



**OSNOVNE KARAKTERISTIKE MJERNIH  
INSTRUMENATA I MJERNIH SISTEMA  
GREŠKE MJERENJA I OBRADA REZULTATA MJERENJA**

MJERENJA U ELEKTRONICI, ETR, ELEKTRONIKA

DOC. DR. MILENA ERCEG

## KARAKTERISTIKE MJERNIH INSTRUMENATA I MJERNIH SISTEMA

- Statičke karakteristike
- Dinamičke karakteristike

Mnoge primjene podrazumijevaju mjerenja veličina koje su konstantne ili se veoma sporo mijenjaju u vremenu. Za mjerenje ovakvih veličina dovoljno je poznavati samo statičke karakteristike mjernog sistema. Sa druge strane, ukoliko je u pitanju mjerenje veličina koje se brzo mijenjaju u vremenu, mora uzeti u obzir dinamička zavisnost između ulaza i izlaza sistema. Ta zavisnost se opisuje diferencijalnim jednačinama, a odgovarajuće karakteristike se označavaju kao dinamičke karakteristike.

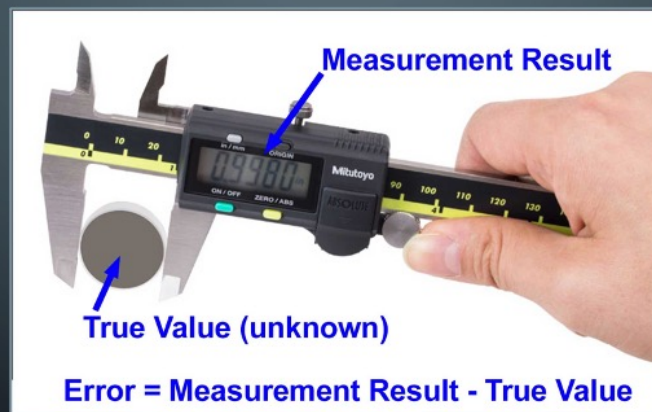
## STATIČKE KARAKTERISTIKE

- Tačnost (*accuracy*) i preciznost
- Ponovljivost i reproduktivnost
- Osjetljivost
- Linearnost
- ...

Sve statičke performanse se dobijaju u procesu koji se označava kao statička kalibracija.

Kalibracija podrazumijeva poređenje performansi instrumenta sa primarnim ili sekundarnim standardom većeg stepena tačnosti, ili sa instrumentom poznate tačnosti. Veoma je značajno da se mjerenje obavlja u odnosu na relevantne standarde.

## TAČNA (STVARNA) VRIJEDNOST



<https://www.engineering.com/story/vda-5-combining-uncertainty-evaluation-with-gage-studies>

Tačna vrijednost se može definisati kao srednja vrijednost rezultata beskonačnog broja mjerenja ukoliko ukupna srednja devijacija teži nuli. Nemoguće je pouzdano znati da li je izmjerena vrijednost jednaka tačnoj vrijednosti.

## STATIČKA GREŠKA

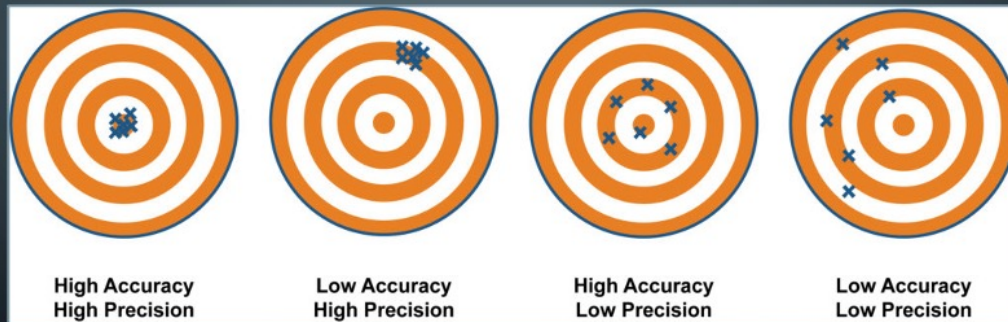
$$\delta A = A_m - A_t$$

$$\epsilon_R = \frac{\delta A}{A_t} = \frac{A_m - A_t}{A_t}$$

$$A_t = \frac{A_m}{(1 + \epsilon_R)} \approx A_m(1 - \epsilon_R)$$

Najznačajnija karakteristika mjernog instrumenta je njegova tačnost. Tačnost definiše odstupanje (ili slaganje) izmjerene veličine od njene tačne (stvarne) vrijednosti. Tačnost instrumenta se izražava preko njegove greške. Statička greška instrumenta predstavlja razliku izmjerene i tačne vrijednosti mjerene veličine. Relativna statička greška se definiše kao odnos apsolutne statičke greške i stvarne vrijednosti mjerene veličine.

## TAČNOST I PRECIZNOST



<http://kaffee.50webs.com/Science/images/Accuracy-vs-precision1.jpg>

Tačnost instrumenta je mjera koliko je rezultat mjerenja na tom instrumentu blizak stvarnoj vrijednosti veličine koja se mjeri.

Preciznost je mjera ponovljivosti mjernog instrumenta, mjera stepena slaganja rezultata mjerenja u okviru grupe izmjerenih rezultata.

