

NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM SA KONAČNIM RAZLIKAMA

- Koristi se isključivo na ekvidistantnim mrežama !!!

• **DEFINICIJA:** Konačna (centralna) razlika je $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$

$\Delta y(x)$ linearni operator po y

$\Delta^{k+1}y(x)$ linearni operator po y (kao kompozicija linearnih operatora) $\Delta^{k+1}y(x) = \Delta(\Delta^k y(x))$

- Formiramo tablicu konačnih razlika

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0 \dots$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	$\dots$	$\Delta^4 y_1$
		Δy_3	$\dots$		$\dots$
x_4	y_4	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

mora da važi:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i)$$

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Koristimo modifikovani Lagranžov polinom:

$$p_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

Uvođenjem određenih smena dobijamo Njutnove interpolacione polinome i to:

Smenom $q = \frac{x - x_0}{h}$ dobijamo **I NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM**

$$p_n^I(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

Smenom $q = \frac{x - x_n}{h}$ dobijamo **II NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM**

$$p_n^{II}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

I Njutnov interpolacioni polinom se koristi za $x \in [x_0, x_1]$ kao i za $x < x_0$

II Njutnov interpolacioni polinom se koristi za $x \in [x_{n-1}, x_n]$ kao i za ekstrapolaciju $x > x_n$

Greška: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x), \quad f^{(n+1)}(\xi) = h^{n+1} \Delta^{n+1} f$

I Njutnov int.polinom: $R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!} |q(q-1)\dots(q-n)|$

II Njutnov int.polinom: $R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!} |q(q+1)\dots(q+n)|$

Ove ocene greške ne važe za ekstrapolaciju pa je nju potrebno izbegavati !!

ZADATAK 6: Funkcija je zadata tablično. Odrediti $y(18)$, $y(53)$, $y(12)$.

X	Y	deltaY	delta2Y	delta3Y	delta4Y
15	0.2588				
		0.0832			
20	0.342		-0.0026		
		0.0806		-0.0006	
25	0.4226		-0.0032		0
		0.0774		-0.0006	
30	0.5		-0.0038		0
		0.0736		-0.0006	
35	0.5736		-0.0044		0.0001
		0.0692		-0.0005	
40	0.6428		-0.0049		0
		0.0643		-0.0005	
45	0.7071		-0.0054		0.0002
		0.0589		-0.0003	
50	0.766		-0.0057		
		0.0532			
55	0.8192				

Rešenje:

Formiramo tablicu konačnih razlika.

u poslednje kolone možemo da zapisujemo samo značajne cifre (kako bi izbegli pisanje nula.

Koliko je kolona potrebno računati?

Zaustavljamo se kada je

$$|\Delta^n y| \leq 2^n$$

Formiraćemo posebne polinome za svaku tačku.

X = 18 (x se nalazi između prva dva čvora naše tablice => koristimo I Njutnov int.polinom)

$$p_3^I(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$p_3^I(x) = 0.2588 + q \cdot 0.0832 + \frac{q(q-1)}{2!}(-0.0026) + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}(-0.0006)$$

$$h = 5 \quad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{18 - 15}{5} = 0.6$$

$$p_3^I(x) = 0.2588 + 0.6 \cdot 0.0832 + \frac{0.6 \cdot (-0.4)}{2!}(-0.0026) + \frac{0.6 \cdot (-0.4) \cdot (-1.4)}{3!}(-0.0006)$$

$$p_3^I(18) = 0.3090$$

X = 53 (x se nalazi između poslednja dva čvora naše tablice => koristimo II Njutnov int.polinom)

$$p_3^{II}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$p_3^{II}(x) = 0.8192 + q \cdot 0.0532 + \frac{q(q+1)}{2!}(-0.0057) + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}(-0.0003)$$

$$h = 5 \quad q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{53 - 55}{5} = -0.4$$

$$p_3^{II}(x) = 0.8192 - 0.4 \cdot 0.0532 + \frac{0.6 \cdot (-0.4)}{2!}(-0.0057) + \frac{0.6 \cdot (-0.4) \cdot (1.6)}{3!}(-0.0003)$$

$$p_3^{II}(53) = 0.7986$$

X = 12 (ekstrapolacija, koristimo I Njutnov int.polinom obzirom da je $12 < 15$)

$$q = \frac{12 - 15}{5} = -0.6 \quad p_3^I(12) = \dots = 0.2079$$

Ostalo je da ocenimo grešku:

$$|R_3(x)| \leq \frac{\Delta^{n+1}y}{4!} |q(q+1)(q+2)(q+3)|$$

$$x = 18 \Rightarrow R_3(18) \leq \frac{(0+2^4) \cdot 10^{-4}}{4!} (0.6 \cdot 0.4 \cdot 1.4 \cdot 2.4) = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$x = 53 \Rightarrow R_3(53) \leq \frac{(2+2^4) \cdot 10^{-4}}{4!} (0.4 \cdot 0.6 \cdot 1.6 \cdot 2.6) = 8 \cdot 10^{-5}$$

Kod ocene greške za $x = 18$ imamo izraz $(0+2^4) \cdot 10^{-4}$ koji se dobija na sledeći način:

$$(0+2^4) \cdot 10^{-4} = (\Delta^4 y_0 + \text{greška pri izračunavanju kon.razlika}) \cdot (\text{broj decimala})$$

Grešku ne proveravamo za ekstrapolaciju.

Нумеричко диференцирање

Примјер : Одредити координате тачке екстремума функције задате табелом :

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.000	0.848	0.824	0.976	1.352	2.000

Решење:

x_i	$f(x_i)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0,000	1,000	-0,152			
0,200	0,848	-0,024	0,128	0,048	
0,400	0,824	0,152	0,176	0,048	0,000
0,600	0,976	0,376	0,224	0,048	0,000
0,800	1,352	0,648	0,272		
1,000	2,000				

Прво формирамо таблицу коначних разлика. Затим одређујемо у ком интервалу се налази тачка екстремума. На основу промјене знака коначних разлика првог реда закључујемо да се екстремум налази у околини тачке 0.4. Од интервала (0.2;0.4) и (0.4;0.6) бирамо (0.2;0.4) јер је апсолутна вриједност разлике првог реда ту мања него у (0.4;0.6). Обзиром на позицију ближе почетку табеле користимо први Њутнов интерполациони полином.

$$L_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\cdots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0. \quad \text{Овдје је } x_0 = 0.2, \quad h = 0.2, \quad x = x_0 + qh \Rightarrow q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2}$$

$$L_2(x) = 0,848 - 0,024q + 0,176 \frac{q(q-1)}{2!}$$

$$f'(x) \approx L'_2(x) = \frac{d}{dq}(L_2) \frac{dq}{dx} = \left(-0,024 + 0,176 \frac{2q-1}{2!} \right) \cdot \frac{1}{0,2}$$

$$L'_2(x) = 0 \Rightarrow -0,024 + 0,176 \frac{2q-1}{2!} = 0 \Rightarrow q = 0,63636$$

$$x = x_0 + qh \Rightarrow x = 0,2 + 0,63636 \cdot 0,2 = 0,32727;$$

$$f(0,32727) \approx L_n(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 f_0.$$

$$f(0,32727) \approx 0,848 - 0,63636 \cdot 0,024 + \frac{0,63636 \cdot (-0,36364)}{2} 0,176 + \frac{0,63636 \cdot (-0,36364) \cdot (-1,36364)}{6} 0,048 = 0,81489$$

Тачка екстремума је (0,32727;0,81489)