{n-1} - 2(-3)^{n-1} + n\cdot 2^{n+2}$

$n=1;2;3;\ldots$

$2x\,dx - (x^2 \cos y + \sin 2y)\,dy = 0$

rešenje:

$2x\,dx - (x^2 \cos y + \sin 2y)\,dy = 0 \quad /: 2x\,dy$

$\frac{dx}{dy} - \frac{\cos y}{2} x - \frac{\sin 2y}{2} x^{-1} = 0$ jed. BERNULIJEVA

$2x\,x' - \cos y\, x^2 - \sin 2y = 0; \qquad x^2 = z(y);\ 2x x' = z'$

$z' - \cos y\, z - \sin 2y = 0$ LINEARNA

$z = e^{-\int -\cos y\,dy}\left[C + \int \sin 2y\, e^{-\int \cos y\,dy}\,dy\right]$

$z = e^{\sin y}\left[C + \int 2 \sin y \cos y\, e^{-\sin y}\,dy\right]$

$\sin y = t$

$z = e^{\sin y}\left[C + \int 2\,t e^{-t}\,dt\right]$

$z = e^{\sin y}\left[C + 2(-t-1)e^{-t}\right]$

$z = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$

Ријешити диференцијалну једначину: $(y^2+2)dx = 2y(2x+y^2-4)dy$.

Решење:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{y^2+2}\cdot 2x + \frac{2y(y^2-4)}{y^2+2}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{4y}{y^2+2}x - \frac{2y(y^2-4)}{y^2+2} = 0;$$

$$x = e^{-\int -\frac{4y}{y^2+2}dy}\left[C + \int \frac{2y(y^2-4)}{y^2+2} e^{\int -\frac{4y}{y^2+2}dy} dy\right]$$

$$x = e^{2\ln(y^2+2)}\left[C + \int \frac{2y(y^2-4)}{y^2+2} e^{-2\ln(y^2+2)} dy\right]$$

$$x = (y^2+2)^2\left[C + \int \frac{2y(y^2-4)}{(y^2+2)^3} dy\right]$$

$y^2+2 = t$; $2y\,dy = dt$; $y^2 = t-2$

$$\int \frac{2y(y^2-4)}{(y^2+2)^3}dy = \int \frac{t-6}{t^3}dt = -\frac{1}{t} + 3\frac{1}{t^2} = \frac{-t+3}{t^2}$$

$$= \frac{-y^2+1}{(y^2+2)^2}$$

$$x = (y^2+2)^2\left[C + \frac{1-y^2}{(y^2+2)^2}\right]$$

$$\boxed{x = C(y^2+2)^2 + 1 - y^2}$$

II начин $\quad \lambda(y) = \frac{1}{(y^2+2)^3}$

Ријешити диференцијалну једначину: $(x^2-\sin^2 y)dx + x\sin 2y\,dy = 0$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\sin y\cos y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y$

$\lambda = \lambda(x)$ $\quad \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$; $\lambda\frac{\partial P}{\partial y} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{d\lambda}{dx}$

$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$; $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-\sin 2y-\sin 2y}{x\sin 2y}dx$

$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{2}{x}dx$; $\ln\lambda = -2\ln x$; $\lambda = \frac{1}{x^2}$

$(1-\frac{\sin^2 y}{x^2})dx + \frac{1}{x}\sin 2y\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2\sin y\cos y}{x^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sin 2y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = (1-\frac{\sin^2 y}{x^2}) \,/\!\int dx \Rightarrow u = x + \frac{\sin^2 y}{x} + \varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\sin 2y$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\sin y\cos y}{x} + \varphi'(y)$

$\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$

$$\boxed{x + \frac{\sin^2 y}{x} = C}$$

$$\boxed{y = \arcsin\sqrt{Cx-x^2}}$$

II način $\quad \sin y = z(x)$; $\cos y\cdot y' = z'$ $\qquad$ [može i $\sin^2 y = z(x)$]

$x^2 - \sin^2 y + x\,2\sin y\cos y\cdot y' = 0$

$x^2 - z^2 + x\cdot 2zz' = 0$ $\qquad z^2 = u(x)$; $2zz' = u'$

$x^2 - u + xu' = 0$;

$u' - \frac{1}{x}u + x = 0$; $u = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[C - \int x e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx\right]$

$u = x[C-x]$; $\quad z = \sqrt{Cx-x^2}$;

$$\boxed{y = \arcsin\sqrt{Cx-x^2}}$$

Ријешити диференцијалну једначину: $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$.