Preciznost je neophodan, ali ne i dovoljan uslov tačnosti.

## TAČNOST I PRECIZNOST

*Primjer:* Digitalni voltmetar ima tačnost  $\pm 0.2 \%$  i pokazuje napon 8.135 V. Kolika je preciznost i tačnost mjerenja?

## TAČNOST I PRECIZNOST

***Primjer:** Digitalni voltmetar ima tačnost  $\pm 0.2 \%$  i pokazuje napon 8.135 V. Kolika je preciznost i tačnost mjerenja?*

***Rješenje:***

*Preciznost mjerenja je 1 mV, međutim tačna vrijednost napona je negdje između 8.119 V i 8.151 V. Dakle, iako je preciznost mjerenja 1 mV, tačnost je za datu vrijednost napona  $\pm 16$  mV.*



## ZNAČAJNE CIFRE

***Primjer:** Ukoliko instrument pokazuje napon 256 V (tri značajne cifre), to znači da je vrijednost napona bliža 256 V, nego 255 V ili 257 V. Sa druge strane, ukoliko instrument pokazuje 256.0 V (četiri značajne cifre), to znači da je vrijednost napona bliža 256.0, nego 255.9 V ili 256.1 V.*

Preciznost mjernog instrumenta (samim tim i mjerenja) se može ocijeniti na osnovu broja značajnih cifara kojima se prikazuje rezultat mjerenja. Veći broj značajnih cifara znači i veću preciznost instrumenta.

Veoma često se izmjereni rezultat bilježi na način da se za posljednju cifru uzme ona za koju se vjeruje da je najbliža stvarnoj vrijednosti mjerene veličine. To znači da je rezultat u okviru  $\pm 1$  zadnje značajne cifre.

Ocjena preciznosti na osnovu broja značajnih cifara ne odgovara preciznosti koja se definiše relativnim odstupanjem.

## ZNAČAJNE CIFRE

### Raspon moguće greške

- *Primjer:* Ukoliko je očitana napon 25.7 V, rezultat se može zapisati kao 25.7 V  $\pm 0.05$  V, što znači da je raspon moguće greške 0.1 V, odnosno da je rezultat u opsegu 25.65 V i 25.75 V.

## ZNAČAJNE CIFRE

### Raspon moguće greške

- **Primjer:** Ukoliko je očitana napon  $25.7\text{ V}$ , rezultat se može zapisati kao  $25.7\text{ V} \pm 0.05\text{ V}$ , što znači da je raspon moguće greške  $0.1\text{ V}$ , odnosno da je rezultat u opsegu  $25.65\text{ V}$  i  $25.75\text{ V}$ .
- **Primjer:** Pretpostavimo da je otpornost data kao  $100\ \Omega \pm 0.5\ \Omega$ . Opseg moguće greške je  $1\ \Omega$ , što iznosi  $1\%$  nominalne vrijednosti. Ukoliko je sa tri cifre data otpornost od  $999\ \Omega \pm 0.5\ \Omega$ , opseg moguće greške je također  $1\ \Omega$ , međutim to je oko  $0.1\%$  nominalne vrijednosti.

## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer:* Izmjerene su otpornosti  $R_1 = 72.3 \Omega$ ,  $R_2 = 2.73 \Omega$  i  $R_3 = 0.612 \Omega$ , pri čemu je opseg moguće greške otpornosti  $\pm 1$  posljednje značajne cifre. Odrediti ekvivalentnu otpornost redno vezanih otpornika  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ .

## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer:* Izmjerene su otpornosti  $R_1 = 72.3 \Omega$ ,  $R_2 = 2.73 \Omega$  i  $R_3 = 0.612 \Omega$ , pri čemu je opseg moguće greške otpornosti  $\pm 1$  posljednje značajne cifre. Odrediti ekvivalentnu otpornost redno vezanih otpornika  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ .

*Rješenje:*

$$\begin{array}{r} 72.3 \\ 2.73 \\ \hline 0.612 \\ \hline 75.642 \end{array}$$

Ekvivalentna otpornost iznosi  $75.6 \Omega$ . Nema smisla zapisivati više od jedne "nesigurne" cifre.

## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer: Izmjereni su napon 12.16 V i struja 1.34 A. Izračunati snagu.*

## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer:* Izmjereni su napon 12.16 V i struja 1.34 A. Izračunati snagu.

*Rješenje:*

$$12.16 \times 1.34 = 16.2944$$

Snaga iznosi 16.3 W. Nema smisla zapisivati više od jedne "nesigurne" cifre.

## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer:* Dva otpornika otpornosti  $R_1 = 28.7 \Omega$  i  $R_2 = 3.624 \Omega$  su vezani redno. Odrediti ekvivalentnu otpornost vodeći računa o mogućem broju značajnih cifara.



## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer:* Dva otpornika otpornosti  $R_1 = 28.7 \Omega$  i  $R_2 = 3.624 \Omega$  su vezani redno. Odrediti ekvivalentnu otpornost vodeći računa o mogućem broju značajnih cifara.

*Rješenje:*

28.7

3.624

32.324

Ekvivalentna otpornost iznosi 32.3  $\Omega$ . Otpornost  $R_1$  ima manju preciznost koja iznosi desetinu oma, zapisana je sa tri značajne cifre. Samim tim ni rezultat ne može imati veću preciznost.

