Вјежбе (недјеља бр. 7) ①

Линеарна хомогена ДЈ другог реда са константним коефицијентима

$$y'' + ay' + by = 0 \quad , a,b \in R$$

Формирамо карактеристичну ј-ну.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Нађемо коријене дате карактеристичне ј-не, λ_1 и λ_2.

① $\lambda_1, \lambda_2 \in R \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

② $\lambda_1, \lambda_2 \in R \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} \cdot x = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

③ $\lambda_1, \lambda_2 \in C \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 = \alpha + i\gamma$

$\lambda_2 = \alpha - i\gamma$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \gamma x + c_2 \cdot \sin \gamma x)$$

① Ријешити ДЈ.

$$y'' - 4y = 0$$

Формирајмо карактеристичну ј-ну.

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 2 ; \lambda_2 = -2$. (реална и различита рјешења).

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

② $y'' - 3y' + 2y = 0$

Карактеристична ј-на:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$\lambda_1 = 2 ; \lambda_2 = 1$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

(2)

(3) $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Карактеристична ј-на:

$\lambda^2+4\lambda+4=0$

$(\lambda+2)^2=0$

$\lambda=-2$ (двострука реална нула)

$$\boxed{y=C_1e^{-2x}+C_2\cdot e^{-2x}\cdot x}$$

$y'=-2C_1e^{-2x}+C_2(e^{-2x}+x\cdot(-2)e^{-2x})$

Искористимо почетне услове:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y(0)=C_1\cdot 1=1 \\ y'(0)=-2C_1+C_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1=1 \\ C_2=2 \end{array}$$

Рјешење:

$y=e^{-2x}+2e^{-2x}\cdot x=e^{-2x}(1+2x)$

(4) $y''+4y=0$

Карактеристична ј-на:

$\lambda^2+4=0$

$\lambda^2=-4$

$\lambda_{1,2}=\pm 2i$

$\lambda_1=2\cdot i=0+2i$

$\lambda_2=-2i=0-2i$.

Одавде $\alpha=0$, $\beta=2$, па:

$y=e^{0x}(C_1\cdot\cos 2x+C_2\sin 2x)=C_1\cos 2x+C_2\cdot\sin 2x$

(5) $y''+2y'+2y=0$

Карактеристична ј-на:

$\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-\dfrac{2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

$\lambda_1=-1+i$

$\lambda_2=-1-i$. Даље $\alpha=-1$, $\beta=1$, па: $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

Линеарна хомогена ДЈ вишег реда са константним коефицијентима

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_n\cdot y=0, \quad a_i\in R, i=\overline{1,n}$$

Формирајмо карактеристичну ј-ну:

$$\lambda^n+a_1\cdot\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

1) Нека је $\lambda\in R$ корјен карактеристичне ј-не реда 1 (једнострuко рјешење). Овом корјену одговара рјешење $y=e^{\lambda x}$.

2) Нека је $\lambda\in C$ рјешење карактеристичне ј-не реда 1. Комплексна рјешења се јављају у паровима, тј. $\lambda=\alpha\pm i\beta$. Овом λ одговарају рјешења $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

3) Нека је $\lambda\in R$ рјешење карактеристичне ј-не реда k (вишеструкости k). Овом λ одговарају рјешења:

$$e^{\lambda x},\ x\cdot e^{\lambda x},\ \ldots\ x^{k-1}e^{\lambda x}$$

4) Нека је $\lambda\in C$ рјешење карактеристичне ј-не реда k. Комплексна рјешења се јављају у паровима, тј $\lambda=\alpha\pm i\beta$. Овом λ одговарају рјешења:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad e^{\alpha x}\sin x$$
$$x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x \quad x\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$$
$$\vdots$$
$$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

1. Наћи опште рјешење:

$$y'''-3y''+4y'-2y=0$$

Rj: Карактеристична ј-на:

$$\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$$

Означимо полином са $P(\lambda)$.

