

Svi zadaci iz ove lekcije (18 zadataka) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

2.2 Slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa

U odeljku 2.1 smo razmatrali slučajne promenljive diskretnog tipa kod kojih je skup vrednosti, $\mathcal{R}_X$, najviše prebrojiv. Skup vrednosti slučajne promenljive neprekidnog tipa, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, je neprebrojiv, tj. ona može uzimati vrednosti iz nekog intervala ili iz celog skupa realnih brojeva.

Funkcija gustine, φ_X , slučajne promenljive neprekidnog tipa je nenegativna realna funkcija sa sledećim osobinama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x) dx = P(-\infty < X < \infty) = 1, \quad (2.9)$$

$$P(X = a) = 0, \text{ za } a \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

za sve $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ važi da je

$$P(a < X < b) = \int_a^b \varphi_X(x) dx. \quad (2.11)$$

Važi i sledeće

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \int_a^b \varphi_X(x) dx. \quad (2.12)$$

Funkcija raspodele F_X neprekidne slučajne promenljive X je za svako $x \in \mathbb{R}$ data sa

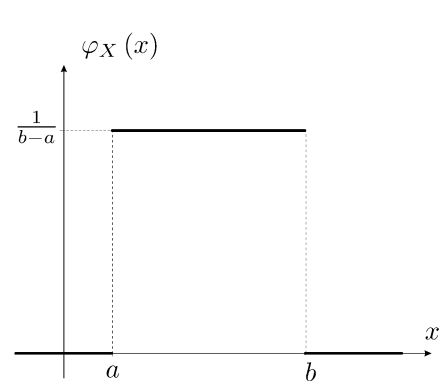
$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt, \quad (2.13)$$

i u tačkama neprekidnosti važi

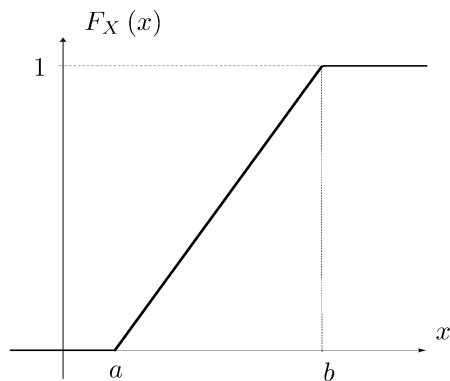
$$\varphi_X(x) = F'_X(x). \quad (2.14)$$

Slučajna promenljiva sa **uniformnom** $\mathcal{U}(a, b)$ raspodelom, gde su $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b); \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (2.15)$$



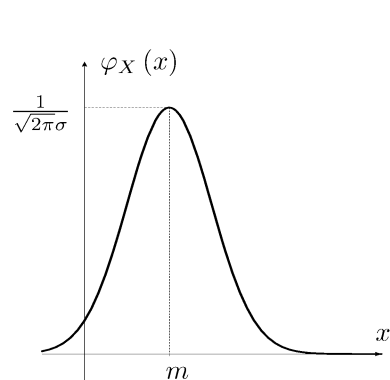
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(a, b)$.



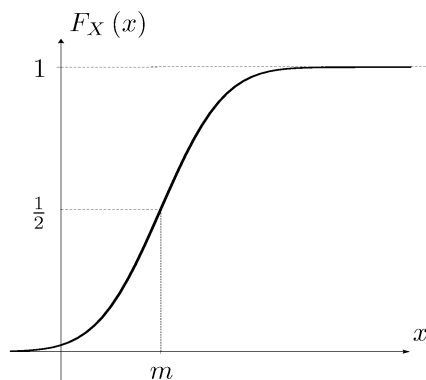
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{U}(a, b)$.

Slučajna promenljiva sa **normalnom** (Gausovom) $\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodelom, gde su $m, \sigma \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Napomena: **Standardizovana (normalizovana)** slučajna promenljiva X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom:²

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}; \quad (2.16)$$

ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ tada slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu, tj. ako

²transformacije slučajnih promenljivih, matematičko očekivanje $E(X)$ i disperzija $D(X)$ definisani su u poglavlju V

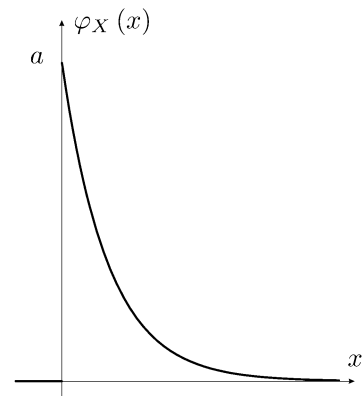
$$X : \mathcal{N}(m, \sigma) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X - m}{\sigma} : \mathcal{N}(0, 1); \quad (2.17)$$

na osnovu Moavr-Laplasove teoreme možemo zaključiti da raspodela standardizovane binomne slučajne promenljive X^* može biti aproksimirana normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, 1)$, tj. ako