## ZNAČAJNE CIFRE

*Primjer: Prilikom određivanja napona na krajevima otpornika, izmjerena je struja 4.37 A kroz otpornik otpornosti  $31.27 \Omega$ . Koliko iznosi traženi napon?*

## ZNAČAJNE CIFRE

***Primjer:** Prilikom određivanja napona na krajevima otpornika, izmjerena je struja 4.37 A kroz otpornik otpornosti 31.27 Ω. Koliko iznosi traženi napon?*

***Rješenje:***

$$4.37 \times 31.27 = 136.6499$$

*Traženi napon iznosi 137 V. Rezultat se može zapisati kroz tri značajne cifre. Kako se računski dobija 136.6499 V, pravilno je zapisati da je traženi napon 137 V.*

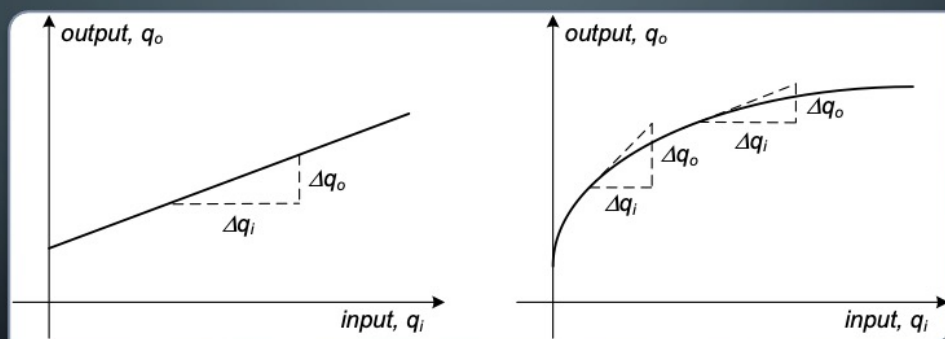
## PONOVLJIVOST I REPRODUKTIVNOST

- Ponovljivost
- Reproductivnost
- *Drift*

**Ponovljivost** se odnosi na stepen slaganja među sukcesivnim rezultatima mjerenja do kojih se došlo istim metodama, pod istim mjernim uslovima i u kratkom vremenskom intervalu.

**Reproduktivnost** se takođe odnosi na stepen slaganja između sukcesivnih očitavanja kada se ista veličina mjeri datom metodom, ali u ovom slučaju u pitanju je duži vremenski interval, različiti instrumenti, različite laboratorije, ili različiti operateri. Promjene u vremenu na izlazu sistema, pri konstantnom ulazu, izražavaju se kroz ***drift***.

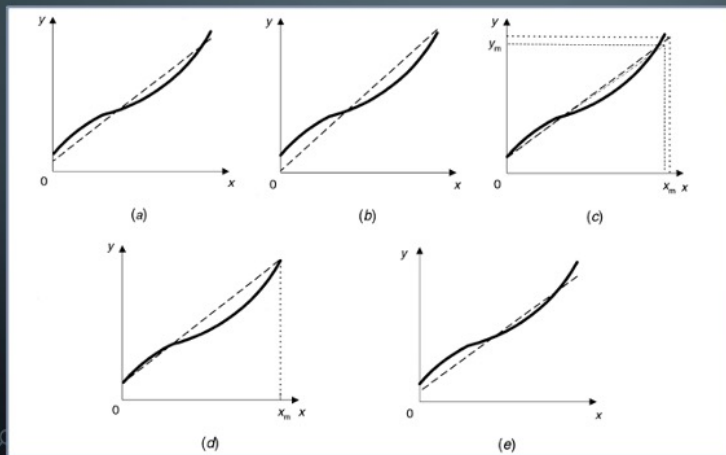
## STATIČKA OSJETLJIVOST



$$S = \frac{\Delta q_o}{\Delta q_i}$$

Statička osjetljivost predstavlja zavisnost izlaza mjernog instrumenta od promjene mjerene veličine.

## LINEARNOST



- a) nezavisna
- b) zero-based
- c) terminal-based
- d) end-points
- e) teorijska

Linearnost predstavlja stepen poklapanja između kalibracione krive i specifične prave linije. U zavisnosti od načina formiranja specifične prave u odnosu na koju se posmatra linearnost, razlikuje se nekoliko slučajeva:

slika a) **Nezavisna linearnost**. Prava linija se definiše na osnovu kriterijuma sume najmanjih kvadrata. Ovom metodom se najčešće dobija najmanja greška linearnosti.

slika b) **Zero-based linearnost**. Prava linija se definiše takođe na osnovu metoda sume najmanjih kvadrata, ali uz dodatni uslov da prolazi kroz nulu.

slika c) **Terminal-based linearnost**. Prava linija se definiše na osnovu izlaza koji odgovara najmanjoj vrijednosti ulazne veličine i teorijske vrijednosti izlaza za maksimalnu vrijednost ulazne veličine.

slika d) **End-points linearnost**. Prava linija se definiše na osnovu stvarne vrijednosti izlazne veličine za minimalnu i maksimalnu vrijednost ulazne veličine.

