Milojica Jaćimović, Vladimir Jaćimović

MATEMATIKA III
-materijal za pripremu ispita-

Materiajl je namijenjen studentima II godine Elektrotehničkog fakulteta u Podgorici i biće postavljen na sajt tog fakulteta. Materijal se sastoji od četiri cjeline-glave. Međutim, za ispit iz Matematike III vezane su samo II i III glava. Iz tih razloga, u tim glavama, uz teorijska razmatranja, dati su primjeri, a na kraju svake od ove dvije glave dato je po dvadesetak zadataka za samostalni rad. Vjerujemo da na osnovu ovog materijala studenti mogu sagledati kako može izgledati ispit iz ovog predmeta i mogu pripremiti dio ispita na koji se ovaj materijal odnosi. Prisustvo ostalog materijala vezano je za naše namjere da uradimo udžbenik za studente II godine tehničkih fakulteta. Dakle, meterijal predstavlja i prvu (grubu) verziju tog udžbenika. Svjesni smo da u u materiajlu postoji greške (od najjednostavnijih štamparskih do složenih i bitnih). Kako nam je cilj da u udžbeniku uklonimo ako ne sve greške a ono većinu njih, bićemo zahvalni svakom ko nam na greške u ovom materijalu ukaže.

FUNKCIJE VIŠE PROMJENLJIVIH

U ovoj glavi izučavaćemo funkcije više promjenljivih. U programu Matematike na Elektrotehničkom fakultetu osnovni pojmovi vezani za funkcije više promjenljivih izučavaju se na prvoj godini studija. Dio gradiva ovdje ponavljamo prosto da bi se knjiga mogla čitati samostalno. Dakle, u ovom dijelu 'emo definisati graničnu vrijednost, neprekidnost i izvod funkcija više promjenljivih i preslikavanja koja su definisana na skupovima iz prostora R^n sa vrijednostima u R^m. Prethodno ćemo, međutim, izučiti skupove na kojima te funkcije treba da budu definisane. Prisjetimo se kako je za izučavanje funkcija jedne promjenljive bilo korisno i prosto neophodno da se dobro izuči realna prava, odnsono skup realnih brojeva.

Prostor R^n

Za početak ćemo posmatrati uređene n-torke $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ realnih brojeva. Skup svih ovakvih n-torki označićemo sa R^n. Podvucimo da je u posmatranim n-torkama svaka od komponenti $x^1, x^2, \ldots, x^n$ realan broj. Nas će, posebno kada budemo govorili o mogućnostima primjene, zanimati slučajevi $n = 2$ i $n = 3$. Većina činjenica će ovdje biti izložena u opštem obliku, a mnogi dobro poznati rezulatati koji se odnose na skup realnih brojeva i na funkcije jedne promjenljive, pojavljivaće se kao specijalni slučajevi naših razmatranja za $n = 1$.

S obzirom na mogućnost da se svakom realnom broju pridruži tačka na pravoj, da se svaki par realnih brojeva poistovjeti sa tačkom u ravni, da se uređena trojka realnih brojeva poistovjeti sa tačkom u prostoru, mi ćemo uređene n-torke nazivati tačkama u R^n. Pri tome ćemo n-torke označavati (uglavnom) malim slovima latinske azbuke. Treba napomenuti i da ćemo, kada god pređemo na slučaj $n = 2$ koordinate, umjesto sa x^1, x^2, označavati sa x, y, dok ćemo u slučaju $n = 3$ koordinate označavati sa x, y, z. Korišćenje istih oznaka za različite objekte ipak neće izazivati zabunu, jer će iz konteksta biti jasno o čemu se tačno radi.

Sabiranje n-torki (tačaka u R^n) i množenje n-torki realnim brojem definišimo na sledeći način*:*

zbir tačaka $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ je tačka $z = x+y := (x^1+y^1, x^2+y^2, \ldots, x^n + y^n)$*;*

proizvod n-torke (tačke u R^n)$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i realnog broja λ je n-torka $\lambda x := (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n)$.

Mi ćemo i ubuduće koristiti znak ":="kada želimo da veličinu na lijevoj strani jednakosti definišemo formulom koja stoji na desnoj strani jednakosti. Nije teško provjeriti da je, uz tako definisane operacije sabiranja i množenja realnim brojem, R^n vektorski (linearni) prostor. Zbog toga ćemo tačke prostora (uređene n-torke) ponekad nazivati vektorima. Dimenzija prostora jednaka je n. Bazu čine vektori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, što se lako provjerava. Pri tome se očigledno za tačku (vektor) $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ može pisati $x = x^1e_1 + x^2e_2 + \cdots + x^ne_n$. Dalje, u prostoru R^n se definiše skalarni proizvod : ako je $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, onda je skalarni proizvod

$$\langle x, y\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n.$$

To je u skladu sa formulama za skalarni proizvod u trodimenzionom prostoru vektora-orjentisanih duži. Pored toga, svakom vektoru $x \in R^n$ pridružuje se njegova dužina ili norma*:*

$$|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = ((x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Rastojanje ρ između tačaka $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ iz R^n definiše se formulom*:*

$$\rho(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2}.$$

Lako se dokazuje da za dužine vektora iz prostora R^n odnosno za rastojanje tačaka iz R^n važe sledeće činjenice :

$$\begin{array}{llll} 1) & |x| \geq 0; & 1a) & \rho(x,y) \geq 0; \\ 2) & |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0; & 2a) & \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \\ 3) & |\lambda x| = |\lambda||x|, \text{ gdje } \lambda \in R; & 3a) & \rho(x,y) = \rho(y,x); \\ 4) & |x+y| \leq |x| + |y|; & 4a) & \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z). \end{array}$$

Za nejednakosti 4) i 4a) kažemo da su nejednakosti trougla. U vezi sa činjenicom da je na skupu R^n definisana funkcija koja svakom vektoru x pridružuje njegovu normu, pri čemu su ispunjeni uslovi $1), 2), 3) i 4)$, kažemo da je prostor R^n normiran. Dalje, na Dekartovom proizvodu $R^n \times R^n$ definisana je funkcija ρ-rastojanje tačaka (ili, kako se to često kaže, metrika) sa svojstvima $1a) - 4a)$, pa kažemo da je R^n metički prostor. Primijetimo da je metrika definisana posredstvom prethodno definisane norme. U prostoru R^n moguće je, međutim, i normu, pa i rastojanje definisati na drugi način. Naprimjer, normu (dužinu) vektora $x = (x^1, \ldots x^n)$ i rastojanje tačaka $x = (x^1, \ldots, x^n)$ i $y = (y^1, \ldots, y^n)$ možemo definisati formulama*:*

$$|x|_{max} = \max\{x^1, x^2, \ldots, x^n)(\text{norma na})R^n$$

i

$$\rho_{max}(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|, \ldots, |x^n - y_n|)(\text{rastojanje na})R^n$$

Lako se provjerava da i ovako definisana norma i ovako definisano rastojanje imaju svojstva 1)-4) odnosno 1a)-4a). U prostoru R^n se često razmatraju i norma i rastojanje koje ćemo označavati sa $|\cdot|$ i ρ_1 a koje se definišu formulama

$$|x|_1 = |x^1| + |x^2| + \cdots + |x^n|, \ \rho_1(x, y) = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2| + \cdots + |x^n - y^n|.$$

Što se odnosa uvedenih rastojanaja tiče , nije teško dokazati da važi

$$n^{\frac{-1}{2}} \rho(x, y) \leq \rho_{max}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq n\rho(x, y).$$

Postoje i drugi načini definicije rastojanja tačaka, među njima i oni koji nijesu povezani ni sa kakvom normom. Za nas će osnovno rastojanje biti rastojanje

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2}.$$

§2 Otvoreni i zatvoreni skupovi u R^n

Definicija 1. *Ako je tačka $a \in R^n$ i r pozitivan realan broj onda ćemo za skup tačaka $\{x \in R^n : \rho(x,a) \leq r\}$ reći da je zatvorena kugla u R^n sa centrom u tački a poluprečnikom r. Istovremeno ćemo za skup $\{x \in R^n : \rho(x,a) < r\}$ govoriti da je otvorena kugla u R^n sa centrom u tački a i poluprečnikom r i označavati ga sa $K(a,r)$.*

Definicija 2. *Za niz (x_n) tačaka iz R^n kažemo da konvergira ka tački $a \in R^n$ ako niz realnih brojeva $\rho(x_n,a)$ konvergira ka nuli, odnosno ako za svako $\epsilon > 0$ postoji n_0 tako da je za svako $n > n_0$ $\rho(x_n,a) < \epsilon$.*

Drugačije, niz (x_k) konvergira ka tački $a \in R^n$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji indeks k_0 tako da svi članovi niza počevši od $k_0 + 1$ leže u otvorenoj kugli sa centrom u tački a i poluprečnikom ϵ.

Primijetimo da kada posmatramo niz (x_k) tačaka iz R^n, onda mi zapravo imamo posla sa n nizova realnih brojeva $(x_k^1), \ldots, (x_k^n)$. Ako niz (x_k) konvergira ka tački $a = (a^1, \ldots, a^n)$, onda za $\epsilon > 0$ postoji k_0 tako da je za $k > k_0$

$$\rho(x_k,a) = \sqrt{(x_k^1 - a^1)^2 + (x_k^2 - a^2)^2 + \cdots (x_k^n - a^n)^2} < \epsilon.$$

Odavde (vidi relaciju (1)) slijedi da je za $k > k_0 |x_k^1 - a^1| < \epsilon$, $x_k^2 - a^2| < \epsilon, \ldots, |x_k^n - a^n| < \epsilon$, a to znači da nizovi realnih brojeva $(x_k^1), \ldots, (x_k^n)$ konvergiraju ka brojevima $a^1, \ldots, a^n$. Nije teško zaključiti da važi i obrnuto tvrđenje: ako nizovi realnih brojeva $(x_k^1), \ldots (x_k^n)$ konvergiraju redom ka brojevima $a^1, \ldots, a^n$, onda za $\epsilon > 0$ postoji broj k_1 tako da je za $k > k_1 |x_k^1 - a^1| < \frac{\epsilon}{n}$. Slično, postoje $k_2, \ldots, k_n$ tako da je za $k > k_1, |x_k^2 - a^2 + | < \frac{\epsilon}{n}, \ldots,$ za $k > k_n, |x_k^n - a^k| < \frac{\epsilon}{n}$. Neka je (x_k) niz tačaka iz R^n, gdje je $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ i $a = (a^1, \ldots, a^n)$. Tada, na osnovu relacije (1), slijedi da je za $k > k_0 == \max\{k_1, \ldots, k_n\}, \rho(x_k,a) < n \cdot \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$. To znači da niz (x_k) konvergira ka tački a.

Definicija 3. *Za tačku $a \in R^n$ kažemo da je granična tačka skupa $A \subseteq R^n$ ako u svakoj kugli $K(a,\epsilon)$ sa centrom u tački a i poluprečnikom $\epsilon > 0$, postoji bar jedna tačka $x \in A$ i bar jedna tačka $y \notin A$.*

Definicija 4. *Tačka a je tačka nagomolavanja skupa A ako u svakoj kugli $K(a,\epsilon)$ sa centrom u tački a i poluprečnikom $\epsilon > 0$ postoji bar jedna tačka $x \in A$ različita od a.*

Definicija 5. *Za tačku $a \in R^n$ kažemo da je unutrašnja tačka skupa A ako postoji otvorena kugla $K(a,\epsilon), \epsilon > 0$, tako da je $K(a,\epsilon) \subseteq A$.*

Skup svih graničnih tačaka skupa A označavamo sa $Fr\,A$.

Dalje, skup $Cl\,A := A \cup Fr\,A$ zovemo zatvaranjem skupa A. Skup unutrašnjih tačaka skupa A označavamo sa $int\,A$.

Definicija 6. *Za skup $A \subseteq R^n$ kažemo da je zatvoren ako $Fr\,A \subseteq A$.*

Definicija 7. *Za skup $A \subseteq R^n$ kažemo da je otvoren ako je $A = int\,A$.*

Definicija 8. *Svaki otvoreni skup $\mathcal{O}(a)$ koji sadrži tačku a zovemo okolina tačke a.*

Lako se dokazuje sledeći teorema:

Teorema 1. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) Skup A je zatvoren;

b) $A = Cl\,A$;

c) Ako je (x_n) niz tačaka iz skupa A koji konvergira ka tački a onda $a \in A$.

d) Skup $A^c := R^n \backslash A$ je otvoren.

Dokaz gornjih tvrđenja nećemo izvoditi-to prepuštamo čitaocu.

Lako se provjerava da je, naprimjer, skup $K(a,r) = \{x \in R^n : \rho(x,a) < r\}$ otvoren dok su skupovi $\bar{K}(a,x) = \{x \in R^n : \rho(x,a) \leq r\}$(zatvorena kugla) i $S(a,r) = \{x \in R^n : \rho(x,a) = r\}$ (sfera) zatvoreni. takođe se lako dokazuje da su skupovi $\emptyset$ i R^n istovremeno i zatvoreni i otvoreni. To su jedini takvi skupovi u R^n.

Nije teško zaključiti da je a granična tačka skupa A ako i samo ako postoji niz tačaka (x_n) iz skupa A koji konvergira ka a.

Definicija 9._Skup $A \subseteq R^n$ je ograničen ako postoji kugla $K(0,r)$ koja sadrži skup A._

Teorema _2. (Bolcano-Vajerštrasova teorema).Ako je niz (x_n) tačaka iz R^n ograničen onda postoji njegov podniz koji je konvergentan._

Dokaz teoreme ostavljamo čitaocu. Za dokaz se, inače, može koristiti Bolcano-Vajerštrasova teorema za niz realnih brojeva i činjenica da je niz tačaka iz R^n konvergentan ako i samo ako su konvergentni odgovarjući nizovi komponenata.

Definicija 10. _Skup $A \subseteq R^n$ je kompaktan ako savki niz (x_n) tačaka iz A sadrži podniz (x_{n_k}) koji konvergira ka tački koja pripada skupu A._

Teorema 3._Neka je $A \subseteq R^n$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:_

a) A je kompaktan skup;

b) Iz svakog pokrivača skupa A otvorenim podskupovima može se izdvojiti konačan potpokrivač ;

c) A je zatvoren i ograničen skup.

Napomenimo da familija $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ obrazuje pokrivač skupa A ako je $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Dokaz teoreme se suštinski ne razlikuje od dokaza odgovarajuće teoreme za skupove iZ R(takozvana Hajne-Borelova teorema).

Definicija 11._Skup $A \subseteq R^n$ je povezan ako za svake dvije tačke a_0 i a_1 iz skupa A postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : [0,1] \to R^n$ tako da je $\varphi(0) = a_0, \varphi(1) = a_1$ i $\varphi(t) \in A$ za svako $t \in [0,1]$._

Primijetimo da je grafik preslikavanja $\varphi : [0,1] \to R^n$ kriva u R^n, tako da možemo reći da je skup povezan ako za svake dvije tačke iz tog skupa postoji kriva koja ih spaja i leži u skupu.

Definicija 12._Za skup koji je otvoren i povezan kažemo da je oblast. Zatvaranje oblasti se naziva zatvorena oblast._

§3 Granična vrijednost i neprekidnost preslikavanja

Definicija 1. *Neka je $A \subseteq R^n, f : A \to R^m$ preslikavanje definisano na A i a tačka nagomilavanja skupa A. Tačka $b \in R^n$ je granična vrijednost (granična vrijednsot) funkcije f kada $x \to a, x \in A$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da za svako $x \in K(a, \delta) \cap A, f(x) \in K(b, \epsilon)$. Tada pišemo*

$$b = \lim_{A \ni x \to a} f(x).$$

Primijetimo da je kao specijalan slučaj naše definicije obuhvaćen i pojam granične vrijednosti realne funkcije više promjenljivih.

Važi sledeće tvrđnje*:*

Teorema 1. *Tačka $b \in R^m$ je granična vrijednost preslikavanja $f : A \to R^m$ kada $x \to a, x \in A$ ako i samo ako za svaki niz (x_n) tačaka iz A niz tačaka $(f(x_n)$ konvergira ka b.*

Dokaz formulisane teoreme je vrlo jednostavan i prepuštamo ga čitaocu.

Istovremerno sa graničnom vrijednošću preslikavanja u skladu sa definicijom 1 mogu se posmatrati i uzastopne granišne vrijednosti istog preslikavanja. Neka je $a = (a^1, \ldots, a^n)$ tačka nagomilavanja skupa A i $f : A \to R^n$. Pretpostavimo da postoji $\lim_{x^1 \to a^1} f(x^1, \ldots, x^n) = g(x^2, \ldots, x^n)$, za neki skup A' tačaka $(x^{,} \ldots, x^n)$ iz prostora R^{n-1}. Ako je $a' = (a^2, \ldots, a^n)$ tačka nagomilavanja skupa A' onda se može posmatrati $\lim_{x^2 \to a^2} g(x^2, \ldots, x^n) = \lim_{x^2 \to a^2} \lim_{x^1 \to a^1} f$ i t.d. Na kraju ćemo dobiti takozvanu uzastopnu graničnu vrijednost $\lim_{x^n \to a^n} \cdots \lim_{x^2 \to a^2} \lim_{x^1 \to a^1} f$ Jasno je da se u definuiciji uzastopne granične vrijednosti redosljed konvergencija $x^i \to a^i$ može izmijeniti i da za jednu te istu tačku a možemo posmatrati $n!$ uzastopnih graničnih vrijednosti. Prirodno se postavljaju sledeća pitanja: Da li su sve uzastopne granične vrijednostii jednake? Ako su sve uzastopne granične vrijednosti jednake b, da li odatle slijedi i da je $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$? Da li iz relacije $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ slijedi da je vrijednost slijedi da su sve uzastopne granične vrijednostri jednake? Odgovori na postavljena pitanja su, u opštem slučaju, negativni. To pokazuju i sledeći primjeri.

Primjer 1. Za funkciju $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ ne postoji (pokazati!), dok je $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0$.

Primjer 2. Za funkciju $f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}, \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)$ ne postoji dok je u isto vrijeme $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0$.

Uočimo da se zadavanjem preslikavanja $f : A \to R^m$ svakoj tački $x \in A$ pridružuje m-torka $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ realnih brojeva $f_1(x), \ldots, f_m(x)$. To znači da je zadavanje preslikavanje $f : A \to R^m$ ekvivalentno sa zadavanjem m-torke $(f_1, \ldots, f_m)$ funkcija $f_i : A \to R, i = 1, \ldots, m$. Kako je konvergencija u R^m ekvivalentna konvergenciji po komponentama, to važi sledeće tvrđenje :

Teorema 1. *Tačka $b = (b^1, \ldots, b^n) \in R^m$ je granična vrijednost preslikavanja $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to R^m$ kada $x \to a, x \in A$ ako i samo ako su brojevi $b^1, \ldots, b^m$ granične vrijednosti funkcija $f_1 : A \to R, \ldots, f_m : A \to R$ kada $x \to a, x \in A$.*

Definicija 3. *Preslikavanje $f : A \to R^m$ je neprekidno u tački $a \in A$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da za svako $x \in K(a, \delta) \cap A, f(x) \in K(f(a), \epsilon)$.*

Iz definicije slijedi da ako tačka $a \in A$ nije tačka nagomilavanja skupa A (tada kažemo da je a izolovana tačka skupa A onda je funkcija $f : A \to R^m$ neprekidna u a. Ako je a tačka nagomilavanja skupa A onda važi sledeći kriterijum neprekidnosti:

Teorema 2. *Neka je $a \in A$ tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq R^n$. Tada je funkcija $f : A \to R^m$ neprekidna u tački a ako i samo ako je $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = f(a)$.*

Dokaz teoreme je vrlo jednostavan.

I za neprekidnost funkcije važi tvrđenje analogno tvrđenju teoreme 1.

Teorema 3. *Preslikavanje $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to R^m$ je neprekidno u tački $a \in A$ ako i samo ako su $f_1 : A \to R, \ldots, f_m : A \to R$ neprekdne u $a \in A$.*

Teorema 4. *a) Neka su preslikavanja $f : A \to R^m$ i $g : A \to R^m$ neprekidna u tački $a \in A$. Tada je za sve $\alpha, \beta \in R$, preslikavanje $\alpha f + \beta g$ neprekidno u a.*

b) Neka je $A \subseteq R^n, B \subseteq R^m, f : A \to R^m, g : B \to R^l$, pri čemu je $B \supseteq f(A)$. Ako je preslikavanje f neprekidno u tački $a \in A$ a preslikavanje g neprekidno u tački $b = f(a)$, tada je kompozicija $h = g \circ f : A \to R^l$ neprekidno preslikavanje u tački a.

Dokaz. Dokazaćemo samo tvrđenje b). Neke je $\epsilon > 0$. Zbog neprekidnosti preslikavanja g u tački b postoji δ_1 tako da je za svako $y \in K(b, \delta_1) \cap B$ $g(y) \in K(g(b), \epsilon) = K(h(a), \epsilon)$. Dalje, zbog neprekidnosti funkcije f u tački a postoji δ tako da ako je $x \in K(a, \delta) \cap A$, onda $f(x) \in K(f(a), \delta_1) \cap B = K(b, \delta_1) \cap B$. Slijedi da je za svako $x \in K(a, \delta) \cap A$ $h(x) = g(f(x) \in K(h(a), \epsilon)$.

Definicija 4. *Preslikavanje $f : A \to R^m$ je neprekidno na skupu A ako je f neprekidno u svakoj tački skupa A.*

Za neprekidna preslikavanja važe sledeća trvrđenja :

Teorema 5. *Ako je $A \subseteq R^n$ kompaktan skup i ako je $f : A \to R^m$ neprekidno preslikavanje onda je i $f(A) \subseteq R^m$ kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je $(y_k), y_k = f(x_k)$ niz tačaka iz skupa $f(A)$. Uočimo niz (x_k). Zbog kompaktnosti skupa A, postoji podniz (x_{k_l}) niza (x_k) koji konvergira ka tački $x_0 \in A$. Medjutim, tada, zbog neprekidnosti preslikavanja f podniz (y_{k_l}) konvergira ka $f(x_0) \in f(A)$. Dakle, $f(A)$ je kompaktan skup.