Решење:

$$(2x^3+2x)dy=-((2x^2+2)y+5)dx$$

$$y'=-\frac{2x^2+2}{2x^3+2x}y-\frac{5}{2x^3+2x}$$

$$y'+\frac{2(x^2+1)}{2x(x^2+1)}y+\frac{5}{2x^3+2x}=0$$

$$y'+\frac{1}{x}y+\frac{5}{2x^3+2x}=0$$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C-\int\frac{5}{2x^3+2x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]$$

$$y=\frac{1}{x}\left[\frac{C}{2}-\int\frac{5}{2(x^2+1)}dx\right]$$

$$y=\frac{1}{x}\left[\frac{C}{2}-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}x\right]$$

$$\boxed{y=\frac{C-5\operatorname{arctg}x}{2x}}$$

II način množi $\lambda(x)=\frac{1}{x^2+1}$

Ријешити диференцијалну једначину: $x^2(3y+2x)y' + 3x(y+x)^2 = 0$.

$$y' = -\frac{3x(y+x)^2}{x^2(3y+2x)} \;;\; y' = -\frac{3(y+x)^2}{3xy+2x^2} \;;\; y' = -\frac{3(\frac{y}{x}+1)^2}{3\frac{y}{x}+2}$$

$$\frac{y}{x} = z(x); \quad y = xz(x); \quad y' = z + xz'$$

$$z + xz' = -\frac{3(z+1)^2}{3z+2} \;;\; xz' = -\frac{3z^2+2z}{3z+2} - \frac{3z^2+6z+3}{3z+2}$$

$$xz' = -\frac{6z^2+8z+3}{3z+2}$$

$$\frac{3z+2}{6z^2+8z+3}\,dz = -\frac{dx}{x} \quad /\cdot 4$$

$$\frac{12z+8}{6z^2+8z+3}\,dz = -\frac{4dx}{x}$$

$$\frac{d(6z^2+8z+3)}{6z^2+8z+3} = -4\frac{dx}{x}$$

$$\ln(6z^2+8z+3) = -4\ln x + \ln C$$

$$6z^2+8z+3 = \frac{C}{x^4}$$

$$6\frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 3 = \frac{C}{x^4} \quad /\cdot x^4$$

$$\boxed{6x^2y^2 + 8x^3y + 3x^4 = C}$$

II način $\quad 3x(y^2+2xy+x^2)\,dx + x^2(3y+2x)\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy + 6x^2 \;;\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy + 6x^2$$

Ријешити диференцијалну једначину: $\cos x(3y^2\cos x-\sin x)dy-ydx=0$.

$$y\,dx+\cos x(\sin x-3y^2\cos x)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\sin x(\sin x-3y^2\cos x)+\cos x(\cos x+3y^2\sin x)$$

$$=-\sin^2 x+3y^2\sin x\cos x+\cos^2 x+3y^2\sin x\cos x$$

$$=-\sin^2 x+6y^2\sin x\cos x+1-\sin^2 x$$

$$=1+2\sin x(3y^2\cos x-\sin x)$$

$\lambda=\lambda(x)$

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx;\quad \frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{-2\sin x(3y^2\cos x-\sin x)}{\cos x(\sin x-3y^2\cos x)}dx$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{2\sin x}{\cos x}dx;\quad \ln\lambda=-2\ln\cos x;\quad \lambda=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{y}{\cos^2 x}dx+(\operatorname{tg}x-3y^2)dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2 x};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{\cos^2 x}\quad /\int dx\ \Rightarrow\ u(x,y)=y\operatorname{tg}x+\varphi(y)\quad /\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{tg}x-3y^2\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{tg}x+\varphi'(y)$$

$$\operatorname{tg}x+\varphi'(y)=\operatorname{tg}x-3y^2$$

$$\varphi'(y)=-3y^2;\quad \varphi(y)=-y^3$$

$$\boxed{y\operatorname{tg}x-y^3=C}$$

II način

$$\frac{dx}{dy}=3y\cos^2 x-\frac{1}{y}\sin x\cos x\quad /:\cos^2 x$$

$$\frac{x'}{\cos^2 x}=3y-\frac{1}{y}\operatorname{tg}x;\quad \operatorname{tg}x=z(y);\ \frac{x'}{\cos^2 x}=z'$$