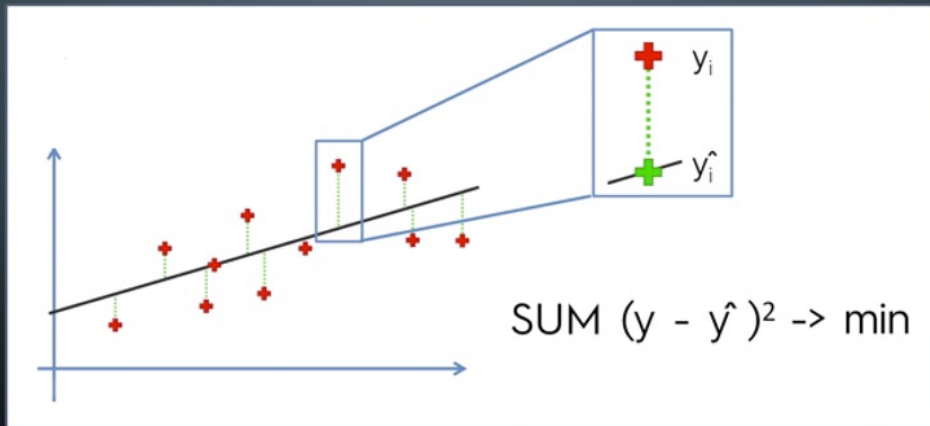
slika e) **Teorijska linearnost**. Prava linija se definiše na osnovu teorijskih analiza i matematičkog modelovanja u toku dizajniranja sistema.

Prednost visoke linearnosti jeste u tome što se na osnovu očitano<sup>g</sup> izlaza i poznate (približno konstantne) osjetljivosti sistema operacijom dijeljenja dolazi do tražene vrijednosti.

Za mnoge mjerne sisteme bazirane na mikrokontroleru, ponovljivost je značajnija od linearnosti jer se na osnovu ulaza i odgovarajućeg izlaza formiraju *look-up* tabele čije dimenzije se značajno mogu redukovati interpolacijom. U savremenim sistemima koriste se i neuralne mreže istrenirane da za dati ulaz odrede izlaz, a koje su dovoljno jednostavne da se mogu implementirati uz pomoć mikrokontrolera.

Osnovni faktori koji utiču na linearnost jesu rezolucija, prag (*threshold*) i histerezis.

## METOD NAJMANJIH KVADRATA





## HISTEREZIS. PRAG. REZOLUCIJA.

- Histerezis
- Prag
- Rezolucija

**Histerezis** se odnosi na razliku izlaza za istu vrijednost na ulazu, u zavisnosti od toga da li se vrijednosti na ulazu postepeno povećavaju ili smanjuju prema datoj vrijednosti.

Minimalna vrijednost ulaza za koju postoji odziv, označava se kao **prag**. Prag je dakle najmanja mjerljiva vrijednost mjerene veličine.

Minimalna promjena mjerene veličine koja izaziva promjenu na izlazu se označava kao **rezolucija**. Rezolucija je dakle minimalna mjerljiva promjena mjerene veličine.

## DINAMIČKE KARAKTERISTIKE

- Brzina odziva i vrijeme odziva
- *Lag*
- Vjernost odziva (*fidelity*)
- Dinamička greška

Dinamičke karakteristike mjernog sistema opisuju ponašanje sistema kada se mjerena veličina relativno brzo mijenja u vremenu.

Kada se na ulaz mjernog sistema dovede mjerena veličina, mjerni sistem ne može postići stacionarno (*steady*) stanje odmah, već preko prelaznog (*transient*) stanja postepeno prelazi u stacionarno stanje.

Postoje situacije kada prelazno stanje nema poseban značaj i tada je dovoljno razmatrati odziv sistema u stacionarnom stanju. Međutim, nerijetko je važno posmatrati i prelazno stanje, odnosno odziv sistema u prelaznom stanju (*transient response*) kako bi se zaključilo o načinu prevođenja sistema u stacionarno stanje. Na brzinu odziva sistema utiče prisustvo elemenata koji „skladište“ energiju, kao što su inertni elementi (masa, induktivnost,...) i kapacitivni elementi (električna, termalna, fluida,...). Osim ovog ograničenja, postoji i vremensko kašnjenje do koga dolazi kada sistem „čeka“ određenu promjenu ili akciju.

Mnogi mjerni sistemi za industrijske, vazduhoplovne, medicinske i druge primjene su izloženi stimulusima koji su po svojoj prirodi promjenljivi. Ulazu koji se mijenja u vremenu odgovara vremenski promjenljiv odziv. Ponašanje sistema pod ovakvim okolnostima se opisuje dinamičkim odzivom sistema.

Osnovne dinamičke karakteristike mjernog sistema su:

- Brzina odziva i vrijeme odziva
- *Lag*
- Vjernost odziva (*Fidelity*)
- Dinamička greška

**Brzina odziva** sistema ukazuje koliko brzo sistem reaguje na promjene mjerene veličine. **Vrijeme odziva** se definiše kao vremenski interval koji je potreban mjernom sistemu da uspostavi stacionarno stanje od trenutka dovođenja pobude. Za odskočnu pobudu, vrijeme odziva se može definisati kao vrijeme koje je potrebno da odziv sistema dostigne određeni procenat vrijednosti u stacionarnom stanju.