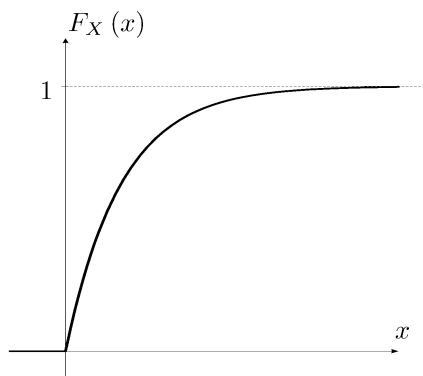
$$X : \mathcal{B}(n, p) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.18)$$

Slučajna promenljiva sa **eksponencijalnom** $\mathcal{E}(a)$ raspodelom, gde je $a > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$



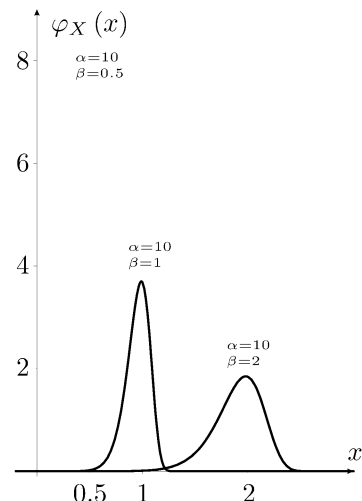
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(a)$.



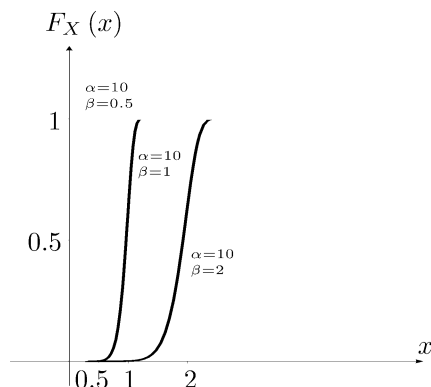
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{E}(a)$.

Slučajna promenljiva sa **Vejbulovom** $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ raspodelom, sa parametrima $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

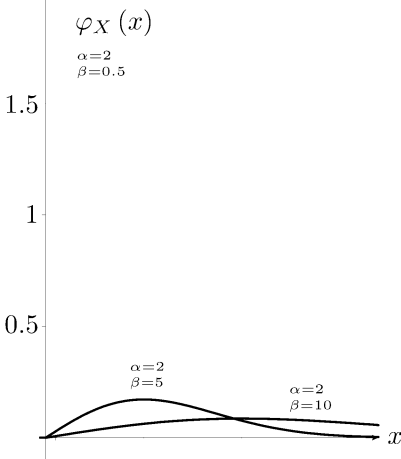
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.20)$$



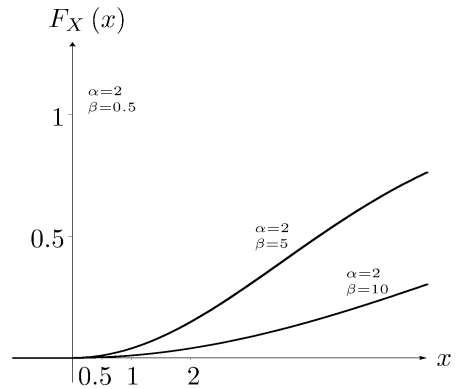
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{V}(\alpha, \beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{V}(\alpha, \beta)$.



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{V}(\alpha, \beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{V}(\alpha, \beta)$.

[99] *Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

- Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodele $F_X(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.*
- Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?*
- Izračunati verovatnoće $P(X \leq 1)$, $P(X > 1.5)$ i $P(X = 1)$.*
- Grafički predstaviti funkciju gustine φ_X i funkciju raspodele F_X .*

Rešenje:

- Direktnom primenom formule (2.13), dobija se

$$F_X(1.2) = \int_{-\infty}^{1.2} \varphi_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{1.2} \frac{1}{2}x dx = 0 + \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^{1.2} = 0.36.$$

$$\text{Analogno sledi } F_X(-1) = \int_{-\infty}^{-1} \varphi_X(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx = 0,$$

$$\text{kao i } F_X(3.5) = \int_{-\infty}^{3.5} \varphi_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x dx = 1.$$

Za pronalaženje funkcije raspodele, razmotrićemo sledeća tri slučaja:

- Za $x \leq 0$, važi da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

ii) Za fiksirano x iz intervala $(0, 2]$, tj. ako je $0 < x \leq 2$, dobija se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{2} t dt = 0 + \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^x = \frac{1}{4} x^2$$

iii) Ako je $x > 2$, dobijamo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^2 \frac{1}{2} t dt + \int_2^x 0 dt = 0 + \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^2 + 0 = 1.$$