$$z'+\frac{1}{y}z-3y=0;$$

$$z=e^{-\int\frac{dy}{y}}\left[C+3\int y\,e^{\int\frac{dy}{y}}dy\right]$$

$$z=\frac{1}{y}[C+y^3];\quad \operatorname{tg}x=\frac{1}{y}[C+y^3]$$

$$\boxed{y\operatorname{tg}x-y^3=C}$$

$(y\cos x + y^3)dx - \sin x\, dy = 0$

rešenje:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x + y^3}{\sin x}$$

$$y' - \operatorname{ctg} x\, y - \frac{1}{\sin x} y^3 = 0 \quad / \cdot y^{-3}, \; y \neq 0 \qquad y = 0 \text{ je rešenje}$$

$$y^{-3} y' - \operatorname{ctg} x\, y^{-2} - \frac{1}{\sin x} = 0$$

$$y^{-2} = z(x) \qquad y = z^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{z'}{2} - \operatorname{ctg} x\, z - \frac{1}{\sin x} = 0 \qquad -2y^{-3}y' = z'$$

$$z' + 2\operatorname{ctg} x\, z + \frac{2}{\sin x} = 0$$

$$z = e^{-\int 2\operatorname{ctg} x\, dx}\left[c - \int \frac{2}{\sin x} e^{\int 2\operatorname{ctg} x\, dx} dx\right]$$

$$z = e^{-2\ln \sin x}\left[c - \int \frac{2}{\sin x} \sin^2 x\, dx\right]$$

$$z = \frac{1}{\sin^2 x}\left[c + 2\cos x\right]$$

$$z = \frac{c + 2\cos x}{\sin^2 x}, \quad \frac{1}{y^2} = z; \quad y^2 = \frac{1}{z}$$

$$y = \frac{\pm \sin x}{\sqrt{c + 2\cos x}}$$

$$y = 0$$

$(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2} + xy + y^2$

РЕШЕНИЕ:

$(1+\frac{y}{x})y' = \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$ хомогена

$\frac{y}{x} = z(x); \quad y = xz; \quad y' = z + xz'$

$(1+z)(z+xz') = \sqrt{1-z^2} + z + z^2$

$z + xz' = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z} + \frac{z(1+z)}{1+z}$

$xz' = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z}$

$\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}dz = \frac{dx}{x} \quad /\int$

$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{2}\int\frac{2z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \ln x + \ln C$

$\arcsin z + \frac{1}{2}\ln\sqrt{1-z^2} = \ln x + \ln C$

$\arcsin\frac{y}{x} = \ln\frac{Cx\sqrt{1-z^2}}{2}$

$\arcsin\frac{y}{x} = \ln\frac{C\sqrt{x^2-y^2}}{2}$

Риjешити диференциjалну jедначину: $xyy' - x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)(y^2+1)$.

Решење:

смјена $y^2+1 = z(x)$; $2yy' = z'$

$$2xyy' - 2x^2\sqrt{y^2+1} = 2(x+1)(y^2+1)$$

$$x z' - 2x^2\sqrt{z} = 2(x+1)z$$

$$z' - 2x\sqrt{z} - 2\frac{x+1}{x}z = 0 \;/\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}, \quad \sqrt{z} \neq 0$$ Бернулијева

$$z^{-\frac{1}{2}}z' - 2x - \frac{2(x+1)}{x}z^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$z^{\frac{1}{2}} = u(x); \quad \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z' = u'$$

$$2u' - \frac{2x+2}{x}u - 2x = 0$$

$$u' - \frac{x+1}{x}u - x = 0$$

$$u = e^{-\int -\frac{x+1}{x}dx}\left[c + \int x e^{\int -\frac{x+1}{x}dx}dx\right]$$

$$u = e^{x+\ln x}\left[c + \int x e^{-x-\ln x}dx\right]$$

$$u = xe^{x}\left[c + \int x \frac{e^{-x}}{x}dx\right]; \quad u = xe^{x}(c - e^{-x})$$

$$u = cxe^{x} - x; \quad z = u^2; \quad y^2+1 = z$$

$$\boxed{y^2+1 = (cxe^{x} - x)^2}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{(cxe^{x} - x)^2 - 1}}$$

Ријешити диференцијалну једначину: $xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y)\cos y = 0$.