Teorema 6. *Ako je $A \subseteq R^n$ povezan skup i ako je $f : A \to R^n$ neprekidno preslikavanje onda je i $f(A) \subseteq R^n$ povezan skup.*

Dokaz. Neka su $b_0 = f(a_0)$ i $b_1 = f(a_1), a_0, a_1 \in A$, tačke iz skupa $B = f(A)$. Tada, zbog povezanosti skupa A, postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : [0,1] \to R^n$, tako da je $\varphi(0) = a_0, \varphi(1) = a_1$. Medjutim, tada je preslikavanje $\psi = f \circ \varphi : [0,1] \to R^m$, kao kompozicija neprekidnih preslikavanja, neprekidno preslikavanje, pri čemu je $\psi(0) = f(\varphi(0)) = f(a_0) = b_0, \psi(1) = f(\varphi(1)) = f(a_1) = b_1$ i za svako $t \in [0,1], \psi(t) = f(\varphi(t)) \in f(A)$. Dakle, $f(A)$ je povezan skup.

Teorema 7 . *Ako je $A \subseteq R^n$ kompaktan skup i $f : A \to R$ neprekidna funkcija onda je f ograničena na A, i postoje tačke $a_0 \in A$ i $a_1 \in A$ tako da je $f(a_0) = \max\{f(x) : x \in A\}$ i $f(a_1) = \min\{f(x) : x \in A\}$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 5 slijedi da je $f(A)$ ograničen skup, odnosno postoji kugla $K(0, r)$ koja sadrži skup $f(A)$. No, to znači da je za svako $x \in A, |f(x)| \leq r$. Dalje, skup $f(A)$ je kompaktan, dakle i zatvoren. Odatle slijedi da $sup\, f(A) \in f(A)$ i $inf\, f(A) \in f(A)$, odakle slijedi tvrđenje teoreme.

Teorema 8. *Ako je $A \subseteq R^n$ oblast, $f : A \to R$ neprekidna funkcija i ako postoje tačke $a_0 \in A$ i $a_1 \in A$ tako da je $f(a_0) = b_0 \in R, f(a_1) = b_1 \in R$, tada za svaki realan broj b između b_0 i b_1 postoji tačka $a \in A$ tako da je $f(a) = b$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 7 slijedi da je $f(A)$ povezan skup u R, odnosno da je $f(A)$ interval. To znači da ako b_0 i b_1 pripadaju skupu $f(A)$ onda i broj b koji je između b_0 i b_1

pripada $f(A)$.

Definicija 5. *Za preslikavanje $f : A \to R^m$ kažemo da je ravnomjerno neprekidno na A ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da za svako $x', x" \in A$ za koje je $\rho(x', x) < \epsilon$ važi $\rho(f(x'), f(x")) < \epsilon$.*

Ako je preslikavanje ravnomjerno neprekidno na A tada je ono, očigledno neprekidno na A. Da preslikavanje koje je neprekidno na skupu ne mora biti ravnomjerno neprekidno pokazuje sledeći prost primjer: Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna na R ali nije ravnomjerno neprekidna na tom skupu.

Teorema *9. (Kantorova teorema).Ako je skup $A \subseteq R^n$ kompaktan a funkcija $f : A \to R^n$ neprekidna na A onda je f ravnomjerno nerprekidna na A.*

Dokaz. Pretpostavimo da f nije ravnomjerno neprekidno na A. Tada postoji $\epsilon_0 > 0$ tako da za svako k postoje tačke x_k i z_k iz skupa A za koje je $\rho(x_k, z_k) < \frac{1}{k}$ i $\rho(f(x_k), f(z_k)) \geq \epsilon_0$. Iz niza (x_k) možemo izdvojiti podniz (x_{k_l}) koji konvergira ka $x_0 \in A$. Tada važi

$$\rho(z_{k_l}, x_0) \leq \rho(z_{k_l}, x_{k_l}) + \rho(x_{k_l}, x_0) < \frac{1}{k_l} + \rho(x_{_l}, x_0),$$

odakle slijedi da $z_{k_l} \to x_0$. Zbog neprekidnosti funkcije f imamo da je $f(z_{k_l}) \to f(x_0)$ i $f(x_{k_l}) \to f(x_0)$ što je kontradiktorno sa $\rho(f(z_{k_l}), f(x_{k_l})) \geq \epsilon_0$. Teorema je dokazana.

§5 Diferencijabilna presklikavanja

Definicija 1. Neka je $D \subseteq R^n$ oblast i $\varphi : D \to R^n$. Ako je $a = (a^1, \dots, a^n)$ tačka iz oblasti $D, h = (h^1, \dots, h^n)$ tako da $a + h \in D$. Ako se razlika $\varphi(a+h) - \varphi(a)$ može pisati u obliku $A(h) + |h| \cdot \omega(h)$, gdje je $A : R^n \to R^m$ linearno preslikavanje a $R^{\ni}\omega(h) \to 0$ kada $h \to 0$, onda kažemo da je funkcija (preslikavanje) φ diferencijabilno u tački a.

Za preslikavanje A kažemo tada da je izvod preslikavanja φ u tački a i pišemo $A = \varphi'(a)$.

Zadatak. U definiciji izvoda figuriše $|h|$ i uslov $\omega(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Pokazati da niti pojam diferencijabilnosti niti pojam izvoda ne zavise od toga o kakavoj se tu normi radi.

Primijetimo da naša definicija obuhvata i slučajeve $n = 1$ I $m = 1$. Razmotrimo posebno slučaj $m = 1$. Tada imamo posla sa realnom funkcijom n promjenljivih. Linearno preslikavanje a tada ima oblik $Ah = \lambda_1 h^1 + \dots + \lambda_n h^n$, pa relacija pomoću koje se definiše diferencijabilnost glasi

$$f(a^1 + h^1, \dots, a^n + h^n) = f(a^1, \dots, a^n) + \lambda_1 h^1 + \dots + \lambda_n h^n + \mid h \mid \omega(h),$$

pri čemu $\omega(h) \to 0$ kada $h \to 0$.

Postavljajući $h^j = 0$ za $j \neq i$, dobijamo da je $\lambda_i = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \partial_i f(a)$ $i-$ti parcijalni izvod funkcije f u tački a. Zaključak je da važi sledeća.

Teorema 1. *Ako je funkcija $f : D \to R$ diferencijabilna u tački a onda postoje parcijalni izvodi te funkcije u istoj tački i važi formula*

$$f'(a)h = \partial_1 f(a) h^1 + \dots + \partial_n f(a) h^n.$$

S druge strane, funkcija $f(x, y) = (xy)^{\frac{1}{2}}$ ima parcijalne izvode u tački $(0, 0) : \partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$ ali nije diferencijabilna.

U vezi sa ovim pitanjem važi:

Teorema 2. *Neka je $D \subseteq R^n$ oblast i $f : D \to R$. Ako postoje parcijlani izvodi $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ u nekoj okolini tačke $a \in D$ i ako su ti parcijalni izvodi neprekidni u a, onda je funkcija f diferencijabilna u a.*

Dokaz ove značajne teoreme nećemo izvoditi - on bi čitaocima trebao da bude poznat iz ranijih kurseva Matematike.

Pretpostavimo sada da je $\varphi : D \to R^m$, gdje je $m > 1$. Ako sve ispišemo u koordinatnoj formi onda ćemo imati

$$\varphi(x) = \varphi(x^1, \dots, x^n) = (\varphi_1(x^1, \dots, x^n), \varphi_2(x^1, \dots, x^n), \dots, \varphi_m(x^1, \dots, x^n),$$

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = (\varphi_1(a^1+h^1, \dots, a^n+h^n) - \varphi_1(a^1, \dots, a^n), \dots, (\varphi_m(a^1+h^1, \dots, a^n+h^n) - \varphi_m(a^1, \dots, a$$

$$Ah + |h| \cdot \omega(h) = (a_{11}h^1 + \dots + a_{1n}h^n, \dots, a_{m1}h^1 + \dots + a_{mn}h^n) + +(|h|\omega^1(h), \dots, |h|w^m(h)) =$$

$$(a_{11}h^1 + \dots + a_{1n}h^n + |h|w^1(h), \dots, a_{m1}h^1 + \dots + a_{mn}h^n) + |h|\omega^m).$$

Ovo je ekvivalentno sa

$$\varphi_1(a^1 + h^1, \dots, a^n + h^n) - \varphi_1(a^1, \dots, a^n) = (a_{11}h^1 + \dots + a_{1n}h^n) + |h|w^1(h),$$

$\dots$

$$\varphi_m(a^1 + h^1, \dots, a^n + h^n) - \varphi_m(a^1, \dots, a^n) = (a_{m1}h^1 + \cdots + a_{mn}h^n) + |h|w^m(h),$$

pri čemu $w_1^(h) \to 0, \dots, w_m(h) \to 0$ kada $h \to 0$.

U gornjim formulama su zapisani uslovi iz definicije diferencijabilnosti i definicije izvoda funkcija $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Pri tome su a_{ij} parcijalni izvodi funkcije φ_i u tački a :

$$a_{11} = \frac{\partial\varphi_1(a^1, \dots, a^n)}{\partial x^1}, \dots, a_{mn} = \frac{\partial\varphi_m(a^1, \dots, a^n)}{\partial x^m}$$

.

Odavde slijedi

Teorema 3.*Preslikavanje $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) : D \to R^m$ je diferencijabilno u tački $a \in D$ ako i samo ako su odgovarajuća komponentna preslikavanja $\varphi_i : D \to R, i = 1, \dots, m$ diferenicijabilna u istoj tački.*

Tada očigledno postoje parcijalni izvodi $\partial_i\varphi_j(a)$ a izvod $\varphi'(a)$ preslikavanja φ u tački a je linearno preslikavanje koje se u standardnoj bazi reprezentuje matricom formata $m \times n$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1(a)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\phi_1(a)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial\phi_1(a)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\phi_1(a)}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\phi_m(a)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\phi_m(a)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Ova matrica se naziva Jakobijevom matricom i ponekad se označava sa $\frac{D(\varphi_1,\dots,\dots,\varphi_n)}{D(x^1,\dots,x^n)}$. Sasvim je prirodno da se izvod preslikavanja φ poistovjećuje sa Jakobijevom matricom u odgovarajućoj tački, onako kako se i inače u linearnoj algebri linearni operator poistovjećuje sa svojom matricom.

Utvrdimo nekoliko svojstava diferencijabilnih preslikavanja i njihovih izvoda.

Teorema 4.*Ako je funkcija $f : D \to R^m$ diferencijabilna u tački $a \in D$ onda je f neprekidna u a.*

Teorema 5.*Ako su funkcije $f : D \to R^m$ i $g : D' \to R^l$ diferencijabilne u tački $a \in D$ i ako su α i β proizvoljni realni brojevi, onda je i funkcija $h = \alpha f + \beta g$ difertencijabilna u a i $h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.*

Dokazi gornjh teroema su jednostavni i ostavljmo čitaocu da ih sam izvede.

Teorema 6.*Neka su $D \subseteq R^n$ i $D' \subseteq R^n$ oblasti i $f : D \to R^n, g : D' \to R^n$ funkcije definisane na tim oblastima, takve da je $D' \supseteq f(D)$. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački $a \in D$ a funkcija g diferenicijabilna u tački $b = f(a)$ onda je funkcija $F = g \circ f : D \to R^n$ diferencijabilna u tački a i pri tome je $F'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.*

Dokaz. Iz diferenicijabilnosti funkcije f slijedi da je $F(a + h) = g(f(a + h)) = g(f(a) + f'(a)h+ \mid h \mid \omega_1(h) = g(b + k)$, gdje je $b = f(a), k = f'(a)h+ \mid h \mid \omega_1(h)$. Pri tome $\omega_1(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Primijetimo da i je $\frac{|k|}{|h|} \leq \frac{|f'(a)h|}{h} + \omega_1(h)$ ograničena veličina kada $h \to 0$ i da dakle $k \to 0$ kada $h \to 0$. Dalje, zbog diferencijabilnosti funkcije g, imamo

$$g(b + k) = g(b) + g'(b)k + |k|\omega_2(k) = g(b) + g'(b)f'(a)h + g'(b) \mid h \mid \omega_1(h)+ \mid k \mid \omega_2(k).$$

Kada $h \to 0$ tada i $\omega_2(k) = \omega_2(f'(a)h + \mid h \mid \omega_1(h)) \to 0$. Tako daobijamo da je

$$F(a+h) = g(f(a) + g'(b)(f'(a)h) + \mid h \mid \omega(h) = F(a) + Ah + \mid h \mid \omega(h),$$

gdje je $A = g'(b) \circ f'(a)$ linearni operator (matrica tog operatora je proizvod matrica $g'(b)$ i $f'(a)$) a $\mid h \mid \omega(h) = g'(b) \mid h \mid \omega_1(h) + \mid k \mid \omega_2(k)$. Treba dokazati još da je $\omega(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Imamo da je

$$\omega(h) = g'(b)\omega_1(h) + (\frac{|k|}{|h|}\omega_2(k) \to 0 \text{ kada } h \to 0.$$

Teorema je dokazana.

Nas će u drugoj glavi posebno interesovati preslikavanja $\varphi : D \to R^n$, gdje je $D \subseteq R^n$, koja su diferenicajabilna u svakoj tački skupa D i koja imaju svojstvo da su svi parcijalni izvodi koji čine Jakobijevu matricu φ' neprekidne funkcije na D. Za takva preslikavanja ćemo govoriti da pripadaju klasi $C^1(D)$, ili da su neprekidno-diferencijabilna na D. Specijalno ćemo izdvojiti klasu takozvanih difeomorfnih preslikavanja.

Definicija 3. *Za preslikavanje $\varphi : D \to D'$, gdje su $D \subseteq R^n$ i $D' \subseteq R^n$ otvoreni skupovi, kažemo da je difeomorfizam ako je bijektivno i ako $\varphi \in C^1(D)$ a $\varphi^{-1} \in C^1(D')$.*

II GLAVA

VIŠESTRUKI INTEGRALI

U ovom poglavlju ćemo definisati integral funkcije $f : A \to R$, koja je definisana na skupu $A \subseteq R^n$. Nas će posebno interesovati slučajevi $n = 2$ i $n = 3$, ali ćemo definiciju integrala dati u opštem slučaju. Povremeno ćemo komentarisati i slučaj $n = 1$, kao poseban (a od ranije poznat) slučaj naših opštih razmatranja. Kao što je površina krivolinijskog trapeza geometrijska interpretacija integrala funkcije jedne promjenljive tako zapremina krivolinijskog kvadra može služiti kao geometrijska interpretacija integrala funkcija dvije promjenljive. Kao ilustracija integrala funkcije od tri promjenljive može poslužiti masa nehomogenog tijela. U definicajama i u izvođenju zaključaka mi ćemo ove interpretacije integrala često naglašavati. U početku ćemo pretpostaviti da je A paralelepiped u R^n. To znači da će A biti interval za $n = 1$, pravougaonik za $n = 2$ i kvadar za $n = 3$. Kasnije ćemo nasa razmatranja prirodno proširiti i na neke druge skupove.

§1. Interval u R^n. Mjera intervala. Podjela intervala

Pretpostavaimo da su $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ i $b = (b^1, b^2, \dots, b^n)$ tačke u R^n i da je $a^1 \le b^1, a^2 \le b^2, \dots, a^n \le b^n$.

Definicija 1. *Skup* $\{x = (x^1, \dots, x^n) \in R^n : a^1 \le x^1 \le b^1, \dots, a^n \le x^n \le b^n\}$ *nazivamo intervalom ili paralelepipedom u* R^n.

Pored termina "paralelepiped u R^n"ili interval u R^n"kao sinonime ćemo koristiti i termine "n-dimenzionalni paralelepipped"i "n-dimenzionalni interval". Paralelepiped I u R^n koji je određen tačkama $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ i $b = (b^1, b^2, \dots, b^n)$ možemo zapisati kao Dekartov proizvod jednodimenzionalnih intervala: $I = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$. Ponekad ćemo taj paralelepiped označavati sa $[a, b]$. Jasno je da se, za $n = 1$, pojam intervala iz definicije 1 poklapa sa pojmom zatvorenog intervala (odsječka, segmenta) na realnoj pravoj. Interval $\{(x, y) \in R^2 : a^1 \le x \le b^1, a^2 \le y \le b^2\}$ u R^2 je (zatvoreni) pravougaonik a interval $\{(x, y, z) \in R^3 : a^1 \le x \le b^1, a^2 \le y^2 \le b^2, a^3 \le z \le b^3\}$ u R^3 je (zatvoreni) kvadar (v.sliku).

Definicija 2. *Mjera n-dimenzonog paralelepipeda* $I = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ *je broj* $\mu(I) = (b^1 - a^1) \cdots (b^n - a^n)$.

Za $n = 1$, mjera intervala je njegova dužina, za $n = 2$ mjera pravougaonika je njegova površina a za $n = 3$ mjera kvadra je njegova zapremina.

Istaknimo još jednom da se i u ovoj definiciji pretpostavlja da je $a^i \le b^i$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Odatle slijedi da je $\mu(I) \ge 0$ i da je $\mu(I) = 0$ ako i samo ako je $a^i = b^i$ za barem jedno $i \in \{1, \dots, n\}$. Dalje, ako su $I_{,1}, \dots, I_k$ intervali u R^n i ako je $I = I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k$ onda je $\mu(I) \le \mu(I_1) + \dots + \mu(I_k)$. Pri tome je $\mu(I) = \mu(I_1) + \dots + \mu(I_k)$ ako i samo ako nikoja dva intervala I_i i I_j nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Formulisna tvrđenja se dokazuju jednostavno i dokaze ostavljamo čitaocu, kao vježbu.

Za izgradnju pojma integrala potrebno je, slično kao kod jednodimenzionalnih integrala, definisati podjele intervala u n-dimenzionom prostoru. Podjela jednodimenzionog intervala $[a, b]$ se definiše tako što se zadaju tačke $x_0, x_1, \dots, x_k$ tako da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, a zatim se za intervale $[x_0, x_1], \dots, [x_{k-1}, x_k]$ kaže da obrazuju podjelu intervala $[a, b]$, određenu tačkama $x_0, \dots, x_k$.

Definicija 3. *Ako je* $I = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ *n-dimenzioni interval i ako se koordinatni jednodimenzionalni intervali* $[a^1, b^1], \dots, [a^n, b^n]$ *podijele redom na* $k_1, \dots, k_n$ *inter-*

vala, onda su Dekartovi proizvodi oblika $[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_n,\beta_n]$ *(ima ih* $k=k_1\cdot k_2\cdots k_n$*,) gdje su* $[\alpha_1,\beta_1],\cdots,[\alpha_n,\beta_n]$ *intervali podjele koordinatnih intervala* $[a^1,b^1],\cdots,[a^n,b^n]$*, pri čemu je* $[\alpha_1,\beta_1]\subseteq[a^1,b^1],\cdots,[\alpha_n,\beta_n]\subseteq[a^n,b^n]$*, n-dimenzioni intervali* $I_1,I_2,\ldots,I_k$ *koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i čija je unija interval* I*. Tada se kaže da intervali* $I_1,I_2,\ldots,I_k$ *obrazuju podjelu intervala* I *i da je ta podjela inducirana (realizovana, podstaknuta) odgovarajućim podjelama koordinatnih intervala (vidi sliku 1).*

Definicija 4. *Ako je* $P=\{I_1,\ldots,I_k\}$ *podjela intervala* I *onda broj* $\lambda(P)=\max_{1\le j\le k} diam(I_j)$*, gdje je* $diam(A):=\sup\{|x-y|:x,y\in A\}$*, zovemo dijametar ili parametar podjele* P*.*

Definicija 5. *Ako je* $P=\{I_1,\ldots,I_k\}$ *podjela intervala* I *a* $\xi_1,\ldots,\xi_k$ *tačke takve da* $\xi_i\in I_i, i=1,\ldots,k$*, reći ćemo da par* $(P;\xi)$ *obrazuje podjelu* P *intervala* I *sa izabranim (markiranim) tačkama* $\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$*.*

§2. Integral funkcije definisane na intervalu $I\subseteq R^n$

Pretpostavimo da je I n-dimenzionalni interval i da $f:I\to R$ realna funkcija definisana na I. Neka je $P=\{I_1,\ldots,I_k\}$ podjela intervala I sa markiranim tačakama $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$. Sumu

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\mu(I_i) \qquad 1$$

zovemo integralana suma funkcije f za podjelu (P,ξ). Jasno je da suma $\sigma(f,P,\xi)$ zavisi i od intrvala I, ali mi to u oznakama nećemo posebno naglašavati, jer je ta zavisnost posredno iskazana zadavanjem podjele P. Primijetimo da ako je $\mu(I)=0$, onda je i mjera svakog podeonog intervala jednaka 0, pa je i $\sigma(f,P,\xi)=0$. Mi ćemo u daljem, ako posebno nije drugačije naglašeno, pretpostavljati da je $\mu(I)>0$.

Ako funkcija f nije ograničena sa gornje (donje) strane onda za svaki realan broj a i za svaku podjelu P intervala I postoji izbor tačaka ξ tako da je $\sigma(f,P,\xi)>a,(\sigma(f,P,\xi)<a$. Ako je funkcija f ograničena i ako je $(\forall x\in I)m\le f(x)\le M$, onda je, očigledno, za svaku podjelu P i svaki izbor tačaka ξ, $m\cdot\mu(I)\le\sigma(f,P,\xi)\le M\cdot\mu(I)$.