$P(1)=0 \Rightarrow P(\lambda)$ дјељив са $\lambda-1$.

$$(\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2):(\lambda-1)=\lambda^2-2\lambda+2$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\lambda^3 \underset{+}{-} \lambda^2} \\ \quad -2\lambda^2+4\lambda-2 \\ \quad \underline{\underset{+}{-}2\lambda^2 \underset{-}{+} 2\lambda} \\ \qquad 2\lambda-2 \\ \qquad \underline{\underset{-}{}2\lambda \underset{+}{-} 2} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

Дакле, $(\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2)=(\lambda-1)\cdot(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i))$

Рјешења карактеристичне ј-не су: $\lambda_1=1$, $\underbrace{\lambda_2=1+i,\ \lambda_3=1-i}_{\text{коњуговано-комплексна}}$

Рјешењу $\lambda_1=1$ одговара: $e^{\lambda_1 x}=e^x$

Рјешењима: $1\pm i$ одговарају: $e^{1\cdot x}(\cos x)$, $e^x\cdot\sin x$

Опште рјешење:

$$y=C_1e^x+C_2e^x\cos x+C_3\sin x\cdot e^x$$
$$=\underline{(C_1+C_2\cos x+C_3\sin x)e^x}$$

2) $y'''-6y''+11y'-6y=0$

Карактеристична ј-на: $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$.

$$(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6):(\lambda-1)=\lambda^2-5\lambda+6$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\lambda^3 \underset{+}{-} \lambda^2} \\ \quad -5\lambda^2+11\lambda-6 \\ \quad \underline{\underset{+}{-}5\lambda^2 \underset{-}{+} 5\lambda} \\ \qquad 6\lambda-6 \\ \qquad \underline{\underset{-}{}6\lambda \underset{+}{-} 6} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Рјешења карактеристичне ј-не су: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

Опште рјешење: $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cdot e^{3x}$

③ $y^{(5)}-2y^{(4)}+y'''=0$

Карактеристична ј-на:

$\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3=0$

$\lambda^3(\lambda^2-2\lambda+1)=0$

$\lambda^3=0$; $\lambda^2-2\lambda+1=0$

$\lambda=0$ $(\lambda-1)^2=0$

(вишеструкости 3) $\lambda=1$ (вишеструкости 2)

Рјешења су реална и вишеструка.

$\lambda_1=0$; $\lambda_2=1$

$(r_1=3)$ $(r_2=2)$

Опште рјешење:

$y=c_1e^{0x}+c_2e^{0x}\cdot x+c_3\cdot e^{0x}\cdot x^2+c_4\cdot e^x+c_5\cdot e^x\cdot x$

$=\underline{c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^x+c_5\cdot e^x\cdot x}$

④ $y^{(4)}+2y''+y=0$

$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$(\lambda^2+1)^2=0$

$\lambda^2=-1$

$\lambda=\pm i$ (вишеструкости 2).

$\lambda=0\pm i$ $(\alpha=0, \beta=1)$.

Опште рјешење:

$y=e^{0\cdot x}\cdot(c_1\cos x+c_2\sin x)+e^{0x}\cdot x\cdot c_3\cos x+e^{0x}\cdot x\cdot c_4\cdot\sin x$

$=\underline{c_1\cdot\cos x+c_2\sin x+x(c_3\cos x+c_4\sin x)}$

5. $y^{(5)} = 0$

$P(\lambda) = \lambda^5 = 0$

$\lambda = 0$ (вишеструкости 5)

Опште рјешење:

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 \cdot x e^{0x} + c_3 \cdot x^2 \cdot e^{0x} + c_4 x^3 \cdot e^{0x} + c_5 \cdot e^{0x} \cdot x^4$$

$$= \underbrace{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4}$$

6. $y^{(IV)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 + \lambda + 1) + \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) + (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0$ (*) Може се користити и Безуова теорема за растављање полинома.

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\underbrace{\alpha = -\frac{1}{2},\ \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Опште рјешење:

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \cdot x e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$\underbrace{\text{домаћи}}$

$y^{(V)} - 8y^{(IV)} + 26y''' - 40y'' + 25y' = 0$

$y^{(V)} - 10y''' + 9y' = 0$