Вјежбе (недјеља бр. 8)

Линеарна нехомогена диференцијална једначина вишег реда

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x)$$

Рјешење: $y = y_h + y_p$ (хомогено + партикуларно)

1° Ако је $b(x) = P_m(x) \cdot e^{\lambda x}$ партикуларно рјешење тражимо у облику: $y_p = x^s \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}$, гдје је s вишеструкост броја λ као коријена $P(\lambda)$.

2° Ако је $b(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_{m_1}(x) \cos \beta x + P_{m_2}(x) \sin \beta x)$ партикуларно рјешење тражимо у облику: $y_p = x^s \cdot e^{\alpha x} (P_m(x) \cdot \cos \beta x + R_m(x) \cdot \sin \beta x)$, гдје је $m = \max\{m_1, m_2\}$, s - вишеструкост $\alpha + \beta i$ као коријена $P(\lambda)$.

$P(\lambda)$ - карактеристични полином хомогене једначине, тј:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

P, Q, R су полиноми одговарајућих степена.

(1) $y''' - y'' = x \cdot e^x$

Рјешење:

Ријешимо прво хомогену једначину:

$$y''' - y'' = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 0 \; ; \; \lambda = 1$$

$\lambda_1 = 0$ $(s_1 = 2)$

$\lambda_2 = 1$ $(s_1 = 1)$

$$y_h = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot x + C_3 \cdot e^x = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot e^x$$

$b(x) = x \cdot e^x = P_1(x) \cdot e^{1 \cdot x}$

Да ли је 1 рјешење карактеристичне ј-не?

Јесте. Једноструко.

$y_p = x^1 \cdot Q_1(x) e^{1 \cdot x} = x \cdot (ax+b) \cdot e^x = (ax^2+bx) \cdot e^x$

Уврстимо y_p у Д.Ј.

$y_p''' - y_p'' = x \cdot e^x$

Нађимо y_p'', y_p'''.

$y_p' = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx) \cdot e^x = e^x(ax^2+2ax+bx+b)$

$y_p'' = e^x(ax^2+2ax+bx+b) + e^x(2ax+2a+b) =$

$= e^x(ax^2+4ax+bx+2b+2a)$

$y_p''' = e^x(ax^2+4ax+bx+2b+2a) + e^x(2ax+4a+b)$

$= e^x(ax^2+6ax+bx+3b+6a)$

Сада, $\cancel{e^x}(ax^2+6ax+bx+3b+6a) - \cancel{e^x}(ax^2+4ax+bx+2b+2a) = x \cdot \cancel{e^x}$

$\cancel{ax^2}+6ax+\cancel{bx}+3b+6a - \cancel{ax^2}-4ax-\cancel{bx}-2b-2a = x$

$2ax + b + 4a = x$

$2a \cdot x + (4a+b) = x$

Одавде, $\left.\begin{array}{l} 2a = 1 \\ 4a+b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -4a = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2 \end{array}$

$y_p = (\frac{1}{2}x^2 - 2x) \cdot e^x$

$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + (\frac{1}{2}x^2 - 2x)e^x$

2) $y''' + y' = x^4$

$y''' + y' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2+1) = 0$

$\lambda = 0; \ \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0 \pm 1 \cdot i$

$(s_1 = 1)$ $\quad \alpha = 0; \beta = 1$

$(s_2 = 1)$

$$y_h = C_1 \cdot e^{0x} + e^{0x} \cdot (C_2 \cos x + C_3 \sin x) =$$

$$= C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

$b(x) = x^4 = P_4(x) \cdot e^{0 \cdot x}$

Да ли је 0 рјешење карактеристичне ј-не?

Јесте. Једнострукo.

$$y_p = e^{0 \cdot x} \cdot x^1 \cdot Q_4(x) = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) =$$

$$= (a_0 x + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5)$$

y_p задовољава ј-ну. из ДЈ, па:

$$y_p''' + y_p' = x^4$$

$$y_p' = a_0 + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + 5a_4 x^4$$

$$y_p'' = 6a_2 x + 12 a_3 x^2 + 20 a_4 x^3$$

$$y_p''' = 6a_2 + 24 a_3 x + 60 a_4 x^2$$

Уврстимо:

$$6a_2 + 24a_3 x + 60a_4 \cdot x^2 + a_0 + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + 5a_4 x^4 = x^4$$

$$a_0 + 6a_2 + (24a_3)x + (60a_4 + 3a_2)x^2 + 4a_3 x^3 + 5a_4 x^4 = x^4$$

Одавде,

$$5a_4 = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{5}$$

$$4a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$60a_4 + 3a_2 = 0 \Rightarrow 3a_2 = -12$$

$$a_2 = -4$$

$$a_0 + 6a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 24$$

$$24a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$y_p = \left(24x - 4x^3 + \frac{1}{5}x^5\right) = \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x$$

$y = y_h + y_p = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x$

③ $y'' - y = x^2+1$

$b(x) = x^2+1.$

Ријешимо хомогену ДЈ.