Решење:

$$(\sin y - 3x^2\cos y)\cos y\,dx + x\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos^2 y - \sin^2 y + 3x^2 \cdot 2\cos y \sin y \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\lambda = \lambda(y) \quad ; \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy \; ; \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1 - \cos^2 y + \sin^2 y - 6x^2\cos y \sin y}{(\sin y - 3x^2\cos y)\cos y}\,dy$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2\sin^2 y - 6x^2\cos y \sin y}{(\sin y - 3x^2\cos y)\cos y}\,dy \; ; \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2\sin y(\sin y - 3x^2\cos y)}{(\sin y - 3x^2\cos y)\cos y}\,dy$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = 2\frac{\sin y}{\cos y}\,dy \; ; \quad \ln\lambda = -2\ln\cos y \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$(\sin y - 3x^2\cos y)\cos y\,dx + x\,dy = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$$

$$(\operatorname{tg} y - 3x^2)\,dx + \frac{x}{\cos^2 y}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 y} \; ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 y} \; ; \quad \exists\, U = U(x;y) \; ; \; U(x;y) = C$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{tg} y - 3x^2 \quad / \int dx \Rightarrow U(x;y) = x\operatorname{tg} y - x^3 + \varphi(y) \quad / \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{\cos^2 y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{\cos^2 y} + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 0, \; \varphi(y) = C$$

$$x\operatorname{tg} y - x^3 = C$$

$$\boxed{x\operatorname{tg} y - x^3 = C}$$

$$x\operatorname{tg} y = C + x^3$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{C + x^3}{x}$$

$$\boxed{y = \operatorname{arc\,tg}\frac{C + x^3}{x}}$$

$$\boxed{y = \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

II način

$$xy' + \sin y\cos y - 3x^2\cos^2 y = 0$$

$$x\frac{y'}{\cos^2 y} + \frac{\sin y}{\cos y} - 3x^2 = 0$$

smjena $\operatorname{tg} y = z(x)$

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = z'$$

$$xz' + z - 3x^2 = 0$$

$$z' + \frac{1}{x}z - 3x = 0$$

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + 3\int x e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx\right]$$

$$z = \frac{1}{x}\left[C + x^3\right]$$

$$x\operatorname{tg} y = C + x^3$$

Ријешити диференцијалну једначину: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.
Упутства:
1. $(y^2+1)=C(1-x^2)$. Једначина са раздвојеним промјенљивим : $\frac{x}{1-x^2}dx+\frac{y}{y^2+1}dy=0$.

Може и $\lambda(x)=\frac{1}{(1-x^2)^2}$ или $\lambda(y)=\frac{1}{(1+y^2)^2}$.

1. Ријешити диференцијалну једначину: $(2xy-2xy^2+2y^4)dx+(4xy^3+2y^3-x^2)dy=0$.

Упутства:
1. $\frac{x^2}{y}-x^2+2xy^2+y^2=C$ и сингуларно $y=0$. $\lambda(y)=\frac{1}{y^2}$.

1. Ријешити диференцијалну једначину: $(4x^3y+2x^3-y^2)dx+(2xy+2x^2y+2x^4)dy=0$.

Упутства:
1. $2x^2y+x^2+\frac{y^2}{x}+y^2=C$. $\lambda(x)=\frac{1}{x^2}$.

1. Наћи опште решење: $2xdx-(x^2\cos y+\sin 2y)dy=0$ и партикуларно $y(2)=0$.
Упутства:
1. $x^2=Ce^{\sin y}-2\sin y-2$, $x^2=6e^{\sin y}-2\sin y-2$. Бернулијева ј-на :
$\frac{dx}{dy}-\frac{\cos y}{2}x-\frac{\sin 2y}{2}x^{-1}=0$. Може и $\lambda(y)=e^{-\sin y}$.

1. Наћи опште решење: $2ydx+(2x-x^3y)dy=0$ и партикуларно $y(1/2)=1$.
Упутства:
1. $1=x^2(Cy^2+y)$, $1=x^2(3y^2+y)$. Бернулијева једначина : $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x-\frac{1}{2}x^3=0$.

Може и као квазихомогена $\alpha=-2$ тј. $y=z^{-2}(x)$.