Zajedno sa sumom $\sigma(f,P,\xi)$ posmatraćemo i sume

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{k} m_i\mu(I_i)\ S(f,P)=\sum_{i=1}^{k} M_i\mu(I_i).$$

gdje je $m_i=\inf\{f(x):x\in I_i\},M_i=\sup\{f(x):x\in I_i\}$. Sume $s(f,P)$ i $S(f,p)$ zovemo *donja* i *gornja integralna suma funkcije* f *za podjelu* P. One očigledno ne zavise od izbora tačaka ξ. Za svako $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ važi: $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$. Odavde slijedi da je $s(f,P)\le\sigma(f,P,\xi)\le S(f,P)$, za svaku podjelu P i svaki izbor tačaka ξ. Ako je funkcija f ograničena sa gornje strane i ako je $f(x)\le M$ za svako $x\in I$, onda je $M_i\le M$ i $S(f,P)\le M\cdot\mu(I)$. Dakle, tada je broj $S(f,P)$ konačan za svaku podjelu P. Ako funkcija f nije ograničena sa gornje strane onda za svaku podjelu P intervala I postoji interval I_l tako da je $M_l=+\infty$. Odavde slijedi da je tada $S(f,P)=+\infty$. Slični zaključci važe i za donje integralne sume: ako je funkcija f ograničena sa donje strane $(f(x)\ge m)$, onda je broj $s(f,P)$ konačan i $s(f,P)\ge m\cdot\mu(I)$. Ako funkcija f nije ograničena sa donje strane, onda je za svaku podjelu P $s(f,P)=-\infty$. Odnos integralne sume i gornje i donje sume preciznije se reguliše u sledećem tvrđenju:

Lema 1. $s(f,P) = \inf_\xi \sigma(f,P,\xi), S(f,P) = \sup_\xi \sigma(f,P,\xi)$.

Dokaz. Ako je $\mu(I) = 0$, onda su sve sume jednake nuli i tada nemamo šta dokazivati. Pretpostavimo, zato, da je $\mu(I) > 0$. Dokazaćemo samo dio tvrđenja koji se odnosi na gornju sumu. Za donju sumu dokaz je simetričan. Ako funkcija f nije ograničena sa gonje strane onda su obje strane u jednakosti $S(f,P) = \sup_\xi \sigma(f,P,\xi)$ jednake $+\infty$ i jednakost je tačna. Neka je funkcija f ograničena sa gornje strane i neka je $\epsilon > 0$ zadato. Tada postoji izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ tako da je $f(\xi_i) \leq M_i \leq f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{k\mu(I_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Množeći ove nejednakosti sa $\mu(I_i)$ i sabirajući ih, dobijamo da je $\sigma(f,P,\xi) \leq S(f,P) \leq \sigma(f,p,\xi) + \epsilon$. Odavde slijedi da je $S(f,P) = \sup_\xi \sigma(f,P,\xi)$.

Definicija 1. *Broj $\mathcal{J}$ je granična vrijednost integralnih suma $\sigma(f,P,\xi)$ kada dijametar podjele $\lambda(P) \to 0$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da za svaku podjelu P čiji je dijametar $\lambda(P) < \delta$ važi $\sigma(f,P,\xi) - \mathcal{J}| < \epsilon$.*

Tada pišemo $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \mathcal{J}$.

Definicija 2. *Za funkciju $f : I \to R$ kažemo da je integrabilna na intervalu I ako postoji realan broj $\mathcal{J}$ tako da je $\lim_{\lambda(p)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \mathcal{J}$.*

Za broj $\mathcal{J}$ kažemo tada da je integral funkcije f na intervalu I.

Za integral funkcije f na intervalu I koristimo sledeće oznake: $\int f, \int f(x)dx$, a kada želimo da naglasimo da se radi o integralu funkcije n promjenljivih na n-dimenzionom intervalu, onda pišemo $\int_I f(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1 dx^2 \cdots dx^n$, odnosno $\int \cdots_I \int f(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1 dx^2 \cdots dx$

Dakle, definiciju integrala funkcije $f : I \to R$ možemo iskazati sledećom relacijom

$$\int f := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) \tag{2}$$

gdje znak ":="označava jednakost po definiciji.

U vezi sa terminima integrabilnost i intergral funkcije treba napomenuti da postoje i drugačiji pristupi i definicije ovih pojmova. Zbog toga se kaže da se ovdje radi o integerabilnosti i integralu po Rimanu (Riemann) odnosno o Riman-integrabilnosti i Rimanovom integralu funkcije. Klasu funkcija integrabilnih na I označićemo sa $\mathcal{R}(I)$.

Postavićemo i prvo pitanje: koje sve funkcije pripadaju klasi $\mathcal{R}(I)$? Djelimičan odgovor na ovo pitanje pruža sledeća teorema .

Teorema 1. *Ako je funkcija $f : I \to R$ integrabilna na I onda je ona ograničena na istom intervalu.*

Ako sa $\mathcal{B}(I)$ označimo klasu funkcija ograničenih na I (što je i inače uobičajena oznaka), onda iskaz teoreme možemo zapisati i na sledeći način: $\mathcal{R}(I) \subseteq \mathcal{B}(I)$.

Dokaz. Neka funkcija $f : I \to R$ nije ograničena i neka je $\mathcal{S}$ realan broj, $\epsilon = 1$ i $a = \mathcal{S} + 1$. Za svaku podjelu P postoji izbor tačaka ξ tako da je $\sigma(f,P,\xi) > a$. Tada je $|\sigma(f,P,\xi) - \mathcal{S}| = \sigma(f,P,\xi) - \mathcal{S} > 1 = \epsilon$. To znači da broj $\mathcal{S}$ ne može biti granična vrijednost integralnih suma. Odavde slijedi da funkcija f nije integrabilna. To dalje znači da je skup integrabilnih funkcija podskup skupa ograničenih funkcija.

Sledeći primjer pokazuje da je skup $\mathcal{R}(I)$ pravi dio skupa $\mathcal{B}(I)$.

Primjer 1. Neka je $I = [0,1] \times [0,1]$ i

$$D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x, y \in Q \cap [0,1] \times [0,1] \\ 0, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \setminus Q \end{cases}$$

Funkcija koja je ovdje definisana je dobro poznata Dirihleova funkcija. (Q je skup racionalnih brojeva). Dirihleova funkcija je, očigledno, ograničena. Za svaku podjelu P kvadrata I možemo napraviti takav izbor tačaka ξ tako da su koordinate svake od njih racionalne ali možemo napraviti i izbor ξ' tako da su koordinate svake tačke iracionalne. Tada je $\sigma(f,P,\xi) = 1$ i $\sigma(f,P,\xi') = 0$. Ako je $\epsilon = \frac{1}{3}$ i $\mathcal{S}$ proizvoljan broj, onda je $|\sigma(f,P,\xi) - \mathcal{S}| + |\mathcal{S} - \sigma(f,P,\xi')| > |\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P,\xi')| = 1$, pa je bar jedan od sabiraka $|\sigma(f,P,\xi) - \mathcal{S}|$ i $|\sigma(f,P,\xi') - \mathcal{S}|$ veći od $\frac{1}{2}$, odnosno veći od ϵ. Ne postoji granična vrijednost inetgralnih suma, pa dakle Dirihleova funkcija nije integrabilna.

Primjer 2. Neka je funkcija $f(x) = c$, gdje je c konstanta. Tada je za svaku podjelu P i svaki izbor tačaka $\xi, \sigma(f,P,\xi) = c\sum_{i=1}^{k}\mu(I_i) = c\mu(I)$. Granična vrijednost integralnih suma jednaka je $c\mu(I)$ odnosno $\int f = c \cdot \mu(I)$.

Pitanju integrabilnosti vratićemo se kasnije. A sada ponovo razmotrimo donje i gornje sume. Vidjeli smo da ako funkcija f nije ograničena onda su ili gornje ili donje sume beskonačne. Zato ćemo u daljim razmatranjima pretpostaviti da je funkcija $f : I \to R$ ograničena na I. Ako je $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in I$, onda je za svaku podjelu P $m\mu(I) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M\mu(I)$. Odavde slijedi da je skup svih donjih suma (to je poskup skupa realnih brojeva) koje se dobijaju tako što se prave sve moguće podjele P, ograničen. Sličan zaključak, naravno, važi i za skup svih gornjih suma. A ograničeni skupovi brojeva u R imaju i infimum i supremum. Zato je sledeća definicija korektna, bar za ograničene funkcije.

Definicija 3. *a) Supremum skupa svih mogućih donjih suma $s(f,P)$ zovemo donji integral funkcije f na skupu I;*

b) Infimum skupa svih mogućih donjih suma $S(f,P)$ zovemo gornji integral funkcije f na skupu I.

Donji i gornji integral funkcije f na skupu I označavaćemo sa $\underline{\int} f$ i $\overline{\int} f$, uz korišćenje i drugih oznaka sličnih onima za integral. Definiciju donjeg, odnosno gornjeg integrala možemo zapisati na sledeći način:

$$\underline{\int} f := \sup_P s(f,P); \overline{\int} f := \inf_P S(f,P).$$

Dosadašnje pojmove i konstrukcije ilustrovaćemo na nekoliko primjera.

Primjer 3. Neka je $I = [a,b]$ jednodimenzioni interval i $f : I \to R$ nenegativna funkcija. Neka je interval I podijeljen tačkama $x_0, x_2, \ldots, x_k$, pri čemu je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Proizvodi $M_j\mu(I_j) = M_j(x_j - x_{j-1})$ je površina pravougaonika. Na slici 1a) šrafirano je predstavljena površina koja odgovara gornjoj sumi. Slično se geometrijski interpretira donja suma (slika 1b) i integralna suma $\sigma(f,P,\xi)$ (slika 1c). Posmatrajmo šta se dešava kada se napravi nova podjela intervala I, dodavanjem novih podeonih tačaka (slike 2a, 2b i 2c). Gornja suma se smanjila, donja uvećala a integralna suma se ne razlikuje mnogo od gornje i donje sume ni pri jednom izboru tačaka ξ. Kad se dijametar podjele (maksimalna dužina $x_j - x_{j-1}$ približava ka nuli (bar geometrijska intuicija tako govori) integralne sume će konvergirati ka površini krivolinijskog trapeza ograničenog odsječkom $[a,b]$, pravama $x = a$ i $x = b$ te grafikom funkcije $y = f(x)$. Zapravo, mi površinu krivolinijskog trapeza i definišemo pomoću integrala. I govorićemo da krivolinijski trapez ima površinu ako je funkcija f integrabilna. Što se tiče gornjih suma, svaka od njih je veća od površine krivolinijskog trapeza. Infimum svih donjih suma takođe ne može biti veća od iste površine. Slično, donje sume su manje od površine krivolinijskog trapeza, pa je takav i supremum donjih suma. Geometrijska intuicija nam govori da bi možemo očekivati da će supremum donjih suma (dakle donji integral) biti jednak infimumu gornjih suma (gornjem integralu).

Primjer 4. Neka je $I = [a, b] \times [c, d]$ pravougaonik i $f : I \to R$ nenegativna funkcija. Kako bismo mogli definisati zapreminu krivog kvadara ograničenog pravougaonikom I, ravnima $x = a, x = b, y = c, y = d$ i površi $z = f(x, y)$? Ako je $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ a $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ odgovarajući izbor tačaka, onda su sabirci $f(\xi_i)\mu(I_i), m_i\mu(I_i), M_i\mu(I_i)$ zapremine kvadara. Integralna suma $\sigma(f, P, \xi)$ bi mogla biti jedna aproksimacija zapremine krivolinijskog kvadra. Slično kao u prethodnom primjeru, donja suma $s(f, P)$ i gornja suma $S(f, P)$ su takođe aproksimacije zapremine krivolinijskog kvadra, pri čemu je svaka donja suma manja a gornja veća od te zapremine. Sitnijom podjelom pravougaonika I, sume $\sigma(f, P, \xi), s(f, P) i S(f, P)$ bolje aproksimiraju zapreminu krivog kvadra. Zapreminu krivog kvadra ćemo definisati kao graničnu vrijednost integralnih suma, dakle kao integral funkcije f. S druge strane očekujemo da će supremum svih donjih suma i infimum svih gornjih suma biti jednaki istoj zapremini.

Primjer 4. Posmatrajmo materijalni kvadar $I \subseteq R^n$ i postavimo pitanje određivanja mase tog tijela. Pretpostavimo da je gustina definisana funkcijom $f : I \to R$. Podijelimo kvadar na intervale $I_1, I_2, \ldots, I_k$ i izaberimo tačke $\xi_1 \in I_1, \xi_2 \in I_2, \ldots, \xi_k \in I_k$. Ako pretpostavimo da su dijametri intervala dovoljno mali i da se gustina mijenja neprekidno, onda se dio skoncentrisan u intervalu I_i može smatrati skoro homogenim, a njegova masa iznosi približno $f(\xi_i)\mu(I_i)$. Integralna suma $\sigma(f, P, \xi)$ aproksimira masu i mi zapravo masu i definišemo kao graničnu vrijednost integralnih suma odnosno kao integral gustine f. Dalje, donje i gornje sume aproksimiraju istu masu ali tako da je svaka donja suma manja a gornja veća od mase tijela. Sitnjenjem podjela donje sume se uvećavaju a gornje rastu. Izgleda logično da će supremum donjih, odnosno infimum gornjih suma biti jednaki masi tijela odnosno integralu gustine. Naravno,opet pod pretpostavkom da je funkcija gustine integrabilna na I.

Na sasvim sličan način se pokazuje da se i količina naelektrisanja raspoređenog po kvadru $I \subseteq R^n$ računa kao $\int q(x)dx$, gdje je q funkcija gustine naelektrisanja.

Interpretacije pojma integrala koje smo razmotrili u ovim primjerima mogu nam pomoći da bolje razumijemo tvrđenja, konstrukcije i dokaze koji slijede.

Podjele intervala u R^n se realizuje tako što se prethodno podijele koordinatni intervali pa se prave Dekartovi proizvodi ovih podeonih koordinatnih intervala. Ako je na taj način realizovana podjela $P = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ i ako skupu tačaka pomoću kojih su dijeljeni koordinatni intervali, dodaju nove podeone tačke onda će neki od intervala $I_1, I_2, \ldots, I_k$ biti podijljeni na više intervala. Za novu podjelu koja je nasatala na opisani način kažermo da je nastale usitnjavanjem podjele P ili da je sitnija od podjele P.

Lema 2. *Neka je $f : I \to R$ funkcija definisana na intervalu $I \subseteq R^n$*

a) Ako su P i Q podjele intervala I i ako je podjela Q nastala usitnjavanjem podjele P onda važe sledeće relacije:

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, Q).$$

b) Ako su P i Q dvije proizvoljne podjele intervala I onda je $s(f, P) \leq S(f, Q)$.

c) Postoje donji i gornji integral funkcije f na intervalu I i

$$\underline{\int} f \leq \overline{\int} f.$$

Dokaz. tvrđenja a) i b) važe i ako funkcija f nije ograničena. No, to, za nas, nije važan slučaj i mi ćemo u daljem podrazumijevati da je funkcija f ograničena osim ako eksplicitno ne istaknemo da funkcija f može biti i neograničena.

U tvrđenju a) srednja nejednakost $s(f,Q) \leq S(f,Q)$ je već ranije isticana i dokazivana. Dokažimo prvu nejednakost: $s(f,P) \leq s(f,Q)$. Uočimo da ako je $A \subseteq B$ onda je $\inf_B f \leq \inf_A f$. Odavde slijedi da ako je interval I_l podijeljen na intervale $I_{l_1}, I_{l_2}, \dots, I_{l_p}$ onda je $m_l := \inf_{I_l} f \leq \inf_{I_l} f$ za $j = 1, 2, \dots p$. To dalje znači da je

$$m_l\mu(I_l) = m_l(\mu(I_{l_1} + \cdots + \mu(I_{l_p}) \leq m_{l_1}\mu(I_{l_1}) + \cdots + m_{l_p}\mu(I_{l_p}).$$

Možemo izvesti zaključak da ako je prelaskom sa podjele P na sitniju podjelu Q izvršena podjela intervala I_j, onda se u donjoj integralnoj sumi onaj dio koji se odnosi na interval I_j ili uvećao ili ostao isti. Dakle, sitnjenjem se i donja suma ili uveća ili ostane ista. Dokazana je i prva nejednakost (1). Što se tiče treće nejednakosti ona se dokazuje na sličan način. Uoči se da ako je $A \subseteq B$ onda je $\sup_B f(x) \geq \sup_A f$. Odavde se zaključuje da ako se sa podjele P pređe na sitniju podjelu Q onda će se gornja suma ili smanjiti ili ostati ista. tvrđenje a) je dokazano.

b) Neka su P i Q dvije podjele intervala I. One su proizvedene podjelama koordinatnih odsječaka. Ako koordinatne odsječke sada podijelimo tako što objedinimo sve podeone tačke na koordinatnim odsječcima pomocu kojih su konstruisane podjele P i Q, pa pomocu tih podeonih tačka konstruišemo novu podjelu R (v.sl.), onda će podjela R biti sitnija i od podjele P od podjele Q. Slijedi (koristeći svojstvo a)) da je $s(f,P) \leq s(f,R) \leq S(f,R) \leq S(f,Q)$. tvrđenje b) je dokazano.

c) Kako je ranije primećeno a i iz dokazanog slijedi da ako je P podjela intervala I, onda je $m\mu(I) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M\mu(I)$, gdje su m i M realni brojevi takvi da je $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in I$. Skupovi svih mogućih donjih i svih mogućih gornjih suma su ograničeni pa postoje $\sup s(f,P)$ i $\inf S(f,P)$. Iz relacije dokazane u b) a prema definiciji supremuma slijedi da je za svaku podjelu Q $\sup s(f,P) \leq S(f,Q)$. Odavde, prema definiciji infimuma imamo da je $\sup s(f,P) \leq \inf S(f,Q)$, odnosno $\underline{\int}_I f \leq$ $overline \int_I f$.

Ustanovimo konačno vezu između integrala s jedne strane i gornjeg i donjeg integrala s druge strane. Ono što smo u primjerima mogli naslutiti sada možemo dokazati u opštem slučaju.

Teorema 2.*Neka je funkcija $f : I \to R$ integrabilna na I. Tada je*

$$\int f = \overline{\int} f = \underline{\int} f.$$

Dokaz. Iz pretpostavke o integrabilnosti slijedi da je funkcija f ograničena i da postoje njen donji i gornji integral. Neka je $\epsilon > 0$. Postoji podjela P tako da je za svaki izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ $\int f - \epsilon < \sigma(f, P, \xi) < \int f + \epsilon$. Na osnovu leme 1 o odnosu integralne i donje gornje sume, slijedi da postoji podjela P $\int_I f - \epsilon \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \int_I f + \epsilon$. Odavde slijedi da je supremum svih donjih suma (donji integral) veći ili jednak od $\int_I f - \epsilon$ i da je infimum svih gornjih suma (gornji integral) manji ili jednak od $\int_I f + \epsilon$. Tako se dobija da je

$$\int_I f - \epsilon \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq \int_I f + \epsilon.$$

Odavde slijedi da je

$$|\int_I f - \underline{\int}_I f| \leq \epsilon, \quad |\overline{\int_I} f| \leq \epsilon.$$

Kako ove relacije važe za svako $\epsilon > 0$, i kako ne postoji pozitivan broj koji je manji ili jednak od svakog drugog pozitivnog broja, to

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f = \int_I f$$

Teorema je dokazana.

Dokazaćemo da važi i obrnuto tvrđenje: ako su gornji i donji integral jednaki onda je funkcija integrabilna. Da bismo taj dokaz izveli prethodno ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrđenja o gornjim odnosno donjim sumama.

Teorema 3. *Neka je funkcija $f : I \to R$ ograničena. Ako je $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ onda je funkcija f integrabillna na I.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je granična vrijednost gornjih suma kada dijametar podjele teži nuli jednaka gornjem integralu. Primijetimo da ako je $\sup_I f = \inf_I f f$, onda je funkcija f konstanta, sve gornje sume sujednake i njihova granična vrijednost jednaka je gornjem integralu. Pretpostavimo da je $\sup_I f > \inf_I f$. Uočimo šta se dešava kada se podeonim tačkama neke podjele P' doda još jedna tačka. Neki intervali stare podjele se dijele na po dva intervala. Neka je P" nova podjela. Ocijenimo razliku $S(f, P') - S(f, P")$. Ova razlika je, očigledno, nenegativna. Dalje, kada računamo ovu razliku, onda će se sabirci koji odgovaraju intervalima podjele P' koji nijesu dijeljeni poništiti. Za ostale sabirke razlika se može ocijeniti tako što se prethodno uoči da su svi supremumi M_i koji se pojavljuju u bilo kojoj podjeli manji ili jednaki od broja $M = \sup_I f$ a veći ili jednaki od $m = \inf_I f$. Ako sa $\sum'$ označimo sumu po indeksima koji odgovaraju intervalima zahvaćenim podjelom, imaćemo da je

$$(M - m) \sum' \mu(I_j) \leq (M - m) \lambda(P') \, diam(I)^{n-1}.$$

Ako se doda m novih tačaka onda ćemo imati

$$0 \leq S(f, P') - S(f, P") \leq (M - m) m \lambda(P) \, diam(I)^{n-1}.$$

Neka je sada $\epsilon > 0$. Iz definicije gornjeg integrala slijedi da postoji podjela Q intervala I tako da je $S(f, Q) < \overline{\int}_I f + \frac{\epsilon}{2}$. Razmotrimo podjelu P čiji je dijametar $\lambda(P) < \delta = \frac{\epsilon}{2(M-m) q \, diam(I)}^{n-1})$, gdje je q broj podeonih tačaka pomoću kojih je proizvedena podjela

Q. Neka je R podjela intervala I koja se dobija na taj način što se objedine podeone tačke koordinatnih intervala podjela P i Q. Podjela R je usitnjenje i podjele P i podjele Q i njen dijametar $\lambda(R)$ je manji od δ. Pri tome je $S(f,R) \leq S(f,Q) < \overline{\int_I} f + \frac{\epsilon}{2}$. Ocijenimo razliku $S(f,P) - S(f,R)$. Podjelu R ćemo posmatrati kao usitnjenje podjele P dodavanjem tačaka podjele Q. Novih podeonih tačaka ima najviše q. Tada je $S(f,P) - s(f,R) \leq (M - m)q\lambda(P)\, diam(I) n - 1$. Kako je $\lambda(P) < \delta$ onda je $S(f,P) - S(f,R) < \frac{epsilon}{2}$. Odavde slijedi da je $0 \leq S(f,P) - \overline{\int_I} f < \epsilon$. Dokazali smo, dakle, da ako je dijametar podjele $\lambda(P)$ manji od δ onda je razlika između gornjeg integrala i odgovarajuće gornje sume manja od ϵ. To znači da je $\overline{\int_I} f = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$. Na sličan način se dokazuje i odgovarajuće tvrđenje o donjem integralu. Vratimo se sada na dokaz teoreme. Pretpostavljamo da su gornji i donji integral jednaki. Pri tome je $s(f,P) \leq \sigma(f,P,\xi) \leq S(f,P)$. Gornja i donja suma konvergiraju istoj graničnoj vrijednosti $\mathcal{J}$. To znači da ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da ako je $\lambda(P) < \delta$ onda interval $(\mathcal{J} - \epsilon, \mathcal{J} + \epsilon)$ sadrži i $s(f,P)$ i $S(f,P)$. Broj $\sigma(f,P,\xi)$ se nalazi između ova gornje i donje sume, pa za $\lambda(P) < \delta$ interval $(\mathcal{J} - \epsilon, \mathcal{J} + \epsilon)$ sadrži integralnu sumu $\sigma(f,P,\xi)$ bez obzira na izbor tačaka ξ. Teorema je dokazana.

