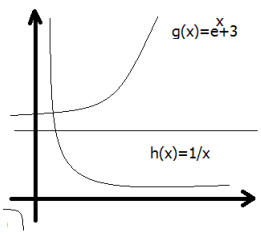
Метод сјечице

За налажење приближног решења једначине $f(x)=0$ одређујемо интервал $(a;b)$ у коме се налази решење тј. интервал за који је задовољено $f(a)\cdot f(b)<0$. Осим тога на интервалу $(a;b)$ први и други извод функције $f(x)$ морају бити константног знака. Почетну итерацију и фиксну тачку одређујемо на основу знака производа првог и другог извода функције $f(x)$. Ако је на интервалу $(a;b)$ $f'(x)\cdot f''(x)>0$ тада узимамо да је $x_0=a$ и $x_F=b$. Ако је на интервалу $(a;b)$ $f'(x)\cdot f''(x)<0$ тада узимамо да је $x_0=b$ и $x_F=a$.

Користимо формулу $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-x_F}{f(x_k)-f(x_F)}f(x_k)$, $k=0,1,2,3...$ Растојање последње итерације од тачног решења процјењујемо по формули $\left|x_{k+1}-x^*\right|\le\dfrac{M-m}{m}\left|x_{k+1}-x_k\right|$ гдје су M и m максимална и минимална вриједност апсолутне вриједности првог извода тј. $\forall x\in(a;b)\quad 0<m<\left|f'(x)\right|<M$

Примјер: Ријешити једначину $e^x+3-\dfrac{1}{x}=0$.

Рјешење: Први корак је изоловање интервала $(a;b)$ у коме се налази решење. Да би то лакше урадили једначину $f(x)=0$ преводимо у облик $g(x)=h(x)$. При томе функције $g(x)$ и $h(x)$ бирамо тако да можемо лако нацртати њихове графике. Овдје једначину $e^x+3-\dfrac{1}{x}=0$ преводимо у облик $e^x+3=\dfrac{1}{x}$ и цртамо графике функција $g(x)=e^x+3$ и $h(x)=\dfrac{1}{x}$.



Очигледно њихов пресјек се добија за $x>0$. Ако израчунамо вриједности $f(0.1)=e^{0.1}+3-\dfrac{1}{0.1}=-5.89$ и $f(1)=e^1+3-\dfrac{1}{1}=4.72$ закључујемо да се решење налази у интервалу $(0.1;1)$ јер је $f(0.1)*f(1)<0$. Ширину интервала можемо смањити методом половљења тако што израчунамо вриједност $f(0.5)=e^{0.5}+3-\dfrac{1}{0.5}=2.65$. Како је $f(0.1)*f(0.5)<0$ и $f(0.5)*f(1)>0$ то значи да је решење једначине у интервалу $(0.1;0.5)$. У том интервалу важи: $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$, $f''(x)=e^x-\dfrac{2}{x^3}$. Како је $f'''(x)=e^x+\dfrac{6}{x^4}>0$ то је $f''(x)$ растућа функција. У десном крају интервала $(0.1;0.5)$ је $f''(0.5)=\sqrt{e}-16<0$ па је $f''(x)<0$ у читавом интервалу. Због $f'(x)\cdot f''(x)<0$ узимамо да је $x_0=b=0.5$ и $x_F=a=0.1$. Већ смо закључили да је први извод позитивна, опадајућа функција на интервалу $(0.1;0.5)$ па је $\forall x\in(0.1;0.5)\quad 0<f'(0.5)=m<\left|f'(x)\right|<M=f'(0.1)$. За $\dfrac{M-m}{m}$ можемо узети $\dfrac{M-m}{m}=\dfrac{101.1052-5.648721}{5.648721}=16.89877\approx 17$. Користимо формулу $x_0=0.5$,

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-0.1}{f(x_k)-f(0.1)}f(x_k),\quad k=0,1,2,3...$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 0.1}{f(x_0) - f(0.1)} f(x_0) \ldots$$

што се може приказати у таблици:

K	Xk	F(Xk)	Xf	F(Xf)	Xk+1	greska
0	0,500000	2,648721	0,1	-5,89	0,37598967	2,1081756293
1	0,375990	1,796785	0,1	-5,89	0,31151764	1,0960245682
2	0,311518	1,155405	0,1	-5,89	0,27685375	0,5892860034
3	0,276854	0,706958	0,1	-5,89	0,25791521	0,3219551469
4	0,257915	0,416986	0,1	-5,89	0,24748265	0,1773536123
5	0,247483	0,240110	0,1	-5,89	0,24171046	0,0981272336
6	0,241710	0,136244	0,1	-5,89	0,23850917	0,0544219279
7	0,238509	0,076644	0,1	-5,89	0,23673139	0,0302222279
8	0,236731	0,042904	0,1	-5,89	0,23574342	0,0167954951
9	0,235743	0,023950	0,1	-5,89	0,23519415	0,0093375509
10	0,235194	0,013348	0,1	-5,89	0,23488872	0,0051924179
11	**0,234889**	**0,007433**	**0,1**	**-5,89**	**0,23471885**	**0,0028877520**

За метод сјечице је пожељно да почетни интервал у коме се налази решење одредимо што прецизније јер тада итеративни поступак много брже конвергира. Да смо интервал $(a;b)$ методом половљења свели на $(0.2;0.3)$ тада би имали $x_0 = b = 0.3$ и $x_F = a = 0.2$. За први извод би имали да је $\forall x \in (0.2;0.3) \quad 0 < f'(0.3) = m < |f'(x)| < M = f'(0.2)$. За $\frac{M-m}{m}$ би сада било $\frac{M-m}{m} = \frac{26.2214 - 12.46097}{12.46097} = 1.104283$. Итеративни поступак би имао облик :

$$x_0 = 0.3, \; x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - 0.2}{f(x_k) - f(0.2)} f(x_k), \quad k = 0,1,2,3...$$

Таблица сада има облик :

K	Xk	F(Xk)	Xf	F(Xf)	Xk+1	greska
0	0,300000	1,016525	0,2	-0,78	0,24337293	0,0625322928
1	0,243373	0,166624	0,2	-0,78	0,23572714	0,0084431102
2	**0,235727**	**0,023636**	**0,2**	**-0,78**	**0,23467452**	**0,0011623865**
3	0,234675	0,003276	0,2	-0,78	0,23452923	0,0001604408
4	0,234529	0,000453	0,2	-0,78	0,23450917	0,0000221530
5	0,234509	0,000063	0,2	-0,78	0,23450640	0,0000030589
6	0,234506	0,000009	0,2	-0,78	0,23450602	0,0000004224
7	0,234506	0,000001	0,2	-0,78	0,23450597	0,0000000583
8	0,234506	0,000000	0,2	-0,78	0,23450596	0,0000000081
9	0,234506	0,000000	0,2	-0,78	0,23450596	0,0000000011
10	0,234506	0,000000	0,2	-0,78	0,23450596	0,0000000002
11	0,234506	0,000000	0,2	-0,78	0,23450596	0,0000000000

Ако се у задатку тражи решење са грешком $\varepsilon < 0.005$ оно се у првом случају добија у једанаестој итерацији а са краћим почетним интервалом већ у другој.

Метод тангенте

За налажење приближног решења једначине $f(x)=0$ одређујемо интервал $(a;b)$ у коме се налази решење тј. интервал за који је задовољено $f(a)\cdot f(b)<0$. Осим тога на интервалу $(a;b)$ први и други извод функције $f(x)$ морају бити константног знака.

Користимо формулу $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k=0,1,2,3...$

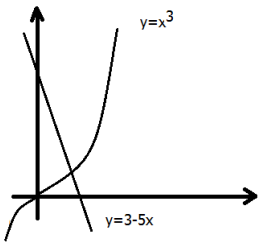
Почетну итерацију одређујемо на основу знака производа првог и другог извода функције $f(x)$. Ако је на интервалу $(a;b)$ $f'(x)\cdot f''(x)>0$ тада узимамо да је $x_0=b$ и добијамо опадајући низ $x_0>x_1>x_2>...>x_k\to x^*$. Ако је на интервалу $(a;b)$ $f'(x)\cdot f''(x)<0$ тада узимамо да је $x_0=a$ и добијамо растући низ $x_0<x_1<x_2<...<x_k\to x^*$.

Растојање последње итерације од тачног решења процјењујемо по формули

$\left|x_{k+1}-x^*\right|\le\dfrac{M_2}{2m}\left|x_{k+1}-x_k\right|^2$ гдје су $M_2=\sup\limits_{x\in(a;b)}\left|f''(x)\right|$ и $m=\inf\limits_{x\in(a;b)}\left|f'(x)\right|$

Примјер: Ријешити једначину $x^3+5x-3=0$.