1. Наћи опште решење: $y(\cos x+y^2)dx-\sin xdy=0$ и партикуларно $y(\pi/2)=1$.
Упутства:
1. $y^2=\frac{\sin^2 x}{C+2\cos x}$, $y=\frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}$. Бернулијева једначина : $\frac{dy}{dx}-(ctgx)y-\frac{1}{\sin x}y^3=0$.

1. $(x+2y)y'=1, \quad y(0)=-1$
2. $xy'-y=xtg\,\frac{y}{x}$
3. $2y+(x^2y+1)xy'=0$
4. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$

Uputstva za rešavanje

1. Smjena $x+2y=z(x)$ u jednačini daje $z\frac{z'-1}{2}=1$. Iz $z'=\frac{z+2}{z}$ tj. $\frac{z}{z+2}dz=dx$ dobija se $z-2\ln(z+2)+2\ln C=x$ tj. $2y+2\ln C=2\ln(x+2y+2)$ pa se opšte rešenje može zapisati u obliku $x+2y+2=Ce^y$. Iz $y(0)=-1$ dobijamo $-0+2\cdot(-1)+2=Ce^0$ tj. $C=0$ pa je traženo partikularno rešenje $x+2y+2=0$.
2. Homogena jednačina $y'=\frac{y}{x}+tg\,\frac{y}{x}$ smjenom $\frac{y}{x}=z(x)$ dobija oblik $z+xz'=z+tgz$ tj. $\frac{dz}{tgz}=\frac{dx}{x}$. Integracijom se dobija opšte rešenje $\ln\sin z=\ln x+\ln C$ tj. $\sin\frac{y}{x}=Cx$ ili $y=x\arcsin Cx$
3. Jednačina se može zapisati u obliku $y'=\frac{-2y}{x^3y+x}$ ili $\frac{dx}{dy}=\frac{x^3y+x}{-2y}$; $\quad y\neq 0$ a to je Bernulijeva jednačina $x'+\frac{1}{2y}x+\frac{1}{2}x^3=0$. Smjenom $x^{-2}=z(y)$ dobija se linearna jednačina $z'-\frac{1}{y}z-1=0$ koja ima rešenje $z=y(C+\ln y)$ pa skup svih rešenja čine opšte rešenje $1=x^2y(C+\ln y)$ i singularno rešenje $y=0$. (jednačina se mogla rešavati i kao kvazihomogena smjenom $y=z^{\alpha}(x)$ za $\alpha=2$)
4. Određivanjem integracionog množitelja $\lambda=\lambda(y)=\frac{1}{y}$ dobijamo jednačinu sa totalnim diferencijalom $(x+y)dx+(x+\frac{1}{y})dy=0$ koja ima opšte rešenje $\frac{x^2}{2}+xy+\ln y=C$ Osim toga zbog množenja sa $\frac{1}{y}$ provjeravamo da li je $y=0$ rešenje. To jeste rešenje i ne može se dobiti iz opšteg rešenja za neku vrijednost konstante C pa predstavlja singularno rešenje.

Ријешити једначину $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$.

Ријешити једначину $(x^2+2x+y)dx = (x-3x^2y)dy$.

Ријешити једначину $(y^6-4xy^3)dx+(2xy^5-3x^2y^2)dy = 0$.

Ријешити једначину $2yy'(3x+4y^2+1) = 2x+3y^2+1$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(y^2+2)dx = 2y(2x+y^2-4)dy$.

Ријешити диференцијалну једначину: $xy'+(\sin y-3x^2\cos y)\cos y = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $y' = y\sin 2x/(\sin^2 x-y^2)$.

Ријешити диференцијалну једначину: $xyy'-x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)(y^2+1)$.

Ријешити диференцијалну једначину: $y(2x-1)dx+(y^2-x^2+x)dy = 0$.

Ријешити једначину $(1-y\sin x)dx-\cos xdy = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(y\cos x+y^3)dx-\sin xdy = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(2xy-2xy^2+2y^4)dx+(4xy^3+2y^3-x^2)dy = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

Ријешити диференцијалну једначину: $((1+x^2)^2+2xy)dx-(1+x^2)dy = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $x^2(3y+2x)y'+3x(y+x)^2 = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $3y(y+x)^2y'+y^2(3x+2y) = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(y-\sin x)y' = \cos x$.

Ријешити диференцијалну једначину: $y' = (x/\cos y)-tgy$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx = 0$.

Ријешити диференцијалну једначину: $(y\sin x+x\cos x)dy+(y\cos x-x\sin x)dx = 0$.