§3. **Klasa integrabilnih funkcija**

Iz prethodnih razmatranja slijedi da se integral može definisati na dva ekvivalentna načina: kao graničnu vrijednost integralnih suma odnosno posredstvom gornjih i donjih suma i gornjeg i donjeg integrala. To nam omogućava da u dokazima koja slijede nekada koristimo jedan a nekada drugi pristup. Ranije smo vidjeli da postoje funkcije koje su integrabilne ali i one koje nijesu integrabilne (Dirihleova funkcija). Ovdje ćemo preciznije opisati klasu funkcija integrabilnih na intervalu.

Teorema 1._Ograničena funkcija $f : I \to R$ je integrabilna ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji podjela P intervala I tako da je $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$._

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f integrabilna. Tada su donji i gornji integral jednaki. Označimo sa $\mathcal{J}$ oba ova integrala. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji podjela P' intervala I tako da je $S(f,P') < \mathcal{J} + \frac{\epsilon}{2}$ i postoji podjela P" tako da je $s(f,P") > \mathcal{J} - \frac{\epsilon}{2}$. To znači da je razlika $0 \leq S(f,P') - s(f,P) < \epsilon$. Ako se pređe na novu podjelu P koja je sitnija i od podjele P' i od podjele P", gornja suma se ne može uvećati a donja se ne može smanjiti, niti gornja suma može postati manja od donje. Zbog toga ćemo imati da je $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.

Neka je sada $\epsilon > 0$ i neka je za neku podjelu $P, S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Primijetimo da, prema definiciji gornjeg i donjeg integrala, važi sledeća nejednakost $s(f,P) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int_I} f \leq S(f,P)$. Zbog toga će važiti $0 \leq \underline{\int} f - \overline{\int} f \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Kako to važi za svako $\epsilon > 0$, slijedi da je $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$, pa je funkcija f integrabilna na I.

Primjer 1. Posmatrajmo funkciju $f(x,y) = x + y, (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. Na osnovu interpretacije integrala kao zapremine koja je data u jednom primjeru iz prethodnog paragrafa, možemo očekivati da je naša funkcija integrabilna i da integral iznosi je $\epsilon > 0$ i $n = [2/\epsilon] + 1$. Podijelimo svaki od koordinatnih intervala na po n djelova (v. sliku). Površina svakog intervala podjele (a ima ih n^2) iznosi $\frac{1}{n^2}$. Na intervalu podjele čija su tjemena $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}), (\frac{i}{n} + \frac{1}{n}, j), (\frac{i}{n}, \frac{j}{n} + \frac{1}{n}), (\frac{i}{n} + \frac{1}{n}, \frac{j}{n} + \frac{1}{n})$ važi: $M_{(i,j)} = \frac{i}{n} + \frac{j}{n} + \frac{2}{n}, m_{(i,j)} = \frac{i}{n} + \frac{j}{n}$. Za takvu podjelu P je $S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon$. Odavde slijedi da je funkcija f integrabilna. Ako želimo da izračunamo integral onda to možemo uraditi na sledeći način :

$$s(f,P) = \sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{i}{n}+\frac{j}{n})\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{i=n-1}(i\cdot n + \frac{n(n-1)}{2}) =$$

$$\frac{1}{n^3}[n\cdot\frac{n(n-1)}{2} + n\cdot\frac{n(n-1)}{2}] = \frac{n-1}{n}.$$

Dalje je $S(f,P) = \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n}$. Odavde slijedi da je integral funkcije jednak 1.

Gornja teorema, iako daje dovoljan i neophodan uslov za integrabilnost, nije dovoljno operativna. Ipak, ona pruža mogućnost da se formulišu i dokažu novi, operativniji, kriterijumi integrabilnosti. Mi ćemo dokazati sledeću teoremu

Teorema 2. *Svaka funkcija koja je neprekidna na I je integrabilna na I.*

Dokaz. Ako skup svih funkcija koje su neprekidne na I označimo sa $\mathcal{C}(I)$, onda tvrđenje možemo zapisati kratko: $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Za dokaz teoreme ćemo koristiti Kantorovu (Cantor) teoremu: ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom i ograničenom skupu onda je f ravnomjerno neprekidna na tom skupu. Neka je sada $\epsilon > 0$ i neka je $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\mu(I)}$. Zbog ravnomjerne neprekidnosti funkcije f postoji broj $\delta = \delta(\epsilon_1)$ tako da kad je rastojanje između dvije tačke manje od δ onda se vrijednosti funkcije u tim tačakama razlikuju za manje od ϵ_1: $|x' - x < \delta \Leftrightarrow |f(x') - f(x")| < \epsilon_1$. Neka je $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ podjela čiji je dijametar $\lambda(P)$ manji od δ. Funkcija f na svakom od podeonih intervala $I_1, \ldots, I_k$ dostiže svoju najveću i svoju najmanju vrijednost. Zbog toga je za svako i $M_1 - m_i = f(x_i) - f(y_i) < \epsilon_1$. Odavde dalje slijedi da je $S(f,P) - s(f,P) = \sum(M_i - m_i)\mu(I_i) < \epsilon_1\mu(I) = \epsilon$. Prema prethodnoj teoremi odavde slijedi da je funkcija f integrabilna na I.

Prirodno je postaviti pitanje : da li se klasa integrabilnih funkcija poklapa sa klasom neprekidnih funkcija. Odgovor je negativan. Recimo ako bismo u primjeru 1 napravili izmjenu funkcije f u tački $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ i postavili $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0$, (u ostalim tačakama funkciju definišemo, kao i ranije, formulom $f(x,y) = x + y$, onda bi funkcija f u toj tački imala prekid, ali bi bila integrabilna. Naime, u razlici $S(f,P) - s(f,P)$ promijenio bi se samo jedan sabirak. On bi se međutim množio sa $\frac{1}{n^2}$ i razlika bi mogla postati dovoljno mala na račun dovoljno velikog broja podeonih tačaka. Nije teško dokazati da ako je skup tačaka prekida konačan, funkcija je neprekidna. Sasvim precizno, pitanje integrabilnosti rešava znamenita Lebegova (Lebesgue) teorema. Za njenu formulaciju potrebno je uvesti jedan novi pojam.

Definicija 1. *Za skup $A \subseteq R^n$ kažemo da je mjere nula ako za svako $\epsilon > 0$ postoje n-dimenzioni intervali $I_1, I_2, \ldots$ tako da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(I_i) < \epsilon$.*

Postoje i drugačiji načini definisanja skupa mjere nula. Zato se za skupove koji su mjere nula u smislu prethodne definicije kaže da su Lebegove mjere nula ili da su mjere nula u smislu Lebegove definicije. U sledećoj definiciji ćemo reći kada za skup kažemo da je Žordanove mjere nula.

Definicija 2. *Za skup $A \subseteq R^n$ kažemo da je Žordanove mjere nula ako za svako $\epsilon > 0$ postoje n-dimenzioni intervali $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tako da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} I_k$ i $\sum_{i=1}^{k}\mu(I_k) < \epsilon$.*

Primijetimo da ako su $A_1, A_2, \ldots$ skupovi Lebegove mjere nula onda je i skup $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Lebegove mjere nula. Zaista, ako je $\epsilon > 0$, onda se skup A_1 može pokriti nizom intervala $I_{11}, I_{12}, \ldots$ čiji je zbir mjera manji od $\frac{\epsilon}{2}$, skup A se može pokriti nizom intervala $I_{21}, I_{22}, \ldots$ čiji je zbir mjera manji od $\frac{\epsilon}{4}$ itd. Skup A je pokriven nizom intervala $I_{11}, I_{12}, I_{21}, \ldots$ v ciji je zbir mjera manji od $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \cdots = \epsilon$. Skup A je dakle mjere nula.

Očigledno je da ako je skup A Žordanove mjere nula onda je on i Lebegove mjere nula. Nije teško zaključiti i da je svaki konačan skup Žordanove, dakle i Lebegove mjere nula. S druge strane, skup svih tačaka kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$ čije su koordinate racionalne (a koji očigledno nije konačan) takođe je Lebegove mjere nula ali nije Žordanove mjere nula (Dokazati!). Dokažimo još jedno tvrđenje koje se odnosi na skupove mjere nula.

Lema 1. *Neka je $A \subseteq R^n$ kompaktan skup Lebegove mjere nula. Tada je skup A mjere nula i u smislu Žordanove definicije.*

Dokaz. Podsjetimo se da se za skup $A \subseteq R^n$ kaže da je kompaktan ako se iz svakog niza (x_k) tačaka skupa A može izdvojiti podniz koji konvergira ka nekoj tački iz skupa A. Dobro je poznato da je skup kompaktan ako i samo ako se iz svake familije otvorenih skupova koja sadrži skup A može izdvojiti konačna podfamilija koja opet sadrži skup A. Poslije ovih napomena možemo pristupiti dokazu teoreme. Pokazaćemo da se, za svako $\epsilon > 0$ skup A može pokriti konačnim brojem intervala čiji je zbir mjera manji od ϵ. Naime, neka je skup A pokriven intervalima $I_1, I_2, \ldots$ tako da je $\sum \mu(I_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Neka su $J_1, J_2, \ldots$ intervali sa istim centrima kao i intervali $I_1, I_2, \ldots$ čije su kordinatni odsječci pomnoženi sa λ. Tada je $\sum \mu(J_j) = \lambda^n \sum \mu(I_i)$. Ako je $\lambda > 1$ onda unutrašnjosti intervala $J_1, , J_2, \ldots$ pokrivaju skup A. Iz ovog pokrivača možemo izdvojiti konačan pokrivač $J_{k1}, J_{k2}, \ldots, J_{km}$, čiji će zbir mjera biti manji od $\lambda^n \frac{\epsilon}{2}$. Ako je $\lambda^n < 2$, onda će skup A biti pokriven sa konačno mnogo intrvala čiji je zbir mjera manji od ϵ. To znači da je skup A mjere nula u smislu Žordanove definicije.

Teorema 3. (Lebegova teorema). *Ograničena funkcija $f : I \to R$ je integrabilna na I ako i samo ako je njen skup tačaka prekida mjere nula.*

Dokaz teoreme je dosta složen. Za njegovo izlaganje potrebno je uvesti neke nove pojmove.

Definicija 3. *Oscilacija funkcije $f : A \to R$ na skupu $B \subseteq A$ je broj*

$$\omega(f, B) = \sup\{|f(x') - f(x")| : x', x" \in B\}.$$

Lako je pokazati da se oscilacija funkcije na skupu može definisati i formulom $\omega(f, B) = \sup\{f(x) : x \in B\} - \inf\{f(x) : x \in B\}$. Primijetimo da za svaku podjelu $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ intervala I važi jednakost: $S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{k} \omega(f, I_i)\mu(I_i)$.

Definicija 4. *Oscilacija funkcije $f : A \to R$ u tački $x_0 \in A$ je broj $\omega(f, x_0) = \lim \omega(f, S_A(x_0, \delta))$, gdje je $S_A(x_0, \delta) = \{x \in A : |x - x_0| < \delta\}$.*

Nije teško zaključiti da je funkcija f neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je $\omega(f, x_0) = 0$.

Pređimo na dokaz teoreme.

Pretpostavimo da je funkcija f integrabilna na I. Označimo sa B skup tačaka prekida funkcije f na I. Primijetimo da je $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}$, gdje je $B_{\frac{1}{m}} = \{x \in A : \omega(f, x) \geq \frac{1}{m}$. Pokazaćemo da je svaki od skupova $B_{\frac{1}{m}}$ Lebegove mjere nula. Dokažimo prvo da su skupovi oblika $B_r = \{x \in I : \omega(f, x) \geq r\} (r > 0)$ zatvoreni. Neka je $C = R^n \backslash B_r$ i $x \in C$. Razlikovaćemo dvije mogućnosti. Prva je da $x \notin I$. Tada postoji okolina *S(x)* tačke x

koja nema zajedničkih tačaka sa I, pa ta okolina nema zajedničkih tačaka ni sa $B_r(\subseteq I)$, odnosno $S(x) \subseteq C$. Dakle, x je unutrašnja tačka skupa C. Druga mogućnost je da $x \in I$. Tada je $\omega(f, x) < \epsilon$, pa postoji $\delta > 0$ tako da je $\omega(f, S_A(x, \delta)) < \epsilon$. Neka je J otvoreni interval čiji je centar tačka x a koji se sadrži u $S(x, \delta)$. Tada, za svako $y \in J$ postoji $\delta_1 > 0$ tako da $S(y, \delta_1) \subseteq J \subseteq S(x, \delta)$. Odavde slijedi da je za svako $y \in J, \omega(f, y) < \epsilon$, odnosno $J \subseteq C = R^n \backslash B_r$. To znači da je x opet unutrašnja tačka skupa C. Sve u svemu skup C je otvoren, odnosno skup B_r je zatvoren. Skupovi $B_{\frac{1}{m}}$ su ograničeni. Pošto smo dokazali da su oni zatvoreni slijedi da su kompaktni. Kako je funkcija f integrabilna na I, to za svako $\epsilon > 0$ i svako $m \in N$ postoji podjela P_m intervala I tako da je $S(f, P_m) - s(f, P_m) < \frac{\epsilon}{m.}$ Označimo sa P_m skup onih intervala iz skupa P_m koji imaju zajedničkih tačaka sa skupom $B_{\frac{1}{m}}$. Skup intervala P_{m1} pokriva skup $B_{\frac{1}{m}}$, pri čemu je oscilacija funkcije f na svakom od ovih intervala veća ili jednaka od $\frac{1}{m}$: $\omega(f, I_j) \geq \frac{1}{m}$, za svako $I_j \in P_{m1}$. Zbir σ mjera svih intervala iz familije P_{m1} možemo ocijeniti na sledeći način:

$$\sigma = \sum_{I_j \in P_{m1}} \mu(I_j) \leq \sum_{I_j \in P_{p1}} \omega(f, I_j) m\mu(I_j) \leq \sum_{I_j \in P_m} \omega(f, I_j) m\mu(I_j) = mS(f, P_m) - s(f, P_m) < \epsilon.$$

Odavde slijedi da je skup $B_{\frac{1}{m}}$ Žordanove mjere nula, pa je on i Lebegove mjere nula. Unija $B = B_1 \cup B_{\frac{1}{2}} \cup \cdots \cup B_{\frac{1}{m}} \cup \cdots$ niza ovakvih skupova je takođe skup mjere nula. tvrđenje teoreme u jednom pravcu je dokazano.

Pretpostavimo sada da je skup B tačaka prekida funkcije f Lebegove mjere nula. Za $\epsilon > 0$ označimo sa B_ϵ skup svih tačaka intervala I u kojima je $\omega(f, x) \geq \epsilon$. Tada je $B_\epsilon \subseteq B$, pa je i skup B_ϵ Lebegove mjere nula. Kako smo ranije već utvrdili skup B_ϵ je kompaktan pa je B_ϵ Žordanove mjere nula. Postoje dakle intervali $I_1, \ldots, I_k$ čiji je zbir mjera manji od ϵ a koji pokrivaju skup B_ϵ. Neka je $P = \{J_1, \ldots, J_l\}$ podjela intervala I koja je nastala tako što su za podeone tačke na koordinatnim intervalima izabrana projekcije svih tjemena intervala $I_1, \ldots, I_k$. Neka je $|f(x) \leq M, x \in I$. Tada je $\omega(f, J_i) \leq 2M$ i $\sum \omega(f, I_i)\mu(I_i) \leq 2M\epsilon$. Dalje, ako je J_j interval iz podjele P tako da je $J_j \cap B_\epsilon = \emptyset$, onda je $\omega(f, x) < \epsilon$ za svako $x \in J_j$. Pokažimo da tada postoji takva podjela $\{J_{j_1}, \ldots, J_{js}\}$ intervala J_j za koju je $\sum \omega(f, J_{j_l})\mu(J_{j_l}) < \epsilon\mu(J_j)$. Zaista, za svako $x \in J_j$ postoji otvoreni interval J_x sa centrom u x tako da je $\omega(f, J_x) < \epsilon$. Familija $\{J_x : x \in J_j\}$ svih takvih otvorenih intervala pokriva zatvoreni interval J_j. Zbog kompaktnosti intervala J_j iz ovog pokrivača možemo izdvojiti konačana potpokrivač $I_{j_1}, \ldots, I_{j_k}$. Napravimo sada podjelu P_j intervala J_j na intervale $J_{j_1}, \ldots, J_{j_s}$ tako da se svaki od njih sadrži u nekom od intervala $I_{j_1}, \ldots, I_{j_k}$. Tada je $\omega(f, J_{j_1}) < \epsilon, \ldots, \omega(f, J_{j_s}) < \epsilon$. Odavde slijedi da je $S(f, P_j) - s(f, P_j) = \sum \omega(f, J_{j_l})\mu(J_{j_l}) < \epsilon\mu(J_{j_l})$. Ako je $P = \{L_1, \ldots, L_p\}$ podjela intervala I izvedena tako da su koordinatni intervali dijeljeni pomoću projekcija tjemena intervala $J_{j_1}, \ldots, J_{j_s}$ i intervala $I_1, \ldots, I_k$, onda je

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum \omega(f, L_i)\mu(L_i) = \sum \omega(f, I_i)\mu(I_i) + \sum \sum \omega(f, J_{j_r}\mu(J_{j_r}) <$$

$$< 2M\epsilon + \sum \epsilon\mu(J_j) < \epsilon(\mu(I) + 2M).$$

Odavde slijedi da je funkcija f integrabilna na I. Teorema je dokazana.

Istaknimo još jednom da Lebegova teorema sasvim i reklo bi se na idealan način rešava pitanje integrabilnosti funkcije.

§4. **Raųnanje integrala**

Definicija integrala je konstruktivna-slijedeći tu definiciju možemo čak računati integrale pojedinih funkcija, kao što smo to i radili u jednom primjeru. U slučaju da je računanje granične vrijednosti integralnih suma dovoljno komplikovano možemo utvrditi barem približnu vrijednost integrala. Međutim, za računanje integrala funkcija jedne promjenljive, veoma se dobro može koristiti veza između integrala i izvoda koju ustanovljava Njutn-Lajbnicova formula. Da li se ista formula može koristiti i za računanje integrala funkcija više promjenljivih? Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 1. (Fubinijeva teorema). *Neka su I i J intervali u R^n i R^m. Ako je funkcija $f : I \times J \to R$ integrabilna na $I \times J$ onda postoje i integrali $\int_I(\int_J f dy)dx$ i $\int_J(\int_I f dx)dy$, oni su jednaki integralu $\int_{I\times J} f$.*

Dokaz. Teorema dakle govori o tome kako se, naprimjer, integral funkcije dvije promjenljive može svesti na uzastopnu integraciju funkcija jedne promjenljive. Ilustracije radi, za integral iz primjera 1 iz prethodnog paragrafa, uz korišćenje Fubinijeve teoreme, imamo

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(x+y)dxdy = \int_0^1(\int_0^1(x+y)dx)dy == \int_0^1(\frac{1}{2}+y)dy = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Prije nego što izložimo precizan dokaz teoreme, daćemo geometrijske argumente za tvrđenje teoreme. Posmatrajmo zadatak izračunavanja zapremine tijela ograničenog ravnima $x = a, x = b, y = c, y = d, z = 0, z = f(x, y)$, gdje je $f : I = [a, b] \times [c, d] \to R$ neprekidna i nenegativna funkcija. Označimo sa $V(s)$ zapreminu onog dijela tijela od ravni $x = a$ do ravni $x = s$. Primijetimo da je $V(a) = 0$. Naš zadatak je da izračunamo $V(b)$. Geometrijska interpretacija dvostrukog integrala nam govori da je $V(b) = \int_I \int f(x, y)dxdy$. Označimo sa $S(s)$ površinu presjeka ravni $x = s$ i posmatranog tijela. Za zapreminu onog dijela tijela koje se nalazi između ravni $x = s$ i $x = s + h$, koji je kriva prizma, važi sledeća formula : $V(s + h) - V(s) \cong S(s)h$. Odavde, dijeleći jednačini sa h i puštajući da $h \to 0$, dobijamo $\lim_{h\to 0} \frac{V(s+h)-V(s)}{h} = S(s)$, odnosno $V'(s) = S(s)$ i $V(s) = \int_a^s S(x)dx$. Međutim, $S(x)$ je površina krivolinijskog trapeza (v. sliku) i iznosi $S(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Odavde slijedi da je $V(b) = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b(\int_c^d f(x, y)dy)dx$, odnosno

$$\int_I\int f(x,y)dxdy = \int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

Na sličan način se može pokazati da je

$$\int_I\int f(x,y)dxdy = \int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

U vezi sa izloženom arhgumentacijom, jasno je da ona stoji samo za dvostruke integrale. Teorema, dakle, pruža mogućnost da se izračunavanje dvostrukog integrala direktno prevede na uzastopno računanje dva jednostruka integrala, a uzastopnom primjenom ove teoreme može se računanje $n-$dimenzionog integrala svesti na uzastopnih n jednodimenzionalnih integrala.