Рješење: Први корак је изоловање интервала $(a;b)$ у коме се налази решење. Да би то лакше урадили једначину $f(x)=0$ преводимо у облик $g(x)=h(x)$. При томе функције $g(x)$ и $h(x)$ бирамо тако да можемо лако нацртати њихове графике. Овдје једначину $x^3+5x-3=0$ преводимо у облик $x^3=3-5x$ и цртамо графике функција $g(x)=x^3$ и $h(x)=3-5x$. Очигледно њихов пресјек се добија за $x>0$. Ако израчунамо вриједности $f(0)=-3$ и $f(1)=3$ закључујемо да се решење налази у интервалу $(0;1)$ јер је $f(0)*f(1)<0$. У том интервалу важи:



$f'(x)=3x^2+5>0$, $f''(x)=6x>0$. Како је на интервалу $(a;b)=(0;1)$ $f'(x)\cdot f''(x)>0$ тада узимамо да је $x_0=b=1$. Осим тога је $m=\inf\limits_{x\in(a;b)}\left|f'(x)\right|$ тј. $m=\inf\limits_{x\in(0;1)}\left|3x^2+5\right|=5$ и

$M_2=\sup\limits_{x\in(a;b)}\left|f''(x)\right|$ тј. $M_2=\sup\limits_{x\in(0;1)}\left|6x\right|=6$ па је $\left|x_{k+1}-x^*\right|\le\dfrac{M_2}{2m}\left|x_{k+1}-x_k\right|^2$ и

$\left|x_{k+1}-x^*\right|\le 0{,}6\cdot\left|x_{k+1}-x_k\right|^2$. Користимо формулу $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k=0,1,2,3...$ и $x_0=1$

Рачунски процес се може представити таблицом:

k	Xk	F(Xk)	F'(Xk)	Xk+1	Greska
0	1,000000000	3,000000000	8,000000000	0,625000000	0,084375000
1	0,625000000	0,369140625	6,171875000	0,565189873	0,002146351
2	0,565189873	0,006493390	5,958318779	0,564100071	0,000000713
3	0,564100071	0,000002012	5,954626670	0,564099733	0,000000000
4	0,564099733	0,000000000	5,954625526	0,564099733	0,000000000
5	0,564099733	0,000000000	5,954625526	0,564099733	0,000000000
6	0,564099733	0,000000000	5,954625526	0,564099733	0,000000000

У зависности од дозвољене грешке поступак завршавамо послије потребног броја корака.

Лагранжов интерполациони полином

Примјер: Функција $f(x)$ пролази кроз тачке $(1;2),(3;1),(4;3),(7;5)$. Користећи Лагранжов интерполациони полином одредити $f(5.5)$.

Решење :

Лагранжов интерполациони полином има облик $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	7
$f(x_i)$	2	1	3	5

$$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$L_3(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad ;$$

$$L_3(x)=2\frac{(x-3)(x-4)(x-7)}{(1-3)(1-4)(1-7)}+1\frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{(3-1)(3-4)(3-7)}+3\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(4-1)(4-3)(4-7)}+5\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(7-1)(7-3)(7-4)} \quad ;$$

$$L_3(x)=\frac{2}{-36}\left(x^3-14x^2+61x-84\right)+\frac{1}{8}\left(x^3-12x^2+39x-28\right)+\frac{3}{-9}\left(x^3-11x^2+31x-21\right)+\frac{5}{72}\left(x^3-8x^2+19x-12\right) \quad ;$$

$$L_3(x)=\frac{1}{72}\left(-4x^3+56x^2-244x+336\right)+\frac{1}{72}\left(9x^3-108x^2+351x-252\right)+$$

$$\frac{1}{72}\left(-24x^3+264x^2-744x+504\right)+\frac{1}{72}\left(5x^3-40x^2+95x-60\right) \quad ;$$

$$L_3(x)=\frac{1}{72}\left[x^3\left(-4+9-24+5\right)+x^2\left(56-108+264-40\right)+x\left(-244+351-744+95\right)+\left(336-252+504-60\right)\right]$$

$$L_3(x)=\frac{1}{72}\left[-14x^3+172x^2-542x+528\right]$$

$$f(5.5)\approx L_3(5.5)=\frac{1}{72}\left[-14(5.5)^3+172(5.5)^2-542(5.5)+528\right]=\frac{420.75}{72}=5.84375$$