Konačno, iz i), ii) i iii) dobija se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4} x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(b) Verovatnoća događaja da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena je verovatnoća da slučajna promenljiva X uzima vrednosti između 1 i 1.5. Na osnovu (2.12) dobija se

$$P(1 \leq X \leq 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

Primerimo da isti rezultat možemo dobiti i pomoću funkcije raspodele F_X određene pod (a), tj.

$$P(1 \leq X \leq 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

(c) Na osnovu (2.12), dobija se

$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^1 \varphi_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = 0 + \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

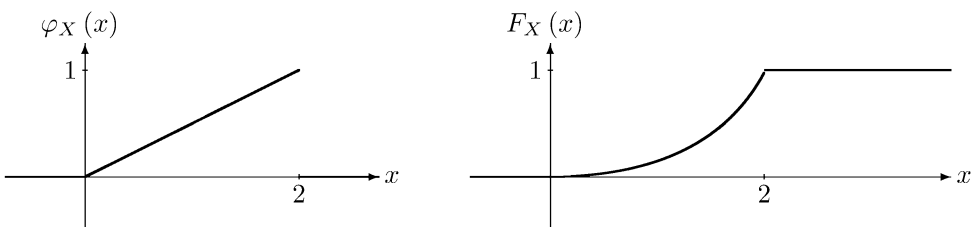
Traženu verovatnoću možemo izračunati i ovako: $P(X \leq 1) = P(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}$.

Slično, $P(X > 1.5) = \int_{1.5}^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_{1.5}^2 = 1 - 0.5625 = 0.4375$ ili pomoću funkcije

raspodele $P(X > 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - \frac{1.5^2}{4} = 0.4375$.

Na osnovu osobine gustine (2.10), koja je zadovoljena za svaki realan broj a , dobija se da je $P(X = 1) = 0$.

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:



[100] *Profesor nikada ne završi čas pre zvona, ali završi u toku prve minute nakon zvona. Neka X predstavlja vreme (izraženo u minutima) koje prođe od zvona do završetka predavanja. Gustina za X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- (a) *Odrediti konstantu k .*
- (b) *Naći funkciju raspodele za X .*
- (c) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen najduže pola minute?*
- (d) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen više od 40 sekundi?*

Rešenje:

(a) Konstantu k određujemo tako da bude zadovoljena osobina (2.9). Prema tome,

$$\int_0^1 kx^2 dx = k \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{k}{3} = 1,$$

a odavde sledi da je tražena konstanta $k = 3$.

(b) Za fiksirano x , $x \leq 0$ funkcija raspodele je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$. Neka je $x \in (0, 1]$. Tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \int_0^x 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^x = x^3$. Ako je $x > 1$ dobija se $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1$. Dakle, funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(c) Verovatnoća događaja da će čas biti produžen najduže pola minute je verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost manju ili jednaku 0.5. Dakle,

$$P(X \leq 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} \varphi_X(x) dx = \int_0^{0.5} 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0.5} = 0.125.$$

Do istog rezultata dolazimo i ako iskoristimo rešenje pod (b), odnosno

$$P(X \leq 0.5) = P(X < 0.5) = F_X(0.5) = 0.5^3 = 0.125.$$

(d) Događaj da je čas produžen više od 40 sekundi podrazumeva da slučajna promenljiva X uzme vrednost strogo veću od $\frac{2}{3}$. Njegova verovatnoća je

$$P(X > 2/3) = \int_{2/3}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_{2/3}^1 = 1 - (2/3)^3 = 0.7037.$$

Primitimo da pomoću funkcije raspodele dolazimo do istog rezultata $P(X > 2/3) = 1 - P(X \leq 2/3) = 1 - F_X(2/3) = 1 - (2/3)^3 = 0.7037$.

[101] Slučajna promenljiva X data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} k(1 - (x - 3)^2), & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odrediti konstantu k i skicirati grafik funkcije φ_X .

(b) Izračunati $P(2.5 < X < 3)$ i $P(X > 3)$.

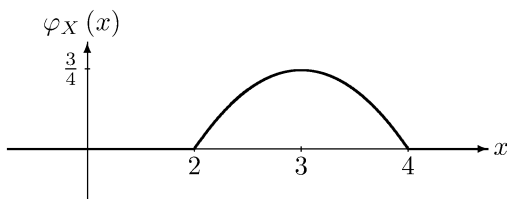
(c) Odrediti funkciju raspodele F_X i skicirati njen grafik.