$y'' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

$\lambda = 1;\ \lambda = -1$

Рјешења: $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1$

$\boxed{y_h = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}}$

$b(x) = x^2+1 = e^{0\cdot x} \cdot P_2(x)$

Да ли је 0 рјешење карактер. ј-не?

Није. $(s=0)$

$y_p = e^{0\cdot x} \cdot Q_2(x) = e^{0\cdot x}(ax^2+bx+c) = ax^2+bx+c.$

$y_p'' - y_p = x^2+1$

$y_p' = 2ax+b$

$y_p'' = 2a$

Сада,

$2a - (ax^2+bx+c) = x^2+1$

$-ax^2 - bx + 2a - c = x^2+1$

$$\left.\begin{matrix} -a=1 \\ -b=0 \\ 2a-c=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=-1 \\ b=0 \\ -2-c=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a=-1 \\ b=0 \\ c=-3 \end{matrix}$$

$\boxed{y_p = -x^2 - 3}$

$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 \cdot e^{-x} - x^2 - 3$

(4) $y'' + y = \sin x$

Рјешење:

$y'' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i \quad (\alpha = 0;\ \beta = 1)$

$$y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) =$$
$$= \underline{C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

$$b(x) = \sin x = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x) = e^{0 \cdot x}(P_0(x) \cos x + Q_0(x) \cdot \sin x)$$

$\alpha = 0;\ \beta = 1 \quad , m = \max\{0, 0\} = 0$

Да ли је $0 \pm 1 \cdot i$ рјешење карактеристичне ј-не?

Јесте.

$$y_p = x^1 \cdot e^{0x}(R_0(x) \cos x + S_0 \sin x) =$$
$$x \cdot (a \cos x + b \sin x)$$

$$y_p'' + y_p = \sin x$$

$$y_p' = a \cos x + b \sin x + x(-a \sin x + b \cos x)$$
$$y_p'' = -a \sin x + b \cos x + (-a \sin x + b \cos x) + x(-a \cos x - b \sin x)$$
$$= -2a \sin x + 2b \cos x - xa \cos x - xb \sin x.$$

Сада,

$$-2a \sin x + 2b \cos x - \cancel{xa \cos x} - \cancel{xb \sin x} + \cancel{xa \cos x} + \cancel{xb \sin x} = \sin x$$

$$-2a \sin x + 2b \cos x = \sin x$$

$$(-2a - 1)\sin x + 2b \cdot \cos x = 0.$$

Одавде,

$$\begin{aligned} -2a - 1 &= 0 \\ 2b &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -\tfrac{1}{2} \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$y_p = x\left(-\tfrac{1}{2} \cos x + 0 \cdot \sin x\right) = -\frac{x}{2} \cos x$$

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \tfrac{1}{2} x \cos x$$

⑤ $y''-2y'+y=e^x+\sin^2 x$

Рјешење:

$y''-2y'+y=0$

$P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$

$\lambda=1\ (s=2)$

$y_h=C_1e^x+C_2x\cdot e^x$

$b(x)=e^x+\sin^2 x=e^x+\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\underset{b_1}{\underset{\parallel}{e^x}}+\underset{b_2}{\underset{\parallel}{\frac{1}{2}}}-\underset{b_3}{\underset{\parallel}{\frac{1}{2}\cos 2x}}$

Ријешимо прво ДЈ:

$y''-2y'+y=e^x=e^{1\cdot x}\cdot 1=e^{1\cdot x}P_0(x)$.

Да ли је 1 рјешење карактеристичне ј-не?

Јесте (двоструко, тј $s=2$).

$y_{p1}=e^{1\cdot x}\cdot x^2\cdot Q_0(x)=x^2e^x\cdot a$

$y_{p1}''-2y_{p1}'+y_{p1}=e^x$

$y_{p1}'=a(2xe^x+x^2e^x)$

$y_{p1}''=a(2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x)=a(x^2e^x+4xe^x+2e^x)$.

Одавде,

$a(x^2e^x+4xe^x+2e^x)-2a(2xe^x+x^2e^x)+ax^2e^x=e^x$

$\cancel{ax^2e^x}+\cancel{4axe^x}+2ae^x-\cancel{4axe^x}-\cancel{2ax^2e^x}+\cancel{ax^2e^x}=e^x \quad /:e^x$

$2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

$y_{p1}=\frac{1}{2}x^2e^x$

Ријешимо сада:

$y''-2y'+y=\frac{1}{2}$

Дакле, $y_{p3} = \frac{2}{25}\sin 2x + \frac{3}{50}\cos 2x$

Рјешење:

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} =$$
$$c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x + \frac{1}{2} + \frac{2}{25}\sin 2x + \frac{3}{50}\cos 2x$$

⑥ $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x+1)\cdot e^x$

$y'' + 2y' - 3y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 1$

$\underline{y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x}$

$$b(x) = \underbrace{2x\cdot e^{-3x}}_{b_1(x)} + \underbrace{(x+1)e^x}_{b_2(x)}$$

$b_1(x) = 2xe^{-3x} = P_1(x)e^{-3x}$

Да ли је -3 рјешење карактер. ј-не?