Mjerni sistem ne reaguje trenutno na pobudu. **Lag** predstavlja kašnjenje odziva mjernog sistema u odnosu na promjenu mjerene veličine. Ovo vrijeme postaje kritično kod aplikacija gdje se od mjernog sistema očekuje veoma visoka brzina.

**Fidelity** se definiše kao sposobnost sistema da reprodukuje odziv u formi pobude.

Ukoliko se, na primjer, ulazna veličina linearno mijenja i ukoliko se izlaz sistema takođe linearno mijenja, vjernost sistema je 100 %. U idealnom slučaju vjernost sistema ima vrijednost 100 % što znači da odziv i pobuda imaju potpuno istu formu bez bilo kakvih distorzija koje uvodi sistem. Vremenski *lag* ili fazna razlika između izlaza i ulaza nisu uključeni u definiciju vjernosti odziva.

**Dinamička greška** predstavlja razliku između tačne vrijednosti veličine koja se mijenja u vremenu i vrijednosti koju pokazuje mjerni instrument, ukoliko ne postoji statička greška. Ukupna dinamička greška mjernog sistema je kombinacija vjernosti odziva, vremenskog *lag*-a i fazne razlike između ulaza i izlaza sistema.

## ZAGARANTOVANA (LIMITING, GUARANTEE) GREŠKA

$$A_a = A_s \pm \delta A$$

**Primjer:** Ukoliko je nominalna vrijednost otpornosti  $100 \Omega$  sa zagantovanom greškom  $\pm 10 \Omega$ , sve vrijednosti otpornosti su u opsegu  $90 \Omega \leq R \leq 110 \Omega$ .

Ne postoji elektronska komponenta ili uređaj koji je savršeno tačan. Svi oni posjeduju određenu grešku. Važno je razumjeti kako su greške specificirane i kako zajedno utiču na formiranje ukupne greške. Iako postoji mogućnost da se greške međusobno ponište, uvijek treba uzeti u obzir najlošiji mogući slučaj.

Osim grešaka koje unosi mjerna oprema, neizbježna je i greška koju unosi čovjek. Takođe, čak iako su greške mjerne instrumentacije male, postoji i greška koja se unosi pogrešnim načinom upotrebe instrumenta – sistematska greška.

Greške čije uzrok se ne može objasniti se označavaju kao slučajne greške. Ukoliko je zahtijevana tačnost visoka, greške se mogu ublažiti obavljanjem velikog broja mjerenja i pronalaženjem srednje vrijednosti.

Tačnost i preciznost mjernog instrumenta zavisi od njegovog dizajna, korišćenih materijala i načina izrade. Izbor instrumenta za specifičnu primjenu zavisi od željene tačnosti. Proizvođač garantuje određenu tačnost instrumenta. Kod većine instrumenata zagantovana tačnost se izražava u procentima pune skale. Tačnost komponente se izražava u procentima nominalne vrijednosti. Dakle, proizvođač mora da specificira devijaciju od nominalne vrijednosti određene veličine. Granice devijacije u odnosu na specificiranu vrijednost se definišu kao *limiting* greške ili *guarantee* greške.

Može se reći da proizvođač garantuje da greška proizvoda nije veća od datog limita. Ukoliko je  $A_s$  nominalna vrijednost, a granice greške  $\pm\delta A$ , sve moguće vrijednosti se moraju naći u opsegu  $(A_s - \delta A)$  do  $(A_s + \delta A)$ .

## RELATIVNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

$$\epsilon_r = \frac{\delta A}{A_S} \Rightarrow A_a = A_S(1 \pm \epsilon_r)$$

*Primjer:* Ukoliko je nominalna vrijednost otpornosti  $100 \Omega$  sa zagarantovanom greškom  $\pm 10 \Omega$ , relativna zagarantovana greška iznosi  $\epsilon_r = \pm 0.1$  dok je procentualna relativna zagarantovana greška  $\epsilon_r [\%] = \pm 10 \%$

Relativna zagarantovana greška se definiše kao odnos zagarantovane greške i nominalne vrijednosti. Kod zagarantovanih grešaka, nominalna vrijednost  $A_S$  se uzima kao tačna vrijednost.

## RELATIVNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

***Primjer:** Voltmetar mjernog opsega 0-150 V ima zagarantovanu tačnost od 1 % pune skale. Napon koji se mjeri ovim instrumentom iznosi 75 V. Izračunati zagarantovanu grešku mjerenja u procentima.*

## RELATIVNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

***Primjer:** Voltmetar mjernog opsega 0-150 V ima zagaranovanu tačnost od 1 % pune skale. Napon koji se mjeri ovim instrumentom iznosi 75 V. Izračunati zagaranovanu grešku mjerenja u procentima.*

***Rješenje:** 2 %*

Kako je greška definisana u odnosu na napon pune skale, relativna greška se povećava za manje vrijednosti mjenog napona. Veoma je važno prilikom mjerenja pravilno odabrati mjerni opseg.



## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

- Suma dvije mjerene veličine:  $y = u + v$

$$\frac{dy}{y} = \frac{d(u+v)}{y} = \frac{du}{y} + \frac{dv}{y} = \frac{u}{y} \frac{du}{u} + \frac{v}{y} \frac{dv}{v}$$

$$\frac{\delta y}{y} = \pm \left( \frac{u}{y} \frac{\delta u}{u} + \frac{v}{y} \frac{\delta v}{v} \right)$$

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

- Proizvod dvije mjerene veličine:  $y = u \cdot v$

$$\ln y = \ln u + \ln v$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{u} \frac{du}{dy} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dy} \text{ ili } \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

$$\frac{\delta y}{y} = \pm \left( \frac{\delta u}{u} + \frac{\delta v}{v} \right)$$

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

- Količnik dvije mjerene veličine:  $y = u/v$

$$\ln y = \ln u - \ln v$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{u} \frac{du}{dy} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dy} \text{ ili } \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

$$\frac{\delta y}{y} = \pm \left( \frac{\delta u}{u} + \frac{\delta v}{v} \right)$$

Ukupna zagarantovana greška se računa za najgori mogući slučaj.

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

- Stepen mjerene veličine:  $y = u^n$

$$\ln y = n \ln u$$

$$\frac{1}{y} = n \frac{1}{u} \frac{du}{dy} \text{ ili } \frac{dy}{y} = n \frac{du}{u}$$

$$\frac{\delta y}{y} = \pm n \frac{\delta u}{u}$$

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

*Primjer:* Tri otpornika imaju sljedeće vrijednosti otpornosti:  $R_1 = 37 \Omega \pm 5\%$ ,  $R_2 = 75 \Omega \pm 5\%$  i  $R_3 = 50 \Omega \pm 5\%$ . Odrediti zagaranтовану grešku serijske veze ovih otpornosti.

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

*Primjer:* Tri otpornika imaju sljedeće vrijednosti otpornosti:  $R_1 = 37 \Omega \pm 5\%$ ,  $R_2 = 75 \Omega \pm 5\%$  i  $R_3 = 50 \Omega \pm 5\%$ . Odrediti zagarantovanu grešku serijske veze ovih otpornosti.

*Rješenje:*

$\pm 5\%$  ili  $\pm 8.1 \Omega$ .

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

*Primjer: Otpornost kola se određuje mjerenjem struje koja protiče kroz kolo i ukupne snage. Ukoliko su zagarrantovane greške mjerenja struje i snage  $\pm 1\%$  i  $\pm 1.5\%$ , respektivno, odrediti zagarrantovanu grešku tražene otpornosti.*

## UKUPNA ZAGARANTOVANA GREŠKA

*Primjer:* Otpornost kola se određuje mjerenjem struje koja protiče kroz kolo i ukupne snage. Ukoliko su zagarrantovane greške mjerenja struje i snage  $\pm 1\%$  i  $\pm 1.5\%$ , respektivno, odrediti zagarrantovanu grešku tražene otpornosti.

*Rješenje:*

$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$\ln R = \ln P - 2 \ln I$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dR} - \frac{2}{I} \frac{dI}{dR}$$

$$\frac{\delta R}{R} = \pm \left( \frac{\delta P}{P} + 2 \frac{\delta I}{I} \right) = \pm 3.5 \%$$



## POZNATE (KNOWN) GREŠKE

**Primjer:** U toku testiranja izmjerena je struja od 64 mA kroz otpornik otpornosti 3200 Ω. Odrediti disipaciju snage. Naknadno je utvrđeno da ampermetar unosi grešku 0.75 %, dok je greška otpornosti 0.2 %. Odrediti "poznatu" grešku za prethodno izračunatu snagu.

**Rješenje:**

$$P = RI^2 = 13.1 \text{ W}$$

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{2\delta I}{I} + \frac{\delta R}{R} = 1.7 \%$$

Rezultat mjerenja je za 1.7 % veći od tačne vrijednosti

Ukoliko je greška poznata (data), ukupna vrijednost izvedene greške se može računati kao i u slučaju zagarantovane greške. Međutim, kod poznatih grešaka poznat je i predznak greške.

## TIPOVI GREŠAKA

- Grube greške
- Sistematske greške
- Slučajne greške

## GRUBE GREŠKE

- Pogrešno očitavanje rezultata mjerenja. *Primjer:* 31.5 °C umjesto 21.5 °C
- Pogrešno bilježenje rezultata mjerenja. *Primjer:* 28.5 °C umjesto 25.8 °C
- Moguće ih je redukovati ukoliko se:
  - Odgovorno očitavaju i preuzimaju izmjereni rezultati
  - Obavi veći broj mjerenja iste veličine

Grube greške su u osnovi greške do kojih dolazi zbog nemarnosti onoga ko mjeri. Jedna od najčešćih grubih grešaka je pogrešno očitavanje rezultata mjerenja (npr. ne vodi se računa o izabranom mjernom opsegu digitalnog instrumenta, ili o izabranoj skali analognog instrumenta).

Ukoliko je rezultat mjerenja dobro očitavan, postoji mogućnost da dođe do pogrešnog bilježenja rezultata mjerenja (pogrešna jedinica, pogrešna kolona,...). Očekivana je pojava ovakvih grešaka povremeno. Najbolji način prevencije je vođenje računa da li izmjerena vrijednost ima fizičkog smisla. Uvrštavanje rezultata mjerenja u odgovarajuće relacije ili njihovo grafičko predstavljanje često može biti od koristi, dok su mjerenja u toku.

## SISTEMATSKE GREŠKE

- Greške mjernog instrumenta
- Greške okoline
- Greške očitavanja

Greške očitavanja su uglavnom prevaziđene savremenim mjernim instrumentima. Odnosile su se uglavnom na greške usljed paralakse prilikom očitavanja rezultata mjerenja sa skale kod analognih instrumenata.