Rešenje:

(a) Konstanta k se određuje iz uslova (2.9). Kako je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x) dx &= \int_2^4 k(1 - (x - 3)^2) dx = k \int_2^4 (-8 + 6x - x^2) dx = \\ &= k \left(-8x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{4}{3}k, \end{aligned}$$

iz uslova dobijamo da je tražena konstanta $k = \frac{3}{4}$. Grafik funkcije gustine φ_X je



(b) Slično kao u prethodnom zadatku možemo dobiti tražene verovatnoće

$$\begin{aligned} P(2.5 < X < 3) &= \int_{2.5}^3 \frac{3}{4}(1 - (x - 3)^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{smena} \quad x - 3 = t, \\ \quad \quad \quad dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{-0.5}^0 \frac{3}{4}(1 - t^2) dt = \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^3 \right) \Big|_{-0.5}^0 = 0.34375. \end{aligned}$$

Dalje, $P(X > 3) = \int_3^4 \frac{3}{4}(1 - (x - 3)^2) dx$. Integral sa desne strane jednakosti može se rešiti uvođenjem smene $x - 3 = t$ i njegovim izračunavanjem dobijamo da je tražena verovatnoća 0.5.

(c) Za $x \leq 2$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$,

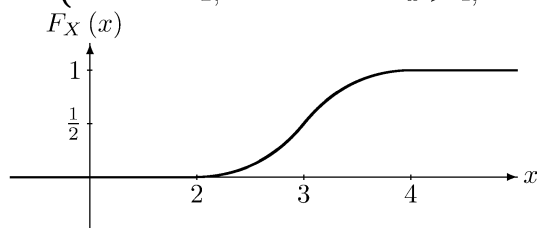
a za $x > 4$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^4 \frac{3}{4}(1 - (t - 3)^2) dt + \int_4^x 0 dt = 1$.

Posmatrajmo $x \in (2, 4]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \int_{-\infty}^2 0 dt + \frac{3}{4} \int_2^x (-8 + 6t - t^2) dt = \\ &= \frac{3}{4} \left(-8t + 3t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_2^x = \frac{3}{4} \left(\frac{20}{3} - 8x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \end{aligned}$$

Dakle, funkcija raspodele i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ -\frac{x^3}{4} + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$



[102] Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata” autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \leq x \leq 10, \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

- Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta?
- Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” između 3 i 8 minuta?
- Naći funkciju raspodele F_X .
- Grafički predstaviti funkcije φ_X i F_X , a zatim obeležiti $P(X < 6)$.

Rešenje:

- (a) Verovatnoća događaja da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta je

$$P(X > 6) = \int_6^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x \right) dx = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2 \right) \Big|_6^{10} = 0.32.$$

- (b) Uočimo da je gustina različito definisana na intervalima $[0, 5]$ i $[5, 10]$, a zatim slično kao pod (a), dobijamo da je tražena verovatnoća

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 8) &= \int_3^8 \varphi_X(x) dx = \int_3^5 \frac{1}{25}x dx + \int_5^8 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{50} \Big|_3^5 + \left(\frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50} \right) \Big|_5^8 = 0.74 \end{aligned}$$

(c) Za $x \leq 0$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

Ako je $x > 10$ tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^5 \frac{1}{25} t dt + \int_5^{10} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25} t) dt + \int_{10}^x 0 dt = 1$.

Za $x \in (0, 5]$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{25} t dt = \frac{x^2}{50}$.

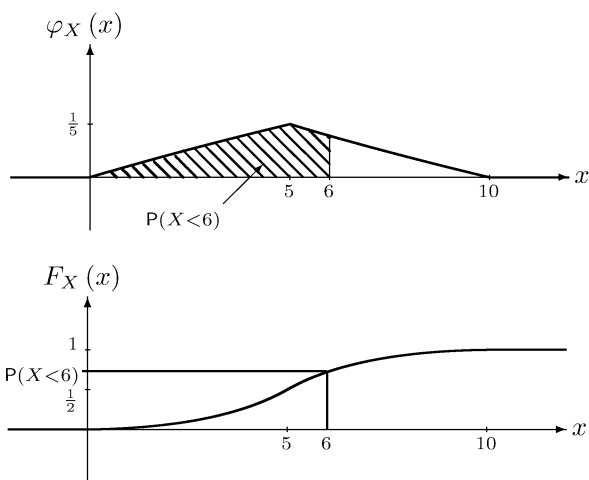
Ako je $x \in (5, 10]$ tada je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^5 \frac{1}{25} t dt + \int_5^x (\frac{2}{5} - \frac{1}{25} t) dt = \\ = \frac{t^2}{50} \Big|_0^5 + \left(\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{50} \right) \Big|_5^x = -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2.$$

Dakle, funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{50}, & 0 < x \leq 5, \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & 5 < x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:



[103] *Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom raspodele*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln \frac{4}{x}), & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

(a) *Naći funkciju gustine za X .*

(b) *Izračunati $P(X \leq 1)$ i $P(1 < X \leq 3)$.*

Rešenje:

(a) Kako je poznata funkcija raspodele F_X , gustinu ćemo naći pomoću relacije (2.14), koja važi u svim tačkama u kojima je gustina neprekidna. Za $x \in (0, 4]$ je

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{x}{4} \left(1 + \ln \frac{4}{x} \right) \right)' = \frac{1}{4} \left(1 + \ln \frac{4}{x} \right) + \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4} \cdot \left(-\frac{4}{x^2} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \ln \frac{4}{x} \right) - \frac{1}{4}$$

Dakle,

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \ln \frac{4}{x}, & x \in (0, 4] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) Po definiciji funkcije raspodele je $P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}(1 + \ln 4)$. Slično je $P(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{3}{4} \left(1 + \ln \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{4}(1 + \ln 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{16}{27} \approx 0.37$.

[104] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele:*

$$F_X(x) = \begin{cases} b, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^3}{27}, & 1 < x \leq 4, \\ 3a, & x > 4. \end{cases}$$

Odrediti konstante a i b i naći gustinu za X .

Rešenje: Konstante a i b određujemo na osnovu osobina $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a = 1$, dakle $a = \frac{1}{3}$ i $b = 0$. Koristeći (2.14) dobijamo za $x \in (1, 4]$

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{27} \right)' = \frac{3(x-1)^2}{27} = \frac{(x-1)^2}{9},$$

te je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9}, & x \in (1, 4], \\ 0, & x \notin (1, 4]. \end{cases}$$

[105] *Neka je X vreme (izraženo u satima) između dolaska dva klijenta u banku i neka X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$.*

- Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive X . Na grafiku funkcije gustine predstaviti $P(X \geq 0.2)$.*
- Kolika je verovatnoća da će između dolaska dva klijenta proteći najviše 30 minuta?*
- Izračunati $P(0.4 \leq X \leq 1)$ i $P(X \geq 0.2)$.*

Rešenje:

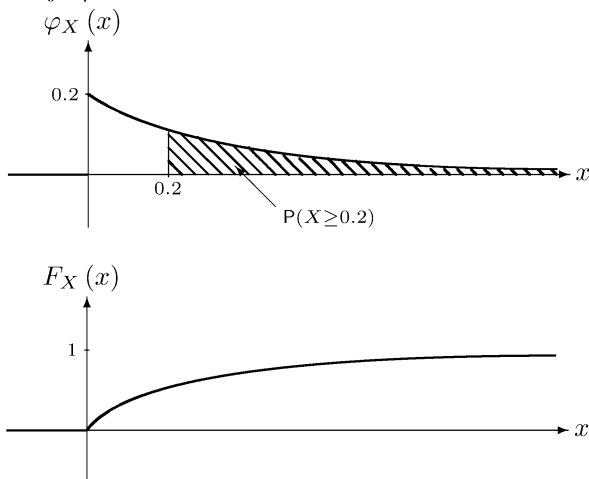
- (a) Kako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$, tj. $X : \mathcal{E}(0.2)$, njena funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.2x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Gustina slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \end{cases}$$

a grafici funkcija φ_X i F_X su



- (b) Verovatnoća traženog događaja je

$$P(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-0.2 \cdot 0.5} = 1 - e^{-0.1} = 1 - 0.9048 = 0.0952.$$

- (c) Na osnovu (2.13) i (2.12) dobijamo da je

$$\begin{aligned} P(0.4 \leq X \leq 1) &= F_X(1) - F_X(0.4) = 1 - e^{-0.2 \cdot 1} - (1 - e^{-0.2 \cdot 0.4}) = \\ &= e^{-0.08} - e^{-0.2} = 0.9231 - 0.8187 = 0.1044, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.2) &= 1 - P(X < 0.2) = 1 - F_X(0.2) = 1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 0.2}) = \\ &= e^{-0.04} = 0.9608. \end{aligned}$$

[106] *Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, $X : \mathcal{E}(1)$.*

- (a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X .*
 (b) *Izračunati $F_X(-2)$, $F_X(4)$, $P(|X| \leq 3)$ i $P(0.2 \leq 2X - 1 < 7)$.*

Rešenje:

- (a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad F_X(-2) &= 0, \quad F_X(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.9817, \text{ a tražene verovatnoće su} \\
 P(|X| \leq 3) &= P(-3 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-3) = 1 - e^{-3} - 0 \approx 0.95, \\
 P(0.2 \leq 2X - 1 < 7) &= P(1.2 \leq 2X < 8) = P(0.6 \leq X < 4) = F_X(4) - F_X(0.6) = \\
 &= 1 - e^{-4} - (1 - e^{-0.6}) \approx 0.9817 - 0.4512 = 0.5305.
 \end{aligned}$$

[107] Slučajna promenljiva Y koja predstavlja kašnjenje voza (izraženo u satima) ima uniformnu raspodelu, $Y : \mathcal{U}(0, 2)$.

- Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive Y . Na grafiku funkcije gustine predstaviti $P(0.2 \leq Y \leq 1.8)$.
- Kolika je verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta?
- Izračunati $P(Y \leq 0.5)$, $P(0.2 \leq Y \leq 1.8)$ i $P(Y \geq 1.7)$.

Rešenje:

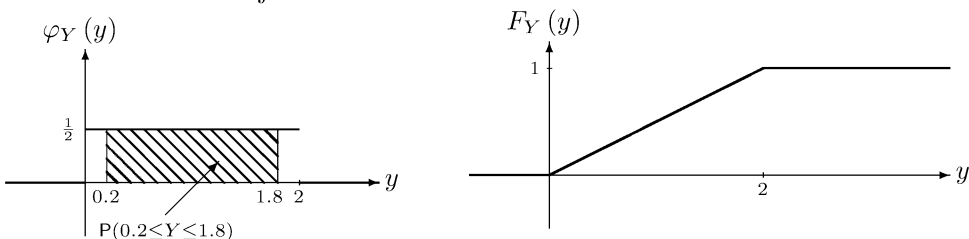
(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive Y je

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 < y \leq 2, \\ 1, & y > 2, \end{cases}$$

a njena gustina je

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0, 2) \\ \frac{1}{2}, & y \in (0, 2) \end{cases}.$$

Grafici ove dve funkcije su



(b) Verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta je $P(Y \geq \frac{3}{4}) = 1 - P(Y < \frac{3}{4}) = 1 - F_Y(\frac{3}{4}) = 1 - \frac{3}{8} = 0.625$.

(c) Tražene verovatnoće su $P(Y \leq 0.5) = F_Y(0.5) = \frac{0.5}{2} = 0.25$.
 $P(0.2 \leq Y \leq 1.8) = F_Y(1.8) - F_Y(0.2) = \frac{1.8}{2} - \frac{0.2}{2} = 0.8$,
dok je $P(Y \geq 1.7) = 1 - P(Y < 1.7) = 1 - F_Y(1.7) = 1 - \frac{1.7}{2} = 0.15$.

[108] Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-3; 5)$.

- Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X .
- Izračunati $F_X(0)$, $P(|X - 3| \leq 5)$ i $P(1 < 2 - X < 10)$.

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-3; 5), \\ \frac{1}{8}, & x \in (-3; 5), \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{x+3}{8}, & -3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

(b) $F_X(0) = \frac{0+3}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$, a tražene verovatnoće su

$$\begin{aligned} P(|X-3| \leq 5) &= P(-5 \leq X-3 \leq 5) = P(-2 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(-2) = \\ &= 1 - \frac{-2+3}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 < 2-X < 10) &= P(-1 < -X < 8) = P(-8 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-8) = \\ &= \frac{1+3}{8} - 0 = \frac{1}{2} = 0.5. \end{aligned}$$

[109] Slučajna promenljiva X predstavlja dužinu rada motora izraženu u hiljadama sati. Neka X ima Vejbulovu raspodelu sa parametrima $\alpha = 2$ i $\beta = 2$.

(a) Kolika je verovatnoća da će motor raditi bar 6 hiljada sati?

(b) Kolika je verovatnoća da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati?

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}xe^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases}$$

Tražena verovatnoća je

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = 1 - (1 - e^{-9}) = 0.999877.$$

(b) Verovatnoća događaja da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati je

$$P(2 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(2) = 1 - e^{-\frac{9}{4}} - (1 - e^{-1}) = 0.2624802.$$

[110] Neka slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Izračunati sledeće verovatnoće:

(a) $P(Z \leq 2.17)$

(b) $P(0 \leq Z \leq 1)$

(c) $P(-2.5 \leq Z)$

(d) $P(1.3 \leq Z \leq 2.17)$

(e) $P(-0.4 \leq Z \leq 1)$

(f) $P(-2 \leq Z < 1.1)$

(g) $P(|Z| \leq 1.2)$

(h) $P(Z \leq 4.4)$

(j) $P(Z \leq -1.01)$

Rešenje:

Prilikom rešavanja ovog i narednih zadataka korišćene su statističke tablice normalne raspodele $\mathcal{N}(0, 1)$ (vidi [8]). Takođe se koriste i sledeće osobine funkcije raspodele $\Phi(x)$ slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \text{ kao i } \Phi(|Z| < x) = 2\Phi(x) - 1.$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	...	0.07	...
$\vdots$		$\downarrow$	
2.1	$\rightarrow$	0.985	
$\vdots$			

Dakle, $\Phi(2.17) = 0.985$.