Poslije ovih napomena izložićemo strog dokaz teoreme. Neka je P podjela intervala $I \times J$. Ona je inducirana podjelama koordinatnih intervala a ove podjele su inducirale i podjele P' i P" intervla I i J. Svaki interval $I_{i,j}$ iz podjele P je Dekartov proizvod $I_i \times J_j$ nekih intervala I_i i J_j iz podjela P' i P". Prema tome je $n+m$-dimenziona mjera intervala $I_{i,j}$ jednaka proizvodu n-dimenzione mjere intervala I_i i m-dimenzione mjere intervala J_j : $\mu(I_{i,j}) = \mu(I_i)\mu(J_j$. Koristeći svojstva infimuma $\inf_{A\times B} f(x,y) \leq \inf_A(\inf_B f(x,y))$, infimum zbira veći je ili jednak od zbira infimuma i slična svojstva supremuma, dobijamo

$$s(f,P) = \sum_i \sum_j \inf_{I_i \times J_j} f(x,y)\mu(I_i \times J_j) \leq \sum_i \inf_{I_i}(\sum_j \inf_{J_j} f(x,y)\mu(J_j))\mu(I_i)$$

Za svako fiksirani $x \in I$, unutrašnja suma (suma po j) $G(x)$ je donja suma funkcije $F(y) = f(x,y)$. Tako možemo napisati

$$s(f,P) \leq \sum_i \inf_{I_i} G(x)\mu(I_i) = s(G,P') \leq \sum_i \sup_{I_i} G(x)\mu(I_i) = S(G,P'). \qquad 1$$

Dalje imamo

$$G(x) = \sum_j \inf_{J_j} f(x,y)\mu(J_j) \leq \sum_j \sup_{J_j} f(x,y)\mu(J_j) = H(x).$$

Nejednakost (1) možemo (koristeći svojstva supremuma) produžiti sa

$$\sum_i \sup_{I_i} G(x)\mu(I_i) \leq \sum_i (\sum_j \sup_{J_j} G(x)\mu(J_j))\mu(I_i) \leq$$

$$\sum_i \sum_j \sup_{I_i \times J_j} f(x,y)\mu(I_i \times J_j) = S(f,P).$$

Zbog pretpostavke o integrabilnosti funkcije f, granične vrijednosti suma $s(f,P)$ i $S(f,P)$ kada $\lambda(P) \to 0$ jednake su integralu funkcije f na intervalu $I \times J$. Iz jednakosti (1) slijedi da će se i granične vrijednosti suma $s(G,P')$ i $S(G,P')$ konvergirati istoj graničnoj vrijednosti-integralu funkcije f na $I \times J$. Ako je sada $\epsilon > 0$ onda će postojati broj δ tako da kada je dijametar podjele intervala $I_i \times J_j$ onda se niti gornja suma niti donja suma ne razlikuju od integrala za više od ϵ. Ako je sada P' podjela intervala I čiji je dijametar manji od $\frac{\delta}{2}$ i ako se napravi podjela intervala J čiji je dijametar također manji od ϵ onda će dijametar tako generisane podjele intervala $I \times J$ biti manji od δ. $s(G,P') i S(G,P')$ se od $\int\int_{I\times J} f(x,y)dxdy$ ne mogu razlikovati za više od ϵ. Znači, $\int_I G(x)dx = \int\int_{I\times J} f(x,y)dxdy$. Slično zaključujemo da je i funkcija $H(x)$ integrabilna na I i da je njen integral jednak $\int\int_{I\times J} f(x,y)dxdy$. Međutim, $G(x)$ je donja a $H(x)$ gornja suma funkcije $f(x,y)$ pa je $G(x) \leq g(x) = \underline{\int}_J f(x,y)dy \leq h(x) = \overline{\int} J f(x,y)dy \leq H(x)$ za svako $x \in I$. Konstruišući gornje i donje sume za funkcije g i h i upoređujući ih sa donjim i gornjim sumama funkcija G i H zaključićemo da su i ove funkcije integrabilne na I i da su odgovarajući integrali jednaki $\int\int_{I\times J} f(x,y)dxdy$. Može se dogoditi da za neko $x \in I$ bude $g(x) < h(x)$. Međutim, skup takvih tačaka je mjere 0. Ako se pretpostavi da su ove dvije funkcije jednake za svako $x \in I$, t.j. ako pretpostavimo da za svako $x \in I$ postoji $\int_J f(x,y)dy$, onda važi jednakost $\int\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_J(\int_I f(x,y)dx)dy$. Slično se dokazuje da je $\int\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I(\int_J f(x,y)dx)dy$.

Zadatak 1. Izračunati a) $\int\int_{[0,1]\times[0,1]} xydxdy; b) \int\int_{[0,1]\times[0,2]}(x+y)dxdy$.

Primjer 2. Ocijenićemo da li je $I = \in \int_[0,1] \times [0,1] \frac{1}{1-xy}dxdy$ manja ili veća d 1.

Prvo primijetimo da je zbog $xy < 1$ $\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + (xy)^2 + \cdots + (xy)^n + \cdots > 1 + xy$. Slijedi da je

$$I = \int\int_[0,1]\times[0,1]\frac{1}{1-xy}dxdy > \int\int_[0,1]\times[0,1](1+xy)dxdy = 1 + \int\int_[0,1\times[0,1]xydxdy > 1.$$

Dalje, primijetimo da je $I = \sum_{n=0}^{\infty}\int\int_[0,1] \times [0,1](xy)^n dxdy = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} < 2$.

U sljedećem primjeru riješićemo jedan kombinatorni zadatak, a u rješenju će se neočekivano pojaviti dvostruki integral i integral kompleksne funkcije.

Primjer 3. Dokazaćemo da ako je pravougaonik P, popločan manjim pravougaonicima sa svosjtvom da je dužina jedne stranice svakog od tih pravougaonika cijeli broj, ima isto svojstvo, tj. da je i dužina jedne njegove stranice prirodan broj. Označimo sa Π skup svih pravougaonika koji popločavaju dati pravougaonik P. Posmatrajmo integral

$$I = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} e^{2\pi i(x+y)}dxdy = \int_a^b e^{2\pi ix}dx\int_c^d e^{2\pi iy}dy = 0.$$

Odavde, sabirajući sve ove integrale dobijamo da je integral $\in \int_P e^{2\pi i(x+y)}dxdy = 0$. No, ako je $P = [A,B] \times C, D$ tada odavde slijedi da je $\int_A^B e^{2\pi ix} = 0$ ili $\int_C^D e^{2\pi iy}dy = 0$. U prvom slučaju je $\frac{1}{2\pi i}[e^{2\pi iB} - e^{2\pi iA}] = 0$, a to s obzirom na periodičnost funkcije $e^{2\pi ix}$ znači da je $B - A$ cio broj. Analogno se analizira mogućnost $\int_C^D e^{2\pi y}dy = 0$, i dobija da je tada $D - C$ cio broj. Dakle pravougaonik P ima stranicu čija je dužina prirodan broj.

Primjer 4. Dokazaćemo da za neprekidnu funkciju f važi nejednakost $(\int_a^b f(x)dx)^2 \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b f^2(x)dx$. U tom cilju posmatraćemo dvostruki integral $I = \int\int_{[a,b]\times[a,b]}(f(x) - f(y))^2dxdy$ i napisati kao uzastopne integrale. Imamo

$$0 \leq I = \int\int_{[a,b]\times[a,b]}(f^2(x)+f^2(y)-2f(x(f(y))dxdy = \int_a^b dx\int_a^b f^2(x)dy - 2\int_a^b dx\int_a^b f(x)f(y)dy =$$

$$2\int\int_{[a,b]\times[a,b]} f^2(x)dx - 2\int\int_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y) = 2\int_a^b dx\int_a^b f^2(x)dy - 2\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy = 2(b$$

a odavde slijedi nejednakost

$$(\int_a^b f(c)dx)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

Primjer 5. Izračunaćemo dvostruki integral $I = \int\int_D(2x^2 + 3y^2)dxdy$, gdje je $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$. Prema teoremi o svodjenju dvostrukog integrala na uzastopne integrale imamo:

$$I = \int_0^2 dx \int_{-1}^1 (2x^2 + 3y^2) dy = \int_0^2 (4x^2 + 2) dx = \frac{4}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 2 = \frac{44}{3}.$$

§5. **Definicija integrala na proizvoljnom skupu**

I iz primjera u kojima je data geometrijska interpretacija integrala jasno je da bi se na sličan način mogao definisati integral funkcije definisane na skupu koji nije pravougaonik. Recimo, ako se želi posredstvom integrala računati zapremina lopte onda treba definisati integral funkcije definisane na krugu. Najbolje bi bilo da definicija integrala bude opšta, t.j. da važi za proizvoljan podskup prostora R^n. No, trebalo bi obezbijediti da, po toj definiciji, klasa integrabilnih funkcija ne bude suviše uska. Kao minimum trebalo bi da bar konstante budu integrabilne. Kako stvari stoje sa našim zahtjevima pokazaće sledeći primjer.

Primjer 1. Neka je A skup svih tačaka iz kvadrata $[0,1]\times[0,1]$ čije su obje koordinate racionalne. Neka je $f(x,y)=1$ za svako $(x,y)\in A$. Ako bismo integral konstruisali na sličan način-podjelom skupa A onda bismo imali da su, za fiksiranu podjelu P, integralna suma, donja suma i gornja suma jednake zbiru površina tih djelova skupa A, odnosno površini skupa A, naravno pod pretpostavkom da o površini tih skupova može biti riječi. Ako bi dakle naš skup A imao površinu onda bi integral naše funkcije bio jednak toj površini. A sada imamo pitanje : da li naš skup ima površinu? Mi ćemo se u definiciji integrala ograničiti na skupove koji imaju površinu ako je $n=2$ odnosno zapreminu ako je $n=3$, ili uopšte na skupove koji imaju mjeru u R^n. Želimo, za sada, da izvedemo samo jedan zaključak: nećemo moći definisati integral po bilo kom skupu. Zato ćemo posebno izdvojiti familiju skupova iz R^n (za te skupove ćemo govoriti da su dopustivi skupovi i definisati integral funkcije definisane na nekom skupu iz te familije. Ta familija skupova će sadržati sve intervale u R^n ali i još neke skupove. Garantovaće se da će konstantne funkcije biti integrabilne na svakom skupu iz te familije. Prije nego što damo definiciju dopustivih skupova, podsjetimo sa da za tačku a kažemo da je granična tačka skupa A ako svaka okolina te tačke sadrži bar jednu tačku skupa A i bar jednu tačku koja ne pripada skupu A. Sve granične tačke skupa A obrazuju granicu skupa A, koju označavamo sa ∂A ili $\partial(A)$.

Definicija 1.*Za skup $A\subseteq R^n$ kažemo da je dopustiv ako je ograničen i ako je skup ∂A Lebegove mjere nula.*

Primjer 2. Neka je $A\subseteq R^n$ ograničen skup i neka su $I_1,\ldots,I_k$ intervali koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, pri čemu unija tih skupova sadrži skup A. Zbir mjera tih intervala je pozitivan relan broj koji naravno zavisi od izbora intervala $I_1,\ldots,I_k$. Skup S svih tako dobijenih brojeva je ograničen sa donje strane brojem nula, pa postoji infimum tog skupa. Taj infimum zovemo *gornja (spoljašnja) mjerom skupa* A i označavamo sa $\mu^*(A)$. S druge strane, ako su $I_1,\ldots,I_k$ intervali koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i takvih da svaki od njih leži u A, onda je zbir mjera tih intervala nenegativan broj koji je manji od mjere bilo kog intervla I koji sadrži skup A. Skup s svih tako dobijenih brojeva je ograničen odozgo, pa postoji njegov supremum, koji zovemo *donja (unutrašnja) mjera skupa* A. Unutrašnju mjera skupa A označavamo sa $\mu_*(A)$. Jasno je da je $\mu_*(A)\leq\mu^*(A)$. Ako je $\mu_*(A)=\mu^*(A)$, onda kažemo da je skup A mjerljiv (po Žordanu), a spoljašnju odnosno unutrašnju mjeru skupa A zovemo prosto *(Žordanova) mjera skupa* A. Mjeru skupa A označavamo sa $\mu(A)$. Ako je $n=1$, onda mjeru skupa zovemo dužina skupa, za $n=2$ mjeru skupa zovemo površinom, a za $n=3$ zapreminom skupa. Ponovimo još jednom da svaki ograničen skup ima svoju unutrašnju i svoju spoljašnju mjeru, koje se međutim mog razlikovati. Ako je, naprimjer $A=\{(x,y)\in R^2 : x\in Q, y\in Q\}$, onda je

$\mu_*(A) = 0$ a $\mu^*(A) = 1$.

Primjer 3. Neka je A ponovo dopustiv skup i neka je I interval koji sadrži skup A i χ_A funkcija definisana na I, pri čemu je $\chi_A(x) = 1$ za $x \in A$ i $\chi_A(x) = 0$ za $x \in I \setminus A$. Ako je $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ podjela intervala I onda je $M_i(\chi_A = 1)$ ako odgovarajući interval I_i ima barem jednu zajedničku tačku sa skupom A a 0 za one intervale koji nemaju zajedničkih tačaka sa skupom A. S druge strane, $s(f, P)$ je jednako 1 na intervalima koji su sadržani u skupu A a 0 na ostalim intervalima. Razlika $S(f, P) - s(f, P)$ će biti jednaka sumi mjera onih intervala podjele P koji imaju barem jednu tačku iz skupa A i barem jednu tačku iz skupa $B = I \setminus A$. Neka je $\epsilon > 0$ i neka su $J_1, J_2, \ldots, J_k$ intervali čiji je ukupni zbir mjera manji od ϵ a koji pokrivaju $\partial(A)$. Neka je I interval koji sadrži i skup A i intervale $J_1, J_2, \ldots, J_k$ i neka je podjela P intervala I napravljena tako što su za podeone tačke na koordinatnim intervalima izabrane projekcije tjemena intervala $J_1, J_2, \ldots, J_k$. Intervali podjele P koji sadrže granicu $\partial(A)$ su sadržani u $J_1, J_2, \ldots, J_k$. Slijedi da razlika $S(f, P) - s(f, P)$ nije veća od sume mjera intervala $J_1, \ldots, J_k$, odnosno ova suma je manja od ϵ. Dakle, karakteristična funkcija skupa A je integrabilna na I. Svaka gornja suma jednaka je zbiru mjera nekih intervla koji sadrže skup A a svaka donja suma jednaka je zbiru mjera intervala koji su sadržani u A. Skup svih donjih suma je ograničen sa gornje strane i postoji supremum ovog skupa. Taj supremum je, očigledno, jednak donjoj (unutrašnjoj) Žordanovoj mjeri $\mu_*(A)$ skupa A. Skup gornjih suma je takođe ograničen i postoji infimum skupa, koji je jednak gornjoj (spoljašnjoj) mjeri $\mu^*(A)$ skupa A. Jasno je da je unutrašnja mjera zapravo donji integral a spoljašnja mjera gornji integral funkcije $f(x) = 1, x \in A$. Dakle, dopustivi skupovi su mjerljivi u Žordanovom smislu. Važi, očigledno i obrnuto: ako je skup mjerljiv u Žordanovom smislu, onda je on dopustiv. Pošto su granične vrijednosti donjih i gornjih suma jednake međusobno i pri tome jednake integralu $\int_A 1$, zaključujemo da se za dopustive skupove $\mu(A)$ jednaka $\int_A 1$.

Dokazaćemo nekoliko svojstava granice skupa, a zatim ćemo utvrditi i nekoliko svojstava familije dopustivih skupova.

Teorema1._a) ∂A je zatvoren skup._
b) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$.
c) $\partial(A \cap B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$.
d) $\partial(A \backslash B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$.

Dokaz. Dokažimo tvrđenje a). Neka je (x_k) niz tačaka iz ∂A koji konvrgira ka tački x. Dokažimo da je x granična tačka skupa A. Posmatrajmo proizvoljnu okolinu $\mathcal{O}(x)$ tačke x. Bar jedna tačka niza (x_k) - označimo je sa x_{k_0} -leži u ovoj okolini a tačka x_{k_0} pripada skupu ∂A. Posmatrajmo okolinu $\mathcal{O}(x_{k_0})$ tačke x_{k_0} koja je dio okoline $\mathcal{O}(x)$. Ona sadrži bar jednu tačku - označimo je sa y - iz skupa A i bar jednu tačku - označimo je sa z- koja ne leži u A. To znači da okolina $\mathcal{O}(x)$ sadrži i tačke iz skupa A i tačke koje ne pripadaju skupu A. To znači da je x granična tačka skupa A, odnosno da je skup ∂A zatvoren. tvrđenje a) je dokazano.

Za dokaz tvrđenja b) uočimo tačku x koja pripada granici skupa $A \cup B$. Neka je $\mathcal{O}(x)$ okolina tačke x. Ta okolina sadrži bar jednu tačku iz skupa A ili bar jednu tačku iz skupa B. Određenosti radi pretpostavimo da $\mathcal{O}(x)$ sadrži tačku iz skupa B. Dalje, ista okolina sadrži bar jednu tačku koja je van skupa $A \cup B$. Specijalno, $\mathcal{O}(x)$ sadrži bar jednu tačku koja ne pripada skupu B. Sve ovo znači da $x \in \partial B$, odnosno $x \in \partial A \cup \partial B$. Slično se dokazuju tvrđenja c) i d).

Direktna posledica prethodne teoreme je

Teorema 2.*Ako su A i B dopustivi skupovi onda su i skupovi $A \cup B, A \cap B i A \backslash B$ dopustivi.*

Osnovna ideja za definisanje integrala na skupu A sastoji se u tome da se napravi produženje funkcije f na neki interval koji sadrži skup A, pa da se zatim integrabilnost i integral na skupu A definiše kao integral tog produženja funkcije f na intervalu. Da bismo preciznije izložili ideju, uvešćemo nove, inače opšte prihvaćene oznake.

Pretpostavimo sada da je A dopustiv skup i da je funkcija $f : A \to R$ definisana na A. Neka su I i J intervali u R^n koji sadrže skup A neka su

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in I \setminus A \end{cases} , \quad f_J(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in J \setminus A \end{cases}$$

Pogodno je i uobičajeno funkcija f_i i f_J pisati posredstvom karakteristične funkcije. Podsjetimo da funkciju

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} ,$$

definisanu na nekom skupu koji sadrži skup A nazivamo karakteristična funkcija skupa A. Ako pretpostavimo da je naša funkcija definisana i van skupa A, onda funkcije f_I i f_J možemo zapisati u obliku proizvoda $f(x)\chi_A(x)$ s tim što je prva (f_I) funkcija definisana na I a druga (f_J) na J. Mi ćemo koristiti razne oznake za funkcije koje budemo razmatrali, ne precizirajući uvijek oblasti definisanosti, zbog toga što će iz konteksta biti jasno o čemu se tu radi.

Dakle, važi sledeće tvrđenje.

Lema 1.*Neka su I i J dva intervala koja sadrže skup A. Tada, ako postoji jedan od integrala $\int_I f(x) \cdot \chi - A(x)dx$ i $\int_J f(x)\chi_A(x)dx$, onda postoji i drugi i oni su jednaki.*

Dokaz. Možemo tvrđenje kratko zapisati na sledeći način: $\int_I f(x)\chi_A(x)dx = \int_J f(x)\chi_A(x)dx$, pri čemu se podrazumijeva da jednakost važi i u smislu da jedan od ova dva integrala postoji ako i samo ako postoji drugi. Dokaz ćemo inače izvesti tako što ćemo zajedno sa intervalima I i J posmatrati i interval $K = I \cap J$. Tada je $K \subseteq I$. Neka postoji $\int_I f(x)\chi_A(x)dx$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji δ tako da za svaku podjelu P intervala I čiji je dijametar manji od δ, važi $|\int_I f(x) \cdot \chi_A(x)dx - \sigma(f, P, \xi)| < \epsilon$. Neka je Q podjela intervala K čiji je dijametar manji od δ. Ta podjela je napravljena podjelama koordinatnih intervala intervala K. Dodajući, eventualno, nove podeone tačke na koordinatnim odsječcima tako da se dobije podjela intervala I čiji je dijametar manji od δ (dovoljno je da podeone tačke na istom podeonom odsječku budu udaljene za manje od $\frac{\delta}{n^{\frac{1}{2}}}$ imaćemo podjelu intervala I čiji je dijametar manji od δ. Integralna suma $\sigma(f_K, Q, \xi)$ jednaka je integralnoj sumi $\sigma(f_K, P, \xi)$, (jer su novi sabirci koji se tu pojavljuju jednaki nuli), pa je $|\int_K f(x)\chi_A(x)dx - \sigma(f, Q, \xi)| < \epsilon$, što znači da je funkcija $f(x)\chi_A(x)$ integrabilna na K i integrali funkcija $f_A\chi_A$ na I i na K su jednaki. Obrnuto, neka je funkcija f_K integrabilna na K. Kako je $\{s(f_K, P)\} \subseteq \{s(f_I, P)\}$ i $\{S(f_K, P)\} \subseteq \{S(f_K, P)\}$, to je $\underline{\int} f_K \leq \underline{\int} f_I \leq \overline{\int} f_I \leq \overline{\int} f$. Odavde slijedi da ako su donji i gornji integral funkcije $f\chi_A$ jednaki onda su i donji gornji integral funkcije f na A. Time je dokazano da integrali $\int_I f\chi_A$ i $\int_J f\chi_A$ postoje ili ne postoje zajedno.

Definicija 2._Integral funkcije $f : A \to R$ koja je definisana na dopustivom skupu $A \subseteq R^n$ definiše se formulom_

$$\int_A f := \int_I f_I,$$

gdje je I interval u R^n koji sadrži skup A.

Razmatranja koja smo izvršili u prethodnoj teoremi pokazuju da je definicija korektna - izraz na desnoj strani znaka ":="ne zavisi od izbora intervala I. Prirodno je da, saglasano sa ovom definicijom, za funkciju f kažemo da je integrabilna na A ako je funkcija f_I integrabilna na intervalu $I \supseteq A$. takođe treba napomenuti da se i donji i gornji integral funkcije koja je definisana na dopustivom skupu mogu definisati na sličan način. Smatramo, međutim, da nema potrebe da se ponavljaju mnogi detalji o vezi gornjeg i donjeg integrala i integrala. Sve se to, naravno radi na sličan način kao kod integrala na intervalu.