## SISTEMATSKE GREŠKE. GREŠKE MJERNOG INSTRUMENTA

- Usljed nedostataka samog mjernog instrumenta
- Usljed pogrešne upotrebe mjernog instrumenta
- Usljed efekta opterećenja mjernog instrumenta

Greške usljed nedostataka samog instrumenta odnose se na lošu konstrukciju ili rad instrumenta. Ovakve greške mogu dovesti do prikaza rezultata čija vrijednost je uvijek veća ili manja od mjerene veličine. Nekada je ovakve greške moguće eliminirati ukoliko se proces mjerenja pažljivo isplanira, uvedu se korekcionni faktori u skladu sa greškom koju unosi instrument i izvrši rekaliibracija.

Pogrešna upotreba mjernog instrumenta često dovodi do greške mjerenja. Pogrešna inicijalna podešavanja, pogrešan odabir sonde, samo su neki od primjera. Ovakve greške ne dovode do oštećenja samog mjernog instrumenta, ali utiču na rezultat mjerenja. Postoje i načini upotrebe instrumenta koji mogu dovesti do trajnih oštećenja, kao na primjer pregrijavanje usljed preopterećenosti.

Greška koja nastaje usljed efekta opterećenja mjernog instrumenta podrazumijeva neusklađenost opterećenja koje u sistem unosi DUT sa ulaznom otpornošću instrumenta. Ova greška se također može izbjeći pravilnim planiranjem mjerenja.

Ukoliko je potrebno, treba izvršiti korekciju rezultata mjerenja, ili odabrati instrument koji je prikladniji primjeni.

## SISTEMATSKE GREŠKE. GREŠKE OKOLINE

- Moguće ih je redukovati ukoliko se:
  - Ostvare približno konstantni uslovi.
  - Koristi oprema koja je imuna u velikoj mjeri na spoljašnje uticaje.
  - Koriste tehnike kojima se eliminišu uticaji spoljašnje sredine.
  - Primijene odgovarajuće korekcije rezultata.

Greške okoline se odnose na varijacije temperature, pritiska, vlažnosti, vibracija, eksternog magnetnog ili elektrostatickog polja...

Moguće ih je redukovati ukoliko se:

- Ostvare približno konstantni uslovi.
- Koristi oprema koja je imuna u velikoj mjeri na spoljašnje uticaje.
- Koriste tehnike kojima se eliminišu uticaji spoljašnje sredine. Na primjer, uticaj vlage i prašine se može redukovati ukoliko se uređaj smjesti u odgovarajuće zaštitno kućište.
- Primijene odgovarajuće korekcije rezultata

## SLUČAJNE GREŠKE

- Greške nepoznatog uzroka
- Rezultati mjerenja variraju čak i nakon otklanjanja svih sistematskih grešaka
- Posljedica su velikog broja faktora koji u malom iznosu mijenjaju rezultat mjerenja, na slučajan način
- Posebna pažnja im se posvećuje kada su u pitanju mjerenja visoke tačnosti
- Označavaju se i kao rezidualne greške jer ostaju nakon uklanjanja sistematskih grešaka
- Teorija vjerovatnoće i statistika se koriste za procjenu stvarne vrijednosti veličine koja se mjeri