- (a) $P(Z \leq 2.17) = \Phi(2.17) = 0.985$.
- (b) $P(0 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$.
- (c) $P(-2.5 \leq Z) = 1 - P(Z < -2.5) = 1 - \Phi(-2.5) = 1 - (1 - \Phi(2.5)) = \Phi(2.5) = 0.9938$.
- (d) $P(1.3 \leq Z \leq 2.17) = \Phi(2.17) - \Phi(1.3) = 0.985 - 0.9032 = 0.0818$.
- (e) $P(-0.4 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.4) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.4)) = \Phi(1) + \Phi(0.4) - 1 = 0.8413 + 0.6554 - 1 = 0.4967$.
- (f) $P(-2 \leq Z < 1.1) = \Phi(1.1) - \Phi(-2) = \Phi(1.1) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1.1) + \Phi(2) - 1 = 0.8643 + 0.9772 - 1 = 0.8415$.
- (g) $P(|Z| \leq 1.2) = P(-1.2 \leq Z \leq 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.2)) = 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698$.
- (h) $P(Z \leq 4.4) = \Phi(4.4) \approx 1$.
- (j) $P(Z \leq -1.01) = \Phi(-1.01) = 1 - \Phi(1.01) = 1 - 0.8438 = 0.1562$.

[111] *Slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Odrediti c tako da važe jednakosti:*

- (a) $\Phi(c) = 0.9838$ (b) $P(Z \leq c) = 0.6718$ (c) $P(c \leq Z) = 0.121$
- (d) $P(Z \leq c) = 0.1231$ (e) $P(-c \leq Z \leq c) = 0.668$ (f) $P(|Z| \leq c) = 0.6542$

Rešenje:

(a) $\Phi(c) = 0.9838 \Rightarrow c = \Phi^{-1}(0.9838) = 2.14$

(b) $P(Z \leq c) = 0.6718 \Rightarrow$
 $c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$

(c) $P(c \leq Z) = 0.121 \Rightarrow$
 $1 - P(Z < c) = 0.121 \Rightarrow$
 $1 - \Phi(c) = 0.121 \Rightarrow \Phi(c) = 0.879 \Rightarrow$
 $c = \Phi^{-1}(0.879) = 1.17$.

x	...	0.04	0.05	...
$\vdots$		$\uparrow$	$\uparrow$	
0.4	$\leftarrow$	0.6700	0.6736	
$\vdots$				

Dakle, $c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$,
kao aritmetička sredina brojeva 0.44
i 0.45.

(d) Kako vrednost funkcije raspodele 0.1231 ne pronalazimo u tablicama ni za jedno c , koristimo činjenicu da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, dakle : $P(Z \leq c) = 0.1231$

$\Rightarrow \Phi(c) = 0.1231 \Rightarrow 1 - \Phi(-c) = 0.1231 \Rightarrow \Phi(-c) = 0.8769$

$\Rightarrow -c = \Phi^{-1}(0.8769) = 1.16 \Rightarrow c = -1.16$.

(e) $P(-c \leq Z \leq c) = 0.668 \Rightarrow 2\Phi(c) - 1 = 0.668 \Rightarrow \Phi(c) = \frac{1.668}{2}$

$\Rightarrow c = \Phi^{-1}(0.834) = 0.97$.

(f) $P(|Z| \leq c) = 0.6542 \Rightarrow 2\Phi(c) - 1 = 0.6542 \Rightarrow \Phi(c) = \frac{1.6542}{2}$

$\Rightarrow c = \Phi^{-1}(0.8271) = 0.945$.

[112] *Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(80, 10)$. Izračunati verovatnoće $P(X \leq 100)$, $P(70 \leq X)$, $P(65 \leq X \leq 100)$ i $P(|X - 80| \leq 10)$.*

Rešenje:

$X : \mathcal{N}(80, 10) \Rightarrow X^* = \frac{X-80}{10} : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 100) &= P\left(\frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}\right) = P(X^* \leq 2) = \Phi(2) = 0.9773. \\
P(70 \leq X) &= P\left(\frac{70-80}{10} \leq \frac{X-80}{10}\right) = P(-1 \leq X^*) = 1 - P(X^* < -1) = \\
&= 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = 0.8413. \\
P(65 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{65-80}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}\right) = P(-1.5 \leq X^* \leq 2) = \\
&= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9773 + 0.9332 - 1 = 0.9105. \\
P(|X - 80| \leq 10) &= P(-10 \leq X - 80 \leq 10) = P\left(-\frac{10}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{10}{10}\right) = \\
&= P(-1 \leq X^* \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826
\end{aligned}$$

[113] *Pretpostavimo da pH vrednost zemljišta jednog regiona ima normalnu raspodelu sa $m = 6$ i $\sigma = 0.1$. Ako je sa tog područja uzet jedan uzorak zemljišta, naći verovatnoću da uzeti uzorak ima pH vrednost*

- (a) između 5.9 i 6.15,
- (b) veću od 6,
- (c) najviše 5.95.