Ako je A dopustiv skup, $f : A \to R$ funkcija definisana na A i C skup tačaka prekida funkcije f, onda za svaki interval I koji sadrži skup A i za skup C_I tačaka prekida funkcije f_I na skupu I važi: $C \subseteq C_I \subseteq C \cup \partial(A)$. Već smo ranije istakli da je unija dva skupa mjere nula skup mjere nula. Slijedi da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3. (Lebegova teorema)_Funkcija $f : A \to R$ je integrablna na A ako i samo ako je skup tačaka prekida te funkcije na skupu A skup mjere nula._

Uobičejeno da se umjesto škup tačaka prekida funkcije na skupu A je skup mjere nula"govori "funkcija je neprekidna skoro svuda na A".

Primjer 4. Neka je A dopustiv skup i neka je funkcija $f : A \to R$ jednaka nuli skoro svuda na A. Takva funkcija ne mora biti integrabilna na A -Dirihleova funkcija je jednaka nuli skoro svuda na $[0,1] \times [0,1]$ ali nije integrabilana na tom skupu. Međutim, ako se pretpostavi da je f i integrbilna na A onda je njen integral na skupu A jednak nuli. Zaista, neka je J interval koji sadrži skup A i neka je $F : J \to R$ funkcija koja je jednaka nuli na $J \backslash A$ i jednaka funkciji f na A. Tada je F integrabilna na J i jednaka je nuli skoro svuda na J. Neka je $\mathcal{S} = \int_I F (= \int_A f)$. Tada za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da za podjele P intervala J, čiji je dijametar manji od δ važi: $|\sigma(F, P, \xi) - \mathcal{S}| < \epsilon$ za svaki izbor tačaka ξ. Međutim, zbog toga što je funkcija F jednaka nuli skoro svuda na J, skup tačaka $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ se može izabrati tako da je $F(\xi_1) = \dots = F(\xi_k) = 0$, pa je tada i $\sigma(F, P, \xi) = 0$. To znači da je $|\mathcal{S}| < \epsilon$, odakle slijedi da je $\mathcal{S} = 0$.

Primjer 5. Neka je $A \subseteq R^n$ dopustiv skup. Prema Lebegovoj teoremi, funkcija $f(x) = 1$ je integarbilna na A. Ta činjenica se, međutim, može i direktno utvrditi. Skup $\partial(A)$ je zatvoren i ograničen, dakle kompaktan. Ovaj skup se, za svako $\epsilon > 0$, može pokriti sa konačno mnogo intervala čiji je zbir mjera manji od ϵ. Neka je I interval koji sadrži skup A. Ako je $P = \{I_1, \dots, I_k\}$ podjela intervala I onda je $M_i = 1$ ako odgovarajući interval I_i ima barem jednu zajedničku tačku sa skupom A a 0 za one intervale koji nemaju zajedničkih tačaka sa skupom A. S druge strane, $s(f, P)$ je jednaka 1 na intervalima koji su sadržani u skupu A a 0 na ostalim intervalima. Razlika $S(f, P) - s(f, P)$ će biti jednaka sumi mjera onih paralelepipeda podjele P koji imaju barem jednu tačku iz skupa A i barem jednu tačku iz skupa $B = I \backslash A$. Neka je $\epsilon > 0$ i ako su $J_1, J_2, \dots, J_k$ intervali čiji je ukupni zbir mjera manji od ϵ a koji pokrivaju $\partial(A)$, a I interval koji sadrži intervale $J_1, J_2, \dots J_k$. Neka je dalje podjela P intervala I napravljena tako što su za podeone tačke na koordinatnim intervalima izabrane projekcije tjemena intervala $J_1, J_2, \dots, J_k$.

Intervali podjele P koji sadrže granicu $\partial(A)$ su sadržani u $J_1, J_2, \ldots, J_k$. Slijedi da je razlika $S(f,P) - s(f,P)$ manja od sume mjera intervala $J_1, \ldots, J_k$, odnosno manja od ϵ. Dakle, karakteristična funkcija skupa A je integrabilna na I. Svaka gornja suma jednaka je zbiru mjera onih intervala podjele koji sadrže barem jednu tačku skupa A a svaka donja suma jednaka je zbiru mjera intervala koji su sadržani u A. Skup svih donjih suma je ograničen sa gornje strane i postoji supremum ovog skupa. Taj supremum označavamo sa $\mu_*(A)$ i zovemo donjom (unutrašnjom) Žordanovom mjerom skupa. Skup gornjih suma je takođe ograničen i postoji infimum skupa. Taj infimum nazivamo gornjom (spoljašnjom) mjerom skupa A. Spoljašnju mjeru označavamao sa $\mu^*(A)$. Ako su unutrašnja i spoljašnja mjera skupa A jednake onda kažemo da je skup A mjerljiv u Žordanovom smislu a svaku od ovih mjera zovemo mjera skupa A. Za $n = 1$ Žordanova mjera se zove dužina skupa, za $n = 2$ površinom, za $n = 3$ zapreminom. Jasno je da je unutrašnja mjera zapravo donji integral a spoljašnja mjera gornji integral funkcije $f(x) = 1, x \in A$. Pošto su granične vrijednosti ovih suma jednake međusobno i pri tome jednake integralu $\int_A 1$, zaključujemo da je, za dopustive skupove, $\mu(A)$ jednaka kao $\int_A 1$. Dakle, dopustivi skupovi su mjerljivi u Žordanovom smislu. Važi, očigledno, i obrnuto: ako je skup mjerljiv u Žordanovom smislu, onda je on dopustiv.

Pošto smo definisali integral na dopustivom skupu možemo, kao posledicu Fubinijeve teoreme, izvesti formula za računanje integrala po nekim dopustivim skupovima uzastopnim računanjem integrala na skupu manje dimenzije.

Teorema 4. *Neka je $D \subseteq R^{n-1}$ dopustiv skup i $\varphi_1 : D \to R, \varphi_2 : D \to R$ funkcije definisane na skupu D, pri ćemo je $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $\forall x \in D$. Ako je $A = \{(x,y) \in D \times R : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).\}$ dopustiv skup (tada kažemo da je skup A elementaran u odnosu na x_n-osu) i $f \in \mathcal{R}(A)$, onda je*

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_D (\int^{\varphi_2(x)_{\varphi_1(x)} f(x,y)dy)dx.(1)}$$

Dokaz. Neka je $I = J \times [a,b]$ interval koji sadrži skup A, pri čemu je J interval u R^{n-1} koji sadrži skup D. Uz oznake koje smo ranije uveli imamo da je

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_I f(x,y) \cdot \chi_A(x,y)dxdy = \int_J (\int_a^b f(x,y) \cdot \chi(x,y)dy)dx. \qquad 2$$

Unutrašnji integral je jednostruki integral a za svako $x \in D$ podintegralna funkcija jednaka je nuli ako je $y > \varphi_2(x)$ ili $y < \varphi_1(x)$. Zbog toga je

$$\int_a^b f(x,y) \cdot \chi_A(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) \cdot \chi_A(x,y)dy.$$

Dalje imamo da je $f(x,y)\chi_A(x,y) = f(x,y)\chi_D(x)$ za svako $x \in D, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. Zbog toga je

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\chi_A(x,y)dy = \chi_D(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Ako dobijenu relaciju uvrstimo u formulu (2), dobićemo

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \chi_D(x)\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy)dx.$$

Zadatak 3. Dokazati da ako je skup D dopustiv (mjerljiv po Žordanu) a funkcije φ_1 i φ_2 neprekidne na D, takve da je $\varphi_1(x,y) \leq \varphi_2(x,y), \forall(x,y) \in D$, onda je i skup $A = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$ dopustiv. dopustiv.

Primjer 6. Izvešćemo formulu za računanje površine kruga $K = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \leq r^2\}$. Prema Fubinjevoj teoremi, polovina površine iznosi (vidi sliku)

$$\int_K\int dxdy = \int_{-r}^{r} \sqrt{x^2-r^2}dx = \int_0^{\pi} \rho\cos\varphi d(\sin\varphi) = r^2\cdot\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Odavde slijedi da je površina kruga jednaka πr^2.]

Primjer 7. Izračuna' cemo integral $\int\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$ ako je D oblast ograničena linijama $y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$.

Prvo odredimo tačke presjeka (nacrtati sliku). O blast integracije je figura koju ćemo nazvati krivolinijskim toruglom sa tjemenima $A(1,1), B(2,\frac{1}{2}), C(2,2)$ pri čemu su AB i BC duži a AB dio luka krive **Zadatak.** (Kavaljerijev princip) Dokazati sledeće tvrđenje: Ako su A i B dva tijela u R^3 mjerljiva po Žordanu. Neka je $A_c = \{(x,y,z) \in A : z = c\}$ i $B_c = \{(x,y,z) \in B : z = c\}$ presjeci tijela A i B ravni $z = c$. Dokazati da ako su skupovi A_c i B_c mjerlivi i imaju jednake površine za svako $c \in R$, onda tijela A i B imaju jednake zapremine. (Kavaljerijev princip se koristi za izračunavanje zapremina tijela u R^3. Sličan princip se, međutim, može formulisati i za prostor R^n.

Zadatak. Izračunati zapreminu lopte $B = \{x = (x^1,\ldots,x^n) \in R^n : (x^1)^2+\cdots+(x^n)^2 \leq r^2\}$.

Zadatak. Izračunati zapreminu tijela $V = \{x = (x^1,\ldots,x^n) \in R^n : x^1 \geq 0,\ldots,^n \geq 0, x^1+\cdots+x^n \leq a\}$.

Zadatak. Neka je A dopustiv skup mjere nula. Dokazati da je svaka funkcija integrabilna na A i $\int_A f = 0$.

Primjer 8. Izračunaćemo integral $I = \int\int_D xydxdy$, gd je D oblast ogrnaičena krivima $xy = 1$ i $x+y = \frac{5}{2}$.

Prvo odredimo presječne tačke krivih, tj riješimo sistem jednačina: $xy = 1, x+y = \frac{5}{2}$. (skicirati grafike). Presječne tačke su $A(\frac{1}{2},2)$ i $B(2,\frac{1}{2})$. Sada imamo da je

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} ydy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{[}2}^{2} x((\frac{5}{2}-x)^2-\frac{1}{x^2})dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{[}2}^{2}(\frac{25x}{4}-5x^2+x^3-\frac{1}{x})dx = \frac{165}{128}-\ln 2.$$

Primjer 9. Izračunaćemo integral $I = \int\int\int_A zdxdydzzdxdydz$ gdjeje A lopta $x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$.

Imamo da je

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dy=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{\pi}{4}.$$

Primjer 10. Izračunaćemo integral $I=\int\int_A y^2dxdy$ gdje je A skup ograničen linijama $y^2=x, y=x-2$.

Oblast A (skicirati sliku) je elementarna u odnosu na osu Ox: $A=\{(x,y):-1\leq y\leq 2,^2\leq x\leq y+2\}$. Sada je

$$I=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}y^2dx=\int_{-1}^{2}y^2(y^2(y+2-y^2)dy=\frac{16}{4}-\frac{1}{4}+2(\frac{8}{3}+\frac{1}{3})-\frac{32}{5}-\frac{1}{5}=\frac{63}{20}.$$

Primjer 11. Izračunaćemo integral $I=\int\int\int_A zdxdydz$, gdje je A tetraedar ograničen ravnima $x+y+z=a, x=0, y=0, z=0$.

Imamo da je (skicirati oblast integracije)

$$I=\int_{0}^{a}dx\int_{0}^{a-x}dy\int_{0}^{a-x-y}zdz=\int_{0}^{a}dx\int_{0}^{a-x}\frac{(a-x-y)^2}{2}dy=$$

$$\frac{1}{2}\int dx\int(a-x-y)^2dy=\frac{1}{6}\int_{0}^{a}(a-x)^3dx=\frac{a^4}{24}.$$

& 6. Osnovna svojstva integrala

Na osnovu definicije integrala i geometrijske i fizičke interpretacije možemo očekivati da će i integral funkcije više promjenljivih imati svojstva koja su već izučena i dobro poznata kada se radi o integralu funkcije jedne promjenljive: integral zbira će biti jednak zbiru integrala, integral po uniji skupova koji nemaju zajedničkih tačaka jednak je zbiru integrala po skupovima koji čine uniju i slično. Preciziraćemo i dokazatai odgovarajuća svojstva.

Teorema 1._Neka je A dopustiv skup, $f:A\to R, g:A\to R$._

a) Ako je funkcija f integrabilna na A i αR onda je i funkcija $\alpha\cdot f$ integrabilna na A i važi jednakost:

$$\int_A\alpha\cdot f=\alpha\int f.$$

b) Ako su funkcije f i g integrabilne na A onda je i funkcija $f+g$ integrabilna na A i važi jednakost $\int_A(f+g)=\int_A f+\int_A g$.

Iskazi a) i b) zajedno govore da je skup $\mathcal{R}(A)$ funkcija integrabilnih na A linearni prostor nad poljem realnih brojeva a da je preslikavanje $\int:\mathcal{R}(A)\to R$ koje svakoj integrabilnoj funkciji $f\in\mathcal{R}(A)$ pridružuje njen integral $\int_A f$ na skupu A, linerani funkcional.

Dokaz. Dokažimo da je tvrđenje tačno kada je skup A interval u R^n. Tada je, za svaku podjelu P i za svaki izbor tačaka ξ,

$$\sigma(\alpha\cdot f,P,\xi)=\alpha\cdot\sigma(f,P,\xi),\ \sigma(f+g,P,\xi)=\sigma(f,P,\xi)+\sigma(g,P,\xi).$$

Mogli bismo reći da odavde slijedi da je i

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f+g, P, \xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) + \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(g, P, \xi)$$

i

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\alpha f, P, \xi) = \alpha \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi).$$

To je naravno tačno, ali pošto se ovdje radi o novom i drugačijem pojmu granične vrijednosti u odnosu na graničnu vrijednost niza i graničnu vrijednost funkcije, mi ćemo odgovarajuća tvrđenja ipak dokazati, iako će dokazi biti sasvim sličan dokazima odgovarajućih tvrđenja koja se odnose na granične vrijednosti niza funkcije. Krenimo redom. Ako je $\alpha = 0$ onda je za svaku podjelu P i svaki izbor tačaka $\xi, \sigma(\alpha \cdot f, P, \xi) = 0$, pa su obje strane jednakosti iz tvrđenja a) jednake nuli. Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu P čiji je dijametar $\lambda(P)$ manji od δ važi

$$|\sigma(f, P, \xi) - \int_A f| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{|\alpha|}.$$

Za svaku takvu podjelu važi

$$|\sigma(\alpha \cdot f, P, \xi) - \alpha \int_A f| = |\alpha\sigma(f, P, \xi) - \alpha \int_A f| = |\alpha||\sigma(f, P, \xi) - \int_A f| << \epsilon_1 \alpha = \epsilon.$$

To tačno znači da je $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$. Ako je A proizvoljan dopustiv skup onda, uvodeći u razmatrnje interval $J \supseteq A$ i funkciju F, koja se poklapa sa funkcijom f na skupu A i koja je jednaka 0 na $J \setminus A$, koristeći definiciju integrala po dopustivom skupu A dobijamo

$$\int_A \alpha f = \int_J \alpha F = \alpha \int_I F = \alpha \int_A f.$$

tvrđenje a) je dokazano. tvrđenje b) se dokazuje na sličan način: ako je A interval, onda za zadato $\epsilon > 0$ postoji δ tako da za podjele P čiji je dijametar $\lambda(P) < \delta$, važi

$$|\sigma(f, P, \xi) - \int_A f| < \frac{\epsilon}{2},\ |\sigma(g, P, \xi) - \int_A g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kako je

$$\sigma(f+g, P, \xi) = \sigma(g, P, \xi) - \int_A g,$$

to je

$$|\sigma(f+g, P, \xi) - \int_A f - \int_A g| \leq |\sigma(f, P, \xi) - \int_A f| + |\sigma(g, P, \xi) - \int_A g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Time je tvrđenje b) za intervale dokazano. Prelaz na dopustive skupove se vrši kao u dokazu tvrđenja a). Teorema je dokazana.

Teorema 2. *a) Ako je funkcija $f : A \to R$ integrabilna na skupu A i ako je $B \subseteq A$ dopustiv skup onda je f integrabilna na B;*

b) Ako je A dopustiv skup Lebegove mjere nula i ako je $f : A \to R$ ograničena funkcija definisana na A, onda je $\int_A f = 0$.

c) Ako je funkcija f koja je definisana na uniji skupova A i B, integrabilna na svakom od ovih skupova, onda je funkcija f integrabilna i na skupovima $A \cup B$ i na $A \cap B$. Ako je, pored toga, $\mu(A \cap B) = 0$, onda je

$$\int_A f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx.$$

Dokaz. a) tvrđenje a) slijedi direktno iz Lebegove teoreme, jer je skup tačaka prekida funkcije f na skupu B dio skupa tačaka prekida funkcije f na skupu A. Bez korišćenja dokaz se može izvesti na sledeći način: neka je $\epsilon > 0$. Pretpostavimo da je $|f(x)| \leq M$ za $x \in A$. Tada postoje intervali $J_1, \ldots, J_l$ čija unija sadrži granicu skupa B i takvi da $\mu(J_1) + \cdots + \mu(J_l) < \frac{\epsilon}{2M}$. Neka je J interval koji sadrži i intervale $J_1, \ldots, J_l$ i skup A. Neka su dalje f_A i f_B funkcije definisane na J pri čemu je $f_A(x) = f(x)$ za $x \in A, f_A(x) = 0$ za $x \in J \backslash A$ i $f_B(x) = f(x)$ za $x \in B, f_B(x) = 0$ za $x \in J \backslash B$. Dokažimo integrabilnost funkcije f_B na skupu J. Napravimo podjelu P intervala J tako da važi: $S(f_A, P) - s(f_A, P) = \sum(M_{A_i} - m_{A_i})\mu(I_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Posmatrajmo podjelu Q intervala J koja nastaje usitnjenjem podjele P na taj način što se podeonim tačkama kojima je definisana podjela P dodaju i tačke na koordinatnim intervalima kojima su definisani intervali $J_1, \ldots, J_l$. Tada je $S(f_A, Q) - s(f_A, Q) < S(f_A, P) - s(f_A, P) < \frac{\epsilon}{2}$. Posmatrajmo razliku $S(f_A, P) - s(f_A, P)$. Odgovarajuću sumu podijelimo na dva dijela: prvi dio $\sum'$ će činiti sabirci koji odgovaraju onim intervalima podjele Q čija je unija jednaka $J_1 \cup \ldots \cup J_l$ a drugi dio $\sum$" ostali sabirci. Pri tome je za sabirke iz prve grupe $M_{B_i} - m_{B_i} \leq 2M$, pa je $\sum' \leq 2M(\mu(J_1) + \cdots + \mu(J_l) < 2M\frac{\epsilon}{4M} < \frac{\epsilon}{2}$. Što se sume $\sum$" tiče sabirci oblika $(M_{B_i} - m_{B_i})\mu(J_i)$ su ili jednaki nuli (ako odgovarajući interval J_i nema zajedničkih tačaka sa skupom B) ili je jednak $(M_{A_i} - m_{A_i})\mu(J_i)$ ako interval J_i leži u B. Zbog toga je $\sum$" $\leq S(f_A, Q) - s(f_A, Q) < \frac{\epsilon}{2}$. Tako dobijamo da je $S(f_B, Q) - s(f_B, Q) = \sum' + \sum$ « $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, pa je dakle funkcija f_B integrabilna na J, odnosno , funkcija f je integrabilna na B.

b) Zajedno sa funkcijom f posmatraćemo i funkcije $g(x) = m, h(x) = M, x \in A$. Primijetimo da iz pretpostavke da je skup A Lebegove mjere nula, slijedi da ne postoji interval pozitivne mjere koji leži u cjelosti u skupu A. Zbog toga će za svaku podjelu $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ intervala I koji sadrži skup A, biti $m_i(\chi_A) = 0$ za $i = 1, \ldots, k$, pa je $s(\chi_A, P) = \sum m_i\mu(A_i) = 0$, gdje je χ_A funkcija definisana na I tako što je postavljeno $\chi_A(x) = 1$ za $x \in A$ i $\chi_A(x) = 0$ za $x \in I \backslash A$. To znači da je donji integral $\underline{\int}_A \chi_A dx = 0$. Zbog integrabilnosti funkcije $\chi_A(x) = 1$ na skupu A, slijedi da i gornje sume $S(\chi_A, P) \to 0$ kada $\lambda(P) \to 0$, pa je $\int_A 1 \cdot dx = \mu(A)$. Skup A je dopustiv pa je njegova (Žordanova) mjera $\mu(A) := \int_A 1 \cdot dx = 0$. Dalje je $s(g_A, P) = m \cdot s(\chi_A, P), S(g_A, P) = m \cdot S(\chi_A, P), s(h_A, P) = m \cdot s(\chi_A, P), S(h_A, P) = m \cdot S(\chi_A, P)$. Odavde slijedi da sume $s(g_A, P), S(g_A, P), s(h_A, P), S(h_A, P)$ konvergiraju ka 0 kada dijametar podjela teži ka nuli, odnosno, da je $\int m \cdot dx = m \cdot \mu(A) = 0, \int M \cdot dx = M \cdot \mu(A) = 0$. Sume $s(f_A, P)$ i $S(f_A, P)$ možemo jednostavno ocijeniti sa $s(g_A, P) \leq s(f_A, P) \leq S(f_A, P) \leq S(g_A, P)$, odakle slijedi da i one konvergiraju ka nuli kada $\lambda(P) \to 0$. To znači da je funkcija f integrabilna na A i daje $\int_A f(x)dx = 0$, što je i trebalo dokazati.

c) Prema pretpostavci, A i B su dopustivi skupovi, pa su i skupovi $C = A \cup B$ i

$D = A \cap B$ dopustivi. Na osnovu tvrđenja a) i pretpostavke da je f integrabilna na A slijedi da je f integrabilna na $A \cap B$. Neka je I interval koji sadrži skup C i $f_C : I \to R$ funkcija koja je jednaka nuli na $I \backslash C$ i jednaka funkciji f na C. Tada je, što je lako prvjeriti, $f_C(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_D(x)$. Iz pretpostavke o integrabilnosti funkcije f na skupovima A i B i tvrđenja a), slijedi da su funkcije f_A, f_B i f_D integrabilne na intervalu I, pa je i funkcija f_C integrabilna na I, odnosno funkcija f je integrabilna na C. Dalje, iz gornje formule slijedi i formula

$$\int_I f_C f(x)dx = \int_I f_A f(x)dx + \int_I f_B(x)dx - \int_I f_D(x)dx,$$

odnosno

$$\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx - \int_{A\cap B} f(x)dx,$$

Specijalno, ako je $\mu(A \cap B) = 0$, onda je, prema tvrđenju b), poslednji integral jednak nuli, odakle slijedi tvrđenje teoreme.