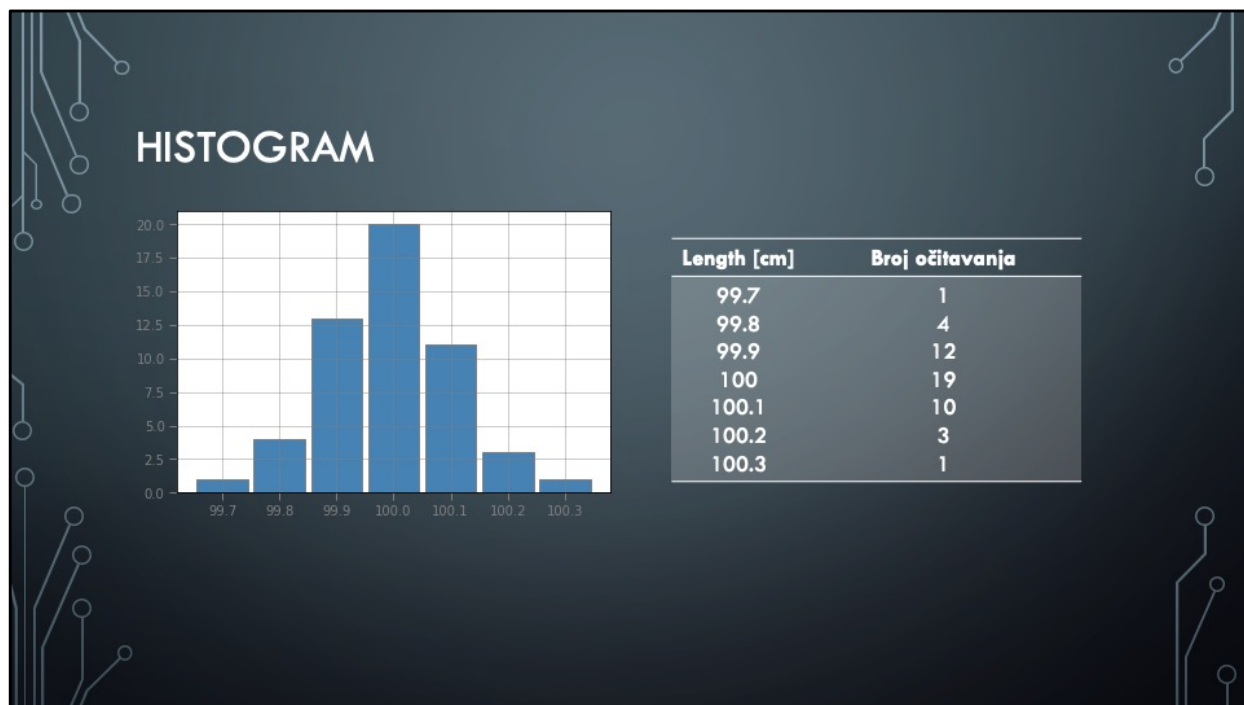
## STATISTIČKA OBRADA REZULTATA MJERENJA

- Mjerenje pod različitim mjernim uslovima – *Multisample test*
- Mjerenje u konstantni mjernim uslovima – *Singlesample test*
- Primjena statistike i vjerovatnoće ima smisla samo ukoliko je izvršen dovoljno veliki broj mjerenja.

Eksperimentalni podaci se dobijaju na dva načina:

- Ponavljanjem mjerenja određene veličine u različitim mjernim uslovima: upotrebom različite mjerne opreme, različitim mjernim metodama, od strane više lica. Na ovaj način dobija se *multisample* rezultat.
- Mjerenja se ponavljaju više puta pod istim mjernim uslovima, sukcesivno – *singlesample test*.





Kada je u pitanju određivanje centralne vrijednosti, jedan od načina prikazivanja rezultata je histogram. U primjeru mjerenja dužine je prikazano 50 rezultata mjerenja. Najvjerovatnija, ili centralna vrijednost je očigledno 100 cm. Povećavanjem broja mjerenja, dolazi do smanjivanja koraka i histogram postepeno prelazi u kontinualnu formu. Kriva dobijena na ovaj način najčešće je simetrična.

## SREDNJA VRIJEDNOST. OPSEG. DEVIJACIJA

- Srednja vrijednost:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

- Opseg izmjerene veličine:  $x_{max} - x_{min}$
- Devijacija izmjerene veličine u odnosu na srednju vrijednost:

$$d_1 = x_1 - \bar{X}$$

$$d_2 = x_2 - \bar{X}$$

.....

$$d_n = x_n - \bar{X}$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\bar{X} = 0$$

Najvjerovatnija vrijednost mjerene veličine je aritmetička sredina velikog broja mjerenja.

Mjera disperzije od srednje vrijednosti je veoma značajna jer ukazuje na preciznost mjerenja. Velika disperzija ukazuje da postoje faktori u procesu mjerenja koju su van kontrole i rezultat mjerenja nije pouzdan. Najjednostavnija mjera disperzije je opseg rezultata mjerenja. Širi opseg znači manju preciznost. Algebarska suma svih devijacija od srednje vrijednosti jednaka je nuli.

## SREDNJA DEVIJACIJA. STANDARDNA DEVIJACIJA

- Srednja devijacija:

$$\bar{d} = \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \dots + |d_n|}{n}$$

- Standardna devijacija za beskonačan broj uzoraka:

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}}$$

- Standardna devijacija za mali broj uzoraka:

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n - 1}}$$

Srednja devijacija je indikacija preciznosti instrumenta koji se koristi u toku mjerenja. Visoko precizni instrumenti imaju malu srednju devijaciju.

Za analizu slučajnih grešaka veoma značajna je standardna devijacija.

Rezultati statističke analize se mogu izraziti preko devijacije u odnosu na srednju vrijednost:

- $\bar{X} \pm \sigma$ . Granice greške su u ovom slučaju jednake standardnoj devijaciji. To znači da je oko 68 % rezultata u granicama  $\pm\sigma$ , odnosno, da postoji vjerovatnoća od oko 0.32 da će novo očitavanje biti van ovih granica.
- $\bar{X} \pm 0.6754\sigma$ . Vjerovatnoća da će svaki naredni rezultat mjerenja biti u ovim granicama je oko 0.5.
- $\bar{X} \pm 2\sigma$ . Oko 95 % rezultata mjerenja je u ovim granicama.
- $\bar{X} \pm 3\sigma$ . Oko 99.74 % rezultata mjerenja je u ovim granicama. Vjerovatnoća da će naredno mjerenje biti van ovih granica je 1:256.

## VARIJANSA

- Varijansa za beskonačan broj uzoraka:

$$V = \sigma^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}$$

- Varijansa za mali broj uzoraka:

$$V = \sigma^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n - 1}$$

## LITERATURA

- David A. Bell, *Electronic Instrumentation and Measurements*, Prentice-Hall, 2003 (poglavlje 2)
- A. K. Sawhney, *Electrical and Electronic Measurements and Instrumentation*, Dhanpat Rai & Company, 2014 (poglavlje 2 i 3)
- R. Pallas-Areny, J. G. Webster, *Sensors and Signal Conditioning*, John Wiley & Sons, 2001 (poglavlje 1.4)