Јесте ($s_1 = 1$).

$y_{p1} = e^{-3x}\cdot x^1\cdot Q_1(x) = e^{-3x}x(ax+b) = \underline{e^{-3x}(ax^2+bx)}$

~~Да ли~~ је

$b_2(x) = (x+1)e^x = P_1'(x)\cdot e^{1\cdot x}$

Да ли је 1 рјешење карактер. ј-не?

Јесте ($s_2 = 1$).

$y_{p2} = e^{1\cdot x}\cdot x^1\cdot Q_1'(x) = e^x\cdot x(cx+d) = e^x(cx^2+dx)$

Нађимо оба партикуларна рјешења.

$b_2(x) = \frac{1}{2} = e^{0x} \cdot P_0(x)$

Да ли је 0 рјешење карактеристичне ј-не?

Не. $(s=0)$.

$y_{p2} = e^{0x} \cdot x^0 \cdot Q_0(x) = b$

$y_{p2}' = 0$

$y_{p2}'' = 0$

Сада:

$\underline{b = \frac{1}{2}}$

Ријешимо:

$y'' - 2y' + y = -\frac{1}{2}\cos 2x = b_3$

$-\frac{1}{2}\cos 2x = b_3 = e^{0x}(\overset{P_0}{0} \cdot \sin 2x + (\overset{Q_0}{-\frac{1}{2}})\cos 2x)$

Да ли је $0 + i \cdot 2$ рјешење карактеристичне ј-не?

Није. $(s=0)$. $\max\{0, 0\} = 0$

$y_{p3} = e^{0 \cdot x} \cdot x^0 \cdot (R_0(x)\sin 2x + S_0(x) \cdot \cos 2x) =$

$= (c \sin 2x + d \cos 2x)$

$y_{p3}' = 2c\cos 2x - 2d\sin 2x$

$y_{p3}'' = -4c\sin 2x - 4d\cos 2x$

$y_{p3}'' - 2y_{p3}' + y_{p3} = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$-4c\sin 2x - 4d\cos 2x - 4c\cos 2x + 4d\sin 2x + c\sin 2x + d\cos 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin 2x(-4c + 4d + c) + \cos 2x(-4d - 4c + d + \frac{1}{2}) = 0$

Одавде,

$4d - 3c = 0 \quad | \cdot 3$

$-3d - 4c = -\frac{1}{2} \quad | \cdot 4$

$\Longrightarrow -9c - 16c = -2$

$c = \frac{2}{25}$

$4d = 3 \cdot \frac{2}{25} = \frac{6}{25}$

$d = \frac{6}{25 \cdot 4} = \frac{3}{25 \cdot 2} = \frac{3}{50}$

$$y_{p1}'' + 2y_{p1}' - 3y_{p1} = 2xe^{-3x}$$

$$y_{p1}' = -3e^{-3x}(ax^2+bx) + e^{-3x}(2ax+b)$$
$$= e^{-3x}(-3ax^2-3bx+2ax+b)$$

$$y_{p1}'' = -3e^{-3x}(-3ax^2-3bx+2ax+b) + e^{-3x}(-6ax-3b+2a)$$
$$= e^{-3x}(9ax^2+9bx-6ax-3b-6ax-3b+2a)$$
$$= e^{-3x}(9ax^2+9bx-12ax-6b+2a)$$

Сада,

$$e^{-3x}(9ax^2+9bx-12ax-6b+2a) + e^{-3x}(-6ax^2-6bx+4ax+2b)$$
$$+e^{-3x}(-3ax^2-3bx) = 2xe^{-3x} \quad /: e^{-3x}$$

$$\cancel{9ax^2}+\cancel{9bx}-12ax-6b+2a-\cancel{6ax^2}-\cancel{6bx}+4ax+2b-\cancel{3ax^2}-\cancel{3bx}=2x$$
$$-8ax-4b+2a=2\cdot x$$
$$\left.\begin{array}{l} -8a=2 \\ -4b+2a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-\frac{1}{4} \\ -4b-\frac{1}{2}=0 \ ; \ -4b=\frac{1}{2} \ ; \ b=-\frac{1}{8} \end{array}$$

$$\underline{y_{p1} = e^{-3x}\left(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x\right)}$$

Наћи y_{p2} (домаћи)

Решење: $y = y_h + y_{p1} + y_{p2}$