Teorema 3. *Pretpostavimo da je A dopustiv skup.*

a) Ako je funkcija f integrabilna na A, onda je i funkcija $|f|$ integrabilna na A i važi: $|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f(x)|dx$.

b) Ako je funkcija f integrabilna na A ako je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in A$, onda je $\int_A f(x)dx \geq 0$.

c) Ako su funkcije f i g integrabilne na A i ako je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in A$, onda je $\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$.

d) Ako je funkcija f integrabilna na A i ako je $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in A$, onda je $m \cdot \mu(A) \leq \int_A f(x)dx \leq M \cdot \mu(A)$.

e) Ako je funkcija f integrabilna na A i ako je $m = \inf_{x\in A} f(x), M = \sup_{x\in A} f(x)$, onda postoji realan broj $\theta \in [m, M]$ tako da je $\int_A f(x)dx = \theta \cdot \mu(A)$.

f) Ako je funkcija $f \in \mathcal{R}(A)$ nenegativna na A ako je $\int_A f(x)dx = 0$, onda je $f(x) = 0$ skoro svuda na A.

g) Ako je funkcija f neprekidna na Ai ako je skup A povezan, onda postoji tačka $\eta \in A$ tako da je $\int_A f(x)dx = f(\eta) \cdot \mu(A)$.

h) Ako su funkcije f i g integrabilne na A i ako je $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in A$, onda je $m \int g(x)dx \leq \int_A f(x)g(x)dx \leq M \int g(x)dx$.

Dokaz. Dokaze svih tvrđenja ćemo izvesti samo za intervale ; da tvrđenja važe i za druge dopustive skupove izvodi se na način koji smo demonstrirali u dokazu prethodne teoreme, tako da taj postupak sada nećemo ponavljati.

a) Iz relacije

$$||\sigma(f, P, \xi) - |\int_A f| \leq |\sigma(f, P, \xi) - \int_A f|$$

slijedi da ako integralne sume $\sigma(f, P, \xi)$ konvergiraju ka $\int_A f$, onda njihovi moduli $|\sigma(f, P, \xi)|$ konvergiraju ka $|\int_A f|$. Primijetimo da je za dvije proizvoljne tačke x i y iz skupa B na kojem je funkcija f definisana važi : $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$. Ako fiksiramo y i posmatramo one x iz B u kojima je $f(x) \geq f(y)$, dobićemo da je $\sup\{|f(x)| : x \in B\} - |f(y)| \leq \sup\{f(x) : x \in B\} - f(y)$. Dalje, prelazeći na infimum po $y \in B$, dobijamo da je $\sup\{|f(x)| : x \in B\} - \inf\{|f(x)| : x \in B\} \leq \sup\{f(x) : x \in B\} - \inf\{f(x) :$

$x \in B\}$. Zbog toga će za svaku podjelu $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ na svakom intervalu I_j važiti : $M_j(|f|) - m_j(|f|) \leq M_j(f) - m_j(f)$. Zbog toga, za svaku podjelu P važi :

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P).$$

Odavde i na osnovu osnovne teoreme o integrabilnosti, slijedi da ako je funkcija f integrabilna na I onda je i funkcija $|f|$ integrabilna na I. Dalje imamo da je za svaku podjelu P i za svaki izbor tačaka ξ

$$\sigma(|f|, P, \xi) = \sum |f(\xi_i)\mu(I_i) \geq |\sum f(\xi_i)\mu(I_i) = \sigma(f, P, \xi).$$

Već smo utvrdili da postoje granične vrijednosti integralnih suma $\sigma(|f|, P, \xi)$ i $\sigma(f, P, \xi)$ kada dijametar podjela teži ka nuli. Iz gornje relacije slijedi da je

$$\lim \sigma(|f|, P, \xi) \geq \lim |\sigma(f, P, \xi)|,$$

odnosno $\int_A |f| \geq |\int_A f|$. što je i trebalo dokazati.

b) Očigledno da za nenegativnu funkciju f, za svaku podjelu P svaki izbor tačaka ξ , važi $\sigma(f, P, \xi) \geq 0$. Ako je funkcija f još i integrabilna onda će odavde slijediti da je i $\int_A f = \lim \sigma(f, P, \xi) \geq 0$.

c) tvrđenje je posledica teoreme 1 i tvrđenja b).

d) Iz relacije $m \leq f(x) \leq M$ i tvrđenja c) slijedi da je $\int_A m dx \leq \int_A f(x)dx \leq \int_A M dx$. Kako je ranije objašnjeno, $\int_A m dx = m\mu(A), \int_A M dx = M\mu(A)$ i, koristeći tvrđenje c) izvodimo tvrđenje d).

e) Ako je $\mu(A) = 0$ onda je $\int_A f(x)dx = 0$ a za svako $\theta \in [m, M], \theta\mu(A) = 0$, pa je dakle tvrđenje tačno. Ako je $\mu(A) > 0$, onda se, na osnovu tvrđenja d), razlomak $\frac{\int_A f(x)dx}{\mu(A)}$ nalazi između m i M, odnosno ovaj količnik je jednak nekom $\theta \in [m, M]$. Odavde slijedi tvrđenje e).

f) Pretpostavimo da je I interval u R^n i da funkcija $f : I \to R$ zadovoljava uslove: $f \geq 0$ na $I; \int_I f(x)dx = 0$. Prema Lebegovoj teoremi skup tačaka prekida funkcije f je skup mjere nula. Neka je a tačka neprekidnosti funkcije f. Ako je $f(a) = c > 0$, onda postoji interval $J \subseteq I$, tako da je $f \geq \frac{c}{2}$ na skupu J. Koristeći tvrđenje a) zaključujemo da je tada $\int_I f(x)dx = \int_J f(x)dx + \int_{I \setminus J} f(x)dx \geq \frac{a}{2}\mu(J) > 0$, što je suprotno pretpostavci. Ako je A proizvoljan dopustiv skup, onda se tvrđenje može izvesti tako što će se tvrđenje koje smo upravo dokazali primijeniti na funkciju f_A koja je definisana na nekom intervalu I koji sadrži skup A, uzimajući u obzir da je $\mu(\partial A) = 0$.

g) Ako je $\mu(A) = 0$ onda su i lijeva i desna strana jednakosti iz tvrđenja g) jednake nuli i tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je $\mu(A) > 0$. Tada je, zbog neprekidnosti, funkcije $f, f(A)$ povezan skup u R. Kako je $\inf f(x) = m \leq f(x) \leq M = \sup f(x), f(A)$ je interval i $(m, M) \subseteq f(A) \subseteq [m, M]$. A sada primijenimo tvrđenje g). Ako je $\theta \in (m, M)$, onda postoji $\xi \in A$, tako da je $f(\xi) = \theta$ i tvrđenje je tačno. Ako je $\theta = m$, onda je $\int_A (f(x) - m)dx = 0$. Kako je $f(x) - m \geq 0$, to je $f(x) - m = 0$ skoro svuda na A, pa opet postoji $\xi \in A$ tako da je $f(\xi) = m (= \theta)$.

h) Primijetimo odmah da, koristeći Lebegovu teoremu i uočavajući da za skup tačaka prekida C_{fg} funkcije $f \cdot g$ važi $C_{fg} \subseteq C_f \cup C_g$, iz pretpostavki o integrabilnosti funkcija f i g slijedi integrabilnost funkcije $f \cdot g$. Dalje, tvrđenje slijedi direktno iz relacije $m \cdot g(x) \leq$

$f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$ (svojstvo linearnosti integrala koje je formulisano u teoremi 1 i svojstvo monotonosti c).

Primjer 1. Izrčunati integral $I = \int\int\int_V (x+y+z)dxdydz$ gdje je V tetraedar ogrančen ravnima $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a$.

Integral možemo računati na sljedeći način: (skicirati oblast integracije) da je

$$I = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} (x+y+z)dz = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} (x+y+z)dz.$$

i dobiti rezutat $I = \frac{a^3}{8}$. Možemo takodje primijetiti da je $I = I_1 + I_2 + I_3$, gdje je $I_1 \int\int\int_V xdxdydz$, $I_2 = \int\int\int_V ydxdydz$, $I_3 = \int\int\int_V zdxdydz$. Pri tome je očigeldno $I_1 = I_2 = I_3$, a integral I_3 smo računali u prethodnom paragrafu. Imali smo $I_3 = \frac{a^3}{24}$, pa je $I = \frac{a^3}{8}$.

Primjer 2. Izračunaćemo integral $I = \int\int_D xdxdy$, gdje je $D = \{(x,y) : 2x \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.

Primijetimo da je oblast integracije nekoncentrični prsten (nacrtati skicu). Označimo sa C_1 krug $x^2+y^2 \leq 9$ a sa C_2 krug $x^2+y^2 \leq 2x$. Tada je $D = C_1 \setminus C_2$. Tada je

$$I = \int\int_{C_1} xdxdy - \int\int_{C_2} xdxdy = I_1 - I_2.$$

Pri tome je

$$I_1 = \int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xdx = 0,$$

jer je integral po promjenjljivoj x integral neparne funkcije po simetričnom (u onosu na nulu) odsječku.

Dalje je

$$I_2 = \int_{-1}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xdx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}dy = \pi.$$

Dakle, $I = I_1 - I_2 = -\pi$.

Primjer 3. Izračunaćemo integral $I_a = \int\int_G (x+2y)dxdy$, gdje je G oblast ograničena limijama $y=x, y=2x, y=a, y=2a, a>0$.

Oblast integracije je trapez čija su tjemena $A(\frac{a}{2}, a), B(a,a), C(3a,3a), D(\frac{3a}{2}, 3a)$.

Imamo da je

$$I = \int_a^{3a} dy \int_{y/2}^{y} (x+2y)dx = \int_a^{3a} [(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{8}) + 2y(y - \frac{y}{2}]dy = \frac{11}{8}\frac{1}{3}(27a^3 - a^3 = \frac{143}{12}a^3.$$

Integral možemo izračunati tako što ćemo oblast integracije G dopuniti trouglovima G_1 čija su tjemena $A, D, E(\frac{a}{2}, 3a)$ i G_2 čija su tjemena $(B, F(a,3a), C$ do pravougaonika Π čija su tjemena A, F, C, E. Pri tome je

$$I_1 = \int\int_{\Pi} (x+2y)dxdy,$$

$$I_2 = \int\int_{G_1} (x+2y)dxdy = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} dx \int_{2x}^{3a} (x+2y)dy$$

$$I_3 = \int_{3a/2}^{3a} \int_a^x (x+2y)dy.$$

pa je $I = I_1 - I_2 - I_3$.

Primjer 3. Promjenom redosljeda promjenljivih izračunaćemo integral $I = \int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}dy$ U računanju integrala postupićemo tako tako što ćemo integraliti po promjenljivoj y, pa zatim po promjenljivoj x, postoje teškoće već u računanju prvog integrala. Promjenom redosljeda uzastopnih integrala, imamo da je

$$I = \int_0^1 \int_0^y \sqrt[4]{1-y^2}dx = \int_0^1 \sqrt[4]{1-y^2}ydy = \frac{2}{5}.$$

§4. Zamjena promjenljivih

Prisjetimo se formule $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ za zamjenu promjenljivih kod integrala funkcije jedne promjenljive, koja naravno važi pod određenim uslovima. Naš prirodan cilj je da izvedemo sličnu formulu za višestruke integrale. U toj formuli će se pojaviti i determinanta Jakobijeve matrice. Da bismo objasnili to pojavljivanje determinamnte, potrebno je prethodno izučiti geometrijski smisao determinante.

§Geometrijsko značenje determinante.

Ako je A matrica formata 2×2, onda svaka njena kolona može predstavljati koordinate nekog vektora u fiksiranoj bazi, recimo u bazi $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Ako matrica reprezentuje linearno preslikavanje onda su u prvoj koloni matrice napisane kordinate vektora $A(e_1)$ a u drugoj koordinate vektora $A(e_2)$, sve to u bazi $e_1, e_2 : A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2,\ A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$. Povrǐna paralelograma Π konstruisanog nad vektorima $A(e_1), A(e_2)$ jednaka je $|A(e_1)| \cdot |\, ort_1(A(e_2)$, gdje $ort_1(A(e_2))$ oznaǎva vektor visine iz kraja vektora $A(e_2)$ na $A(e_1)$. Lako je izračunati da je ovaj proizvod jednak dužini vektorskog proizvoda vektora $A(e_1)$ i $A(e_2)$ i da iznosi $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$, a to je tačno apsolutna vrijednost determinante matrice A. Determinanta je pozitivna ako je ugao α od vektora $A(e_1)$ do vektora $A(e_2)$, u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu manji od 180^0 (a veći od nule naravno; u protivnom je (za $180^0 < \alpha < 360^0$) determinana negativna. Za detrminantu kažemo da je orjentisana površina paralelograma Π.

Ako je A matrica formata 3×3 onda se njene kolone mogu posmatrati kao koordinate vektora $A(e_1), A(e_2), A(e_3)$, gdje je $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Determinata $det\, A$ matrice A jednaka je mješovitom proizvodu vektora $A(e_1), A(e_2)$ i $A(e_3)$, ili, kako se to kaže, orjentisanoj zapremini paralelepipeda koji je određen vektorima $A(e_1), A(e_2), A(e_3)$. Zapremina paralelepipeda Π se može izračunati kao proizvod $|A(e_1)| \cdot ort_1(A(e_2)) \cdot ort_2(A(e_3))$, gdje je $ort_2(A(e_3))$ vektor visine iz kraja vektora $A(e_3)$ na ravan određenu vektorima $A(e_1)$ i $A(e_2)$. Ona je tačno jednaka apsolutnoj vrijednosti determinante $det\, A$.

U prostoru R^n zapremina n-dimenzionog paralelepipeda Π koji je određen vektorima $a_1, \ldots, a_n, (\Pi = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \alpha_n \leq 1\})$ definiše se formulom $V(\Pi) = |a_1| \cdot |\, ort_1\, a_2| \cdots |\, ort_{n-1}\, a_n|$, gdje $ort_k\, a_{k+1}$ označava vektor visine iz kraja vektora a_k na potprostor određen vektorima $a_1, a_2, \cdots, a_n$. U kursevima lenerne algebre se pokazuje da je tako definisana zapremina tačno jednaka apsolutnoj vrijednosti determinante čije su kolone koordinate vektora $a_1, \ldots, a_n$. Ako se determinanta veže za linearno preslikavanje koje se reprezentuje matricom A, onda se kolone matrice mogu interpretirati kao koordinatae vektora $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ a determinata matrice A kao orjentisana zapremina n-dimenzionog paralelepipeda Π određenog vektorima $A(e_1), \ldots, A(e_n)$. Mjera $\mu(\Pi)$ paralelepipeda Π jednaka je apsolutnoj vrijednosti determinante matrice A. Ako je sada $B : R^n \to R^n$ linearni operator onda je slika $\Pi' = B(\Pi)$ takođe paralelepiped. Lako je dokazati da ako je $b_i = B(a_i), i = 1, \ldots, n$, onda je $\Pi' = \{\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n : 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \alpha_n \leq 1\}$. Da bismo izračunali mjeru $\mu(\Pi')$ paralelepipeda Π' primijetimo da je $b_i = B(a_i) = B((A(e_i))$. Ako je C kompozicija preslikavanja B i A, onda je dakle, $b_i = C(e_i), i = 1, \ldots n$. Zbog toga je $\mu(\Pi') = |\, det\, C|$. Kako je $det\, C = det\, A \cdot det\, B$ i $det\, A = \mu(\Pi)$, zaključujemo da je $\mu(\Pi') = \mu(\Pi) \cdot det\, B$. Ako je $\mu(\Pi) \neq 0$, onda je $det\, B = \frac{\mu(\Pi')}{\mu(\Pi)}$. Determinanta matrice (linearnog preslikavanja) daje odnos mjera paralelepipeda slike i paralelepipeda originala. Dokažimo jedno opštije tvrđenje koje je važno za izvođene formule za zamjenu promjenljivih kod višestrukog integrala. Naime, važi sledeća teorema

Teorema 1. *Neka je $A \subseteq R^n$ dopustiv skup i $T : R^n \to R^n$ linearno preslikavanje. Tada je i slika $T(A) \subseteq R^n$ skupa A dopustiv skup i $\mu(T(A) = det\,T \cdot \mu(A)$.*

Dokaz. Za početak razmotrimo slučaj $det\,T = 0$. Tada je slika $T(R^n)$ prostora R^n pravi potprostor prostora R^n, pa je $B = T(A) \subseteq T(R^n), \mu(B) = 0$ i tvrđenje je tačno. Neka je $det\,T \neq 0$. Tada je preslikavanje T invertibilno, preslikavanje T^{-1} je takođe linearno i $A = T^{-1}(B)$. Preslikavanja T i T^{-1}otvorene skupove slikaju u otvorene skupove (dokazati!). Odavde slijedi da je $\partial B = T(\partial A)$. Neka je $\epsilon > 0$ i $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{det\,A}$. Tada se skup ∂A može pokriti intervalima $I_1, \ldots, I_k$ čiji je ukupni zbir mjera manji od ϵ_1. Tada paralelepipedi $T(I_1), \ldots, T(I_k)$ pokrivaju granicu ∂B, a mjera skupa $T(I_i)$ jednaka je $\mu(I_i) \cdot det\,A$. Zbir ovih mjera jednak je $|\,det\,T \cdot \sum \mu(I_i) < \epsilon_1 \cdot |\,det\,T = \epsilon$. Odavde slijedi da je $\mu(\partial B) = 0$. Skup B je, dakle, dopustiv. Posmatrajmo sada pokrivanje skupa A intervalima $J_1, \ldots, J_l$ čiji je ukupni zbir mjera manji od $\mu(A) + \epsilon$. Kako je slika $T(J_i)$ intervala J_i paralelepiped čija je mjera $|\,det\,A| \cdot \mu(I_j)$, to je zbir mjera ovih paralelepipeda manji od $|\,det\,T| \cdot (\mu(A) + \epsilon_1) = |\,det\,T| \cdot \mu(A) + \epsilon$. Dakle, $\mu(B) < det\,A \cdot \mu(T) + \epsilon$. Kako je $\epsilon > 0$ proizvoljno, to je $\mu(B) \leq det\,A \cdot \mu(A)$. Ako su $K_1, \ldots, K_m$ intrvali koji leže u A i ako je zbir njihovih mjera $\sum \mu(K_i) > \mu(A) - \epsilon_1$. Zbog toga je zbir mjera paralelepipeda $T(K_i)$ ve 'i od $|\,det\,T \cdot (\mu(A) - \epsilon_1) = det\,T \cdot \mu(A) - \epsilon$. Odavde slijedi da je $\mu(B) > det\,T \cdot \mu(E) - \epsilon$ i $\mu(B) \geq det\,T \cdot \mu(A)$. Ukupno, imamo da je $\mu(B) = det\,T \cdot \mu(A)$.

6.2. Zamjena promjenljivih

Da bismo došli do formule za zamjenu promjenljivih, za početak ćemo pretpostaviti da se smjena vrši posredstovom regularnog linearnog preslikavanja (matrice) T. Neka je A interval i neka se naš zadatak sastoji u tome da se izračuna $\int_B f(x)dx$ po skupu $B = T(A)$, koji je dopustiv. Tada podjela $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ intervala A inducira podjelu $T(I_1), \ldots \{T(I_2), \ldots, T(I_k)\}$ paralelepipeda $B = T(A)$. Pri tome je $\int_B f(x)dx = \sum_i \int_{T(I_i)} f(x)dx$. Ako je f neprekidna onda, prema teoremi o srednjoj vrijednosti, slijedi da je $\int_{T(I_i} f(x)dx = f(x_i)\mu(T(I_i))$, gdje $x_i \in T(I_i)$. Pri tome je $\mu(T(I_i)) = \mu(I_i)|\,det\,T|$ i $x_i = T(t_i), t_i \in I_i$. Tako dobijamo jednakost

$$\int_B f(x)dx = |\,det\,T| \sum_i f(T(t_i))\mu(I_i).$$

Suma na desnoj strani konvergira ka $|\,det\,T| \int_A (T(t))dt$. Iz gornjih razmatranja naslućujemo da važi sledeća teorema

Teorema 2. *Neka je $A \subseteq R^n$ dopustiv skup i $T : R^n \to R^n$ linearno preslikavanje. Ako je funkcija $f : B = T(A) \to R$ je integrabilna na B onda je funkcija $f \circ T$ integrabilna na A i tada je $\int_{T(A)} f = |\,det\,T| \cdot \int_A f \circ T$.*

Dokaz. U teoremi 1 dokazano je da ako je A dopustiv skup tada je $B = T(A)$ dopustiv i $\mu(T(A)) = |\,det\,T| \cdot \mu(A)$. Neka je f integrabilna na B. Dokažimo integrabilnost funkcije $f \circ T$ na skupu A. Ako je $det\,T = 0$, onda slika $T(A)$ leži u potprostoru prostora R^n čija je dimenzija manja od n. Tada je i $\mu(T(A)) = 0$, pa je tada i cijelo tvrđene teoreme tačno-i na jednoj i na drugoj strani jednakosti stoji nula. Neka je $det\,T \neq 0$. Označimo sa $D \subseteq B$ skup tačaka prekida funkcije f na skupu B. Neka je $D' = T^{-1}(D) \subseteq A$. Pokrijmo skup D intervalima $I_1, I_2, \dots$ čija je ukupna mjera manja od $\epsilon_1 = \epsilon |\,det\, T$. Tada je skup D' prekriven paralelepipedima $T^{-1}(I_1), T^{-1}(I_2), \dots$, čije su mjere $\frac{\mu(I_1)}{|\,det\, T|}, \frac{\mu(I_1)}{|\,det\, T|}, \dots$ pa je $\mu(D') \leq \sum \frac{\mu(I_i)}{|\,det\, T|} < \frac{\epsilon}{|\,det\, T|}$. Ako je tačka $t \in A \backslash D'$, onda je $T(t) = x \in B \backslash D$. Linearno preslikavanje T je neprekidno, funkcija f je neprekidna u tački $x = T(t)$, pa je i kompozicija $F = f \circ A, (F(t) = f((T(t))$ neprekidna u tački t. Time je dokazano da je skup tačaka prekida funkcije F na skupu A mjere nula. Odavde slijedi integrabilnost funkcije F na skupu A.

Dokažimo da je $\int_B f = \int_A f \circ T |\,det\, T$. Neka je J interval koji sadrži skup A i $g : J \to R$ funkcija koja se poklapa sa funkcijom $f \circ T$ na skupu A a jednaka je nuli van skupa A. Posmatrajmo dalje funkciju $h : T(J) \to R$ koja je jednaka f na skupu B i jednaka nuli van B. Tada je

$$\int_{T(J)} h = \int_B h + \int_{T(J)\backslash B} h = \int_B f + \int_{T(J)\backslash B} 0 = \int_B f.$$

Ako je $P = \{J_1, \dots, J_k\}$ podjela intervala J onda će ona inducirati podjelu paralelepipeda $T(J)$ na paralelepipede $\{T(J_1), \dots, T(J_k)\}$. Tada je

$$\int_{T(J)} h = \sum \int_{T(J_i)} h = \sum \theta_i \mu(T(J_i)) = \sum \theta_i \mu(J_i) |\,det\, T|,$$

gdje je $\theta_i \in [m_i, M_i], m_i = \inf\{h(x) : x \in T(J_i)\}, M_i = \sup\{h(x) : x \in T(J_i)\}$. Primijetimo odmah da je za $t \in J, g(t) = f(T(t)) = f(x) = h(x), x \in T(J)$, odakle slijedi da je $m_i = \inf\{g(x) : x \in J_i\}, M_i = \sup\{g(x) : x \in J_i\}$. Neka je $\epsilon > 0$ i $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{|\,det\, T|}$. Zbog integrabilnisti funkcije $f \circ T$ na skupu A slijedi da je funkcija g integrabilna na skupu J, pa postoji broj $\delta > 0$ takav da kada je dijametar podjele manji od δ važi $|\int_J g - s(g, P)| < \epsilon_1, |\int_J g - S(g, P)| < \epsilon_1$, gdje je $s(g, P) = \sum m_i \cdot \mu(J_i)$ i $S(g, P) = \sum M_i \cdot \mu(J_i)$. Fiksirajmo jednu takvu podjelu P. Uočimo da je suma $\sum \theta_i \mu(J_i) \in [s(g, P), S(g, P)]$. Zbog toga je $|\int_J g - \sum \theta_i \mu(J_i)| < \epsilon_1$,a odavde slijedi da je $\int_J g |\,det\, T| - |\,det\, T| \sum \theta_i \mu(J_i) < \epsilon_1 \cdot |\,det\, T| = \epsilon$. No, to zapravo znači da je

$$|\int_J g \cdot |\,det\, T - \int_B f| = |\int_A (f \circ T) \cdot |\,det\, T| - \int_B f| < \epsilon,$$

odakle slijedi da je $\int_A (f \circ T) \cdot |\,det\, T| = \int_B f$, ili preciznije

$$\int_A (f(T(t)dt \cdot |\,det\, T| = \int_B f(x)dx.$$

Posmatrajmo sada preslikavanje $\varphi : D \to R^n$, gdje je D oblast u R^n. Ako je preslikavanje φ diferencijabilno u tački $a \in D$ onda je $\varphi(a + h) - \varphi(a) = \varphi'(a)h + |h|\omega(h)$. Preslikavanjem φ paralelepiped $\Pi \subseteq R^n$ će se preslikati u krivolinijski paralelepiped $\varphi(\Pi)$, dok je $\varphi'(a)(\Pi) = \Pi'$ takođe paralelepiped. Pri tome važi $\mu(\Pi') = det\, \varphi'(a) \cdot \mu(\Pi)$. Ako je dijametar paralelepipeda Π dovoljno mali onda je i mjera $\mu(\varphi(\Pi))$ približno jednaka mjeri $|\,det\, \varphi'(a)|\mu(\Pi)$ (vidi sliku). Sličan zaključak važi i ako je $\Pi = A$ dopustiv skup. I tada je, kako je ranije dokazano, $\mu(\Pi') = |\,det\,\varphi'(a)| \cdot \mu(\Pi)$ a mjera skupa $\varphi(A)$ može se računati približno po formuli $\mu(\varphi(A)) \simeq |\,det\,\varphi'(a)| \cdot \mu(\Pi)$.

Vratimo se ponovo pitanju zamjene promjenljivih kod višestrukih integrala. Kako doći do odgovarajuće formule? Neka je D skup u $R^n, f \in \mathcal{R}(D)$ a $\varphi : D' \to D$ funkcija definisina na $D' \subseteq R^n$. Da li se tada integracija po skupu D može zamijeniti integracijom po D'? Pretpostavimo da je $D' = I$ interval a φ đovoljno dobro"preslikavanje. Ako je $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ podjela intervala I onda je $\{\varphi(I_1), \ldots, \varphi(I_k)\}$ podjela skupa D. Tada je $\int_D f(x)dx = \sum_{j=1}^k \int_{\varphi(I_j)} f(x)dx$. Po teoremi o srednjoj vrijednosti slijedi da je $\int_{\varphi(I_j)} f(x)dx = f(\xi_i)\mu(\varphi(I_i))$, gdje je $f(\xi_i) = f(\varphi(t_i))$. Ako je φ linearno preslikavanje tada je (geometrijsko značenje determinante) $\mu(\varphi(I_i)) = |\,det\,\varphi|\mu(I_i)$. Tako dobijamo da je $\sum_{j=1}^k \int_{\varphi(I_j)} f(x)dx = \sum_{j=1}^k f(\varphi(\tau_j))|\,det\,\varphi'|$. No, s desne strane jednakosti stoji integralna suma jedne nove funkcije. U graničnom procesu dobijamo da je

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(\varphi(t))|\,det\,\varphi'(t)|dt.$$

To je ta formula. Uočimo sličnost u načinu izvođenja ove formule i formule iz teoreme 2.

Sada ćemo precizirati uslove pod kojima formula važi i izvesti dokaz. Formulisaćemo još nekoliko rezultata koji su vezani za postavljena pitanja. Prethodno ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 1. *Neka su D i D' oblasti u R^n, $G' \subseteq D'$, pri čemu je $\partial G' \subseteq D'$. Ako je $\varphi : D' \to D$ difemorfizam, onda za granicu $\partial\varphi(G')$ skupa $\partial\varphi(G')$ važi jednakost: $\partial\varphi(G') = \varphi(\partial G')$.*

Dokaz. Neka je $a \in \partial\varphi(G') \subseteq D$. Tada je $a = \varphi(a'), a' = \varphi^{-1}(a) \in D'$. Imamo tri mogućnosti: $a' \in int\,G', a' \in int(G'^c), a' \in \partial G'$. Ako $a' \in int\,G'$, onda postoji okolina $\mathcal{O}(a')$ koja leži u G'. Zbog neprekidnosti preslikavanja φ, tada postoji okolina $\mathcal{O}(a) \subseteq D$ tačke a takva da je $\varphi^{-1}(\mathcal{O}(a)) \subseteq \mathcal{O}(a')$. Odavde slijedi i da $\mathcal{O}(a) \subseteq \varphi(G')$. Dobili smo kontadikciju. Sasvim slično se odbacuje i mogućnost da $a' \in int(G'^c)$. Ostaje da $a' \in \partial G'$, odnosno $a \in \varphi(\partial G')$.

Lema 2. *Ako su D i D' oblasti u R^n i ako je $I \subseteq D'$ kocka a $\varphi : D' \to D$ difemorfizam, onda vači nejedankost: $\mu^*(\varphi(I)) \leq k^n\mu(I)$, gdje je sa μ^* Žordanova spoljašnja mjera skupa $\varphi(I)$ i gdje je k konstanta čije je značenje precizirano u dokazu leme.*

Dokaz. Neka je

$$I = \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n : a^1 - r \leq x^1 \leq a^1 + r, \ldots, a^n - r \leq x \leq a^n + r\}.$$

Označimo sa $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ komponente preslikavanja φ. To su funkcije definisane na skupu D' sa vrijednostima u R. Tada iz Tejlorove formule slijedi da je

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(a) = \partial_1\varphi_1(a + \theta_1(x-a))(x^1 - a^1) + \cdots + \partial_n\varphi_1(a + \theta_1(x-a))(x^n - a^n)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(a) = \partial_1\varphi_n(a + \theta_n(x-a))(x^1 - a^1) + \cdots + \partial_n\varphi_n(a + \theta_n(x-a))(x^n - a^n).$$

Ocijenimo rastojanja $\varphi_1(x) - \varphi_1(a)|, \ldots, |\varphi_n(x) - \varphi_n(a)|$. Primijetimo da je

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(a)| \leq |\partial_1\varphi_1(a + \theta_1(x-a))||x^1 - a^1| + \cdots + |\partial_n\varphi_1(a + \theta_1(x-a))||x^n - a^n| \leq$$

$$\max_j |x^j - a^j| \sum_i |\partial_i \varphi_1(a + \theta_1(x-a))| \leq r \sum_i |\partial_i \varphi_1(a + \theta_1(x-a))|,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(a)| \leq |\partial_1 \varphi_n(a + \theta_n(x-a))||x^1 - a^1| + \cdots + |\partial_n \varphi_n(a + \theta_n(x-a))||x^n - a^n| \leq$$

$$\max_j |x^j - a^j| \sum_i |\partial_i \varphi_n(a + \theta_n(x-a))| \leq r \sum_i |\partial_i \varphi_1(a + \theta_1(x-a))|.$$

Za svako $x \in I$ označimo maksimalnu od suma $\sum_i |\partial_i \varphi_1(x)|, \sum_i |\partial_i \varphi_2(x)|, \ldots, \sum_i |\partial_i \varphi_n(x)|$ sa $|\varphi'(x)|_{max}$. Ova funkcija je ograničena na I a njenu najveću vrijednost na skupu I označićemo sa k. Ako još $\varphi(x)$ označimo sa y, onda iz formula koje smo napisali slijedi da je

$$|y^1 - \varphi_1(a)| \leq kr, \ldots, |y^n - \varphi_n(a)| \leq kr.$$

To znači da se svaka tačka slike $\varphi(I)$ intervala I čije su sve stranice jednake $2r$ nalazi unutar intervala čije su sve stranice jednake $2kr$. Spoljašnja Žordanova mjera skupa $\varphi(I)$ manja je ili jednaka od $k^n \cdot (2r)^n = k^n \mu(I)$.

Lema 3. *Ako je $A \subseteq D'$ skup Žordanove mjere nula i $\varphi : D' \to D$ difeomorfizam oblasti D' na oblast D, onda je i $\varphi(A)$ skup Žordanove mjere nula.*

Dokaz. tvrđenje je direktna posledica prethodne leme. Neka je $\epsilon > 0$. Sa k označimo maksimum funkcije $|\varphi'(x)|_{max}$ (v. dokaz prethodne leme) na skupu B koji sadrži skup A. Ako skup A prekrijemo intervalima$-n$-dimenzionim kockama čija je ukupna mjera manja od $\frac{\epsilon}{k^n}$, onda će slika $\varphi(A)$ biti prekrivena skupovima koji su sadržani u intervalima čija je ukupna mjera manja $\frac{k^n \epsilon}{k^n} = \epsilon$. Odavde slijedi tvrđenje.

Lema 4. *Ako je $A' \subseteq D'$ dopustiv skup i $\varphi : D' \to D$ difeomorfizam oblasti D' na oblast D, onda je i $\varphi(A')$ dopustiv skup.*

Dokaz. Prema pretpostavci, granica $\partial A'$ skupa A' je Žordanove mjere nula. Na osnovu leme 2 slijedi da je $\varphi(\partial A')$ granica skupa $\varphi(A')$, čija je mjera, na osnovu leme 3, skup Žordanove mjere nula. Dakle $\varphi(A')$ je dopustiv skup.

Lema 5. *Neka su D' i D oblasti u R^n i $A \subseteq D$. Ako je skup tačaka prekida funkcije $f : A \to R$ mjere nula i $\varphi : D' \to D$ difeomorfizam oblasti D' na oblast D, onda je i skup tačaka prekida funkcije $f \circ \varphi \cdot \mid \det \varphi' \mid$ mjere nula.*

Dokaz. Funkcija φ' je neprekidna prema uslovu, pa je i $det\, \varphi'$ neprekidna na D'. Zbog toga je dovoljno dokazati da je skup P' tačaka prekida funkcije $(f \circ \varphi)$ mjere nula. Neka je P skup tačaka prekida funkcije f. Dokažimo da je $\varphi(P') \subseteq P$, odnosno da je $P' \subseteq \varphi^{-1}(P)$. Ako $x \notin P$ i ako je $t = \varphi^{-1}(x)$, onda je kompozicija $f \circ \varphi$ neprekidna u tački t, odnosno $t \notin P'$. To znači da $x \notin \varphi(P')$, odnosno da $\varphi(P') \subseteq P$ i $P' \subseteq \varphi^{-1}(P)$. Skup P je prema pretpostavci mjere nula, φ^{-1} je difeomorfizam, pa je, na osnovu leme 3 skup P' mjere nula.

Dokažimo još jednu lemu koju ćemo kasnije koristiti za izvođenje dokaza glavne teoreme.

Lema 6. *Neka su D' i D oblasti u R^n i $\varphi : D' \to D$ difeomorfizam. Ako je $A \subseteq D'$ dopustiv skup tada je $\mu(\varphi(A)) \leq \int_A \mid \det \varphi'(x) \mid dx$.*

Dokaz. Na osnovu leme 4 slijedi da je $\varphi(A) \subseteq D$ dopustiv skup. Ako je $I \subseteq D'n$-domenzionalna kocka a $T : R^n \to R^n$ regularan linearni operaor, tada je $\mu(T^{-1}A) = \mid det\, T^{-1}|\mu(A)$. Ako specijalno postavimo $A = \varphi(I)$, dobićemo da je $\mu(T^{-1}\varphi(I)) = \frac{1}{|\, det\, T|}\mu(\varphi(I))$. Ako sa k_I označimo najveću vrijednost funkcije $|\psi'(x)|_{max}$ na skupu C, gdje je $\psi = T^{-1} \circ \varphi$, (primijetimo da je tada $\psi'(x) = T^{-1}\varphi'(x)$), onda ćemo na osnovu leme 2, imati sledeću ocjenu:

$$\mu(\varphi(I)) \leq |\,det\,T|(k_I)^n\mu(I).$$

Neka je J dalje interval koji sadrži skup A i neka je $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ podjela intervala J. Označimo sa A_h uniju onih intervala iz podjele P koji leže u A. Tako je $A_h \subseteq A$. U svakom od intervala I_i izaberimo po jednu tačku x_i. Neka to bude tačka u kojoj $det\,\varphi'(x)$ dostiže najmanju vrijednost. Postavljajući $T = \varphi'(x_i)$ imamo da je

$$\mu(\varphi(I_i)) \leq |\,det\,\varphi'(x_i)|\max(|[\varphi'(x)]^{-1}\varphi'(x)|_{max})^n\mu(I_i),$$

pri čemu se maksimum računa na skupu I_i. Zbog ravnomjerne neprekidnosti funkcije $|[\varphi'(x)]^{-1}\varphi'(x)|_{max}$ na skupu A, imamo da je za dovoljno mali dijametar podjele P, $\max(|[\varphi'(x)]^{-1}\varphi'(x)|_{max})^n < 1+\epsilon$. Tako dobijamo da je za takve podjele P

$$\mu(\varphi(I_i) \leq |\,det\,\varphi'(x_i)(1+\epsilon)\mu(I_i).$$

Sabirajući poslednje nejednakosti po svim i koji odgovaraju skupovima koji učestvuju u izgradnji skupa A_h, dobijamo da je

$$\mu(\varphi(A_h) \leq (1+\epsilon)\sum_i |\,det\,\varphi'(x_i)\mu(I_i).$$

Suma koja stoji na desnoj strani ove nejednakosti konvergira ka $\int_A |\,det\,\varphi'(x)|dx$. S druge strane, lijeva strana nejednakosti konvergira ka $\mu(\varphi(A))$. Kako je $\epsilon > 0$ proizvoljno, odavde slijedi da je

$$\mu(\varphi(A)) \leq \int_A |\,det\,\varphi'(x)|dx.$$

Lema je dokazana.

Konačno ćemo formulisati i glavni rezultat.

Teorema 3. *Neka su D i D zatvorene oblasti u R^n i $\varphi : D' \to D$ difeomorfizam. Ako je funkcija $f : D' \to R$ integrabilna na D onda je funkcija $f \circ \varphi|\det\varphi'|$ integrabilna na D' i važi formula*

$$\int_D f = \int_{D'} (f \circ g)|\,det\,\varphi'|$$

Dokaz. A) Za početak dokažimo tvrđenje uz dopunsku pretpostavku da funkcija f nenegativna na D. Neka je J interval koji sadrži skup D. U podjeli $P = \{J_1, \ldots, J_l\}$ intervala J izdvojmo samo one intervale koji potpuno leže u D. Označimo $\varphi^{-1}(J_j)$ sa A_j. Za svaki od skupova G_j važi (v. lemu 6)

$$\mu(\varphi(A_j)) = \mu(J_j) \leq \int_{A_j} det\,\varphi'(x)|dx.$$

Množeći obje strane nejdnakosti sa m_j i sabirajući dobijene nejednakosti dobijamo

$$\sum m_j\mu(J_j) \leq \sum m_j \int_{A_j} |\,det\,\varphi'(x)|dx.$$

S druge strane, *po* teoremi o srednjoj vrijednosti, imamo da je

$$\int_{A_j} f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx = f(\varphi(\tau_j))\int_{A_j} |\,det\,\varphi'(x)|dx.$$

Zbog toga je

$$m_j \int_{A_j} |\,det\,\varphi'(x)|dx \leq \mu_j \int_{A_j} |\,det\,\varphi'(x)|dx \leq \int_{A_j} |f(\varphi(x)|\,det\,\varphi'(x)|dx$$

odakle slijedi da je

$$\sum m_j\mu(J_j) \leq \sum \int_{A_j} f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx$$

Lijeva strana ove nejedankosti konvergira ka donjem integralu funkcije f na skupu D, koji je jednak integralu $\int_D f$. Pošto skupovi A_j leže u D' i pošto oni nemju zajedničkih unutrašnjih tačaka, zaključujemo da suma na desnoj strani nije veća od $\int_{D'} f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx$. Ukupno, slijedi da je

$$\int_D f(y)dy \leq \int_{D'} f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx.$$

A sada promijenimo uloge skupova D i D'. Ako posmatramo funkciju $g(x) = f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|$ i preslikavanje $\psi(y) = \varphi^{-1}(y), y \in D$, dobićemo

$$\int_{D'} g(x)dx = \int_{D'} f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx \leq \int_D g(\psi(y))|\,det\,\psi'(y)|dy =$$

$$\int_D f(\varphi(\psi(y)))|\,det\,\varphi'(\psi(y))||\,det(\varphi)^{-1}(y)|dy =$$

$$\int_D f(y)|\,det\,\varphi'(\psi(y))\,det(\varphi)^{-1})'(y))|dy = \int_D f(y)dy.$$

Ukupno, za nenegativnu funkciju f važi jednakost:

$$\int_{D'} g(x)dx = \int_D f(y)dy.$$

B) Pretpostavimo da funkcija f nije nenegativna na D. Iz njene neprekidnosti, slijedi da je ona ograničena. Neka je $m \leq f(x) \leq M, x \in D$. Rezultat koji smo dobili primijenimo na funkciju $h(x) = f(x) - m$. Ona je nenegativna, pa važi:

$$\int_D h(y)dy = \int_{D'} h(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx.$$

Lijeva strana jednaka je $\int_D f(y)dy - m\mu(D)$ a desna $\int_{D'} f(\varphi(x))|\,det\,\varphi'(x)|dx - m\int_{D'} |\,det\,\varphi'(x)|dx$. Ranije je pokazano da je $\int_{D'} |\,det\,\varphi'(x)|dx = \mu(\varphi(D') = \varphi(D)$, pa iz gornje relacije slijedi tvrđenje teoreme.

Dajemo još jednu formulaciju teoreme o zamjeni promjenljivih.

Teorema 4. *Neka su D' i D oblasti u R^n i $\varphi : D' \to D$ difeomorfizam. Ako je $A \subseteq D$ dopustiv skup čije zatvaranje leži u D, onda je funkcija $f : A \to R$ integrabilna na $\varphi(A)$ ako i samo ako je $(f \circ g)|\,det\,\varphi'|$ integrabilna na A i tada je*

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ g)|\,det\,\varphi'|.$$

tvrđenja ostaju na snazi ako je φ $1-1$ na $int\,A$ a $det\,\varphi' \neq 0$. Ako $f \in \mathcal{R}(\varphi(D))$, onda važi i gornja formula. U vezi sa činjenicom da kod smjene promjenljivih može biti narušena obostrana jednozněnost preslikavanja φ pomoću kog se vrši smjena, formulisaćemo još jednu teoremu.

Teorema 5. *Neka su D' i D dopustivi skupovi i neka je $\varphi : D' \to D$ takvo preslikavanje za koje postoje skupovi $S' \subseteq D'$ i $S \subseteq D$ mjere nula, tako da φ preslikava difeomorfno i sa ograničenim Jakobijanom $D' \backslash S'$ na $D \backslash S$. Tada $f \in \mathcal{R}(D) \Leftrightarrow (f \circ \varphi)|\,det\,\varphi'| \in \mathcal{R}(D' \backslash S')$ i važi:*

$$\int_D f = \int_{D' \backslash S'} (f \circ \varphi)|\,det\,\varphi'|.$$

Ako je pored veličina $det\,\varphi'$ definisana i ograničena na D' onda u poslednoj formuli možemo integraliti po D.