Rešenje:

Obeležimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja pH vrednost zemljišta. Kako X ima normalnu raspodelu $X : \mathcal{N}(6, 0.1)$ to $X^* = \frac{X-6}{0.1} : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
(a) \ P(5.9 \leq X \leq 6.15) &= P\left(\frac{5.9-6}{0.1} \leq \frac{X-6}{0.1} \leq \frac{6.15-6}{0.1}\right) = P(-1 \leq X^* \leq 1.5) = \\
&= \Phi(1.5) - \Phi(-1) = \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) = \\
&= 0.9332 + 0.8413 - 1 = 0.7745. \\
(b) \ P(X > 6) &= 1 - P(X \leq 6) = 1 - P\left(\frac{X-6}{0.1} \leq \frac{6-6}{0.1}\right) = 1 - P(X^* \leq 0) = \\
&= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5. \\
(c) \ P(X \leq 5.95) &= P(X^* \leq \frac{5.95-6}{0.1}) = P(X^* \leq -0.5) = \Phi(-0.5) = \\
&= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.
\end{aligned}$$

[114] *Neka X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(25, 0.6)$. Izračunati verovatnoće $P(X \leq 15)$, $P(20 \leq X)$ i $P(10 \leq X \leq 22)$ koristeći aproksimaciju binomne raspodele normalnom raspodelom.*

Rešenje:

$$\begin{aligned}
X : \mathcal{B}(25, 0.6) \quad n \cdot p &= 25 \cdot 0.6 = 15, \quad \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{6}, \\
\rightarrow X^* &= \frac{X-15}{\sqrt{6}} : \mathcal{N}(0, 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 15) &= P\left(\frac{X-15}{\sqrt{6}} \leq \frac{15-15}{\sqrt{6}}\right) = P(X^* \leq 0) = \Phi(0) = 0.5. \\
P(20 \leq X) &= 1 - P(X < 20) = 1 - P(X^* < \frac{20-15}{\sqrt{6}}) = 1 - P(X^* < 2.04124) = \\
&= 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207. \\
P(10 \leq X \leq 22) &= P\left(\frac{10-15}{\sqrt{6}} \leq X^* \leq \frac{22-15}{\sqrt{6}}\right) = P(-2.04124 \leq X^* \leq 2.8577) = \\
&= \Phi(2.86) - \Phi(-2.04) = 0.9979 + 0.9793 - 1 = 0.9772.
\end{aligned}$$

[115] *Dinar se baca 400 puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj palih pisama. Koristeći aproksimaciju normalnom raspodelom izračunati verovatnoće*

(a) *da će broj palih pisama biti veći od broja palih grbova,*

(b) *da će broj palih pisama biti najviše 185.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$, $n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$, $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$, , tako da $X^* = \frac{X-200}{10} : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$(a) P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - P(X^* \leq \frac{200-200}{10}) = 1 - P(X^* \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5,$$

$$(b) P(X \leq 185) = P(X^* \leq \frac{185-200}{10}) = P(X^* \leq -1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668.$$

[116] *Prosečno 4 % proizvoda je škart. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj ispravnih proizvoda od 150 posmatranih. Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu izračunati verovatnoću*

(a) *da će više od 140 proizvoda biti ispravno,*

(b) *da će više od 5 proizvoda biti neispravno.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj ispravnih proizvoda ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(150, 0.96)$, $p = 0.96$, $q = 0.04$, $n = 150$, pa je $np = 144$, $\sqrt{npq} = \sqrt{5.76} = 2.4$. Na osnovu Moavr-Laplasove teoreme $X^* = \frac{X-144}{2.4}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu, tj. $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$(a) P(X > 140) = 1 - P(X \leq 140) = 1 - P(\frac{X-144}{2.4} \leq \frac{140-144}{2.4}) \approx 1 - P(X^* \leq -1.67) = 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) = 0.9525.$$

(b) Primetimo da ako je X broj ispravnih proizvoda tada je $150 - X$ broj neispravnih proizvoda i obrnuto. Zaključujemo da je događaj A – „više od 5 proizvoda je neispravno” jednak događaju B – „manje od 145 proizvoda je ispravno”, tj. $A = B$. Dakle,

$$P(150 - X > 5) = P(X < 145) = P(X^* < \frac{145-144}{2.4}) \approx P(X^* < 2.08) = \Phi(2.08) = 0.9812.$$

[117] *Prosečno sedamdeset posto studenata traži konsultacije za vreme rada u računskom centru. Neka je u toku dana 100 studenata radilo u računskom centru.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će više od polovine broja studenata tražiti konsultacije?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti manji od 72?*

(c) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti između 70 i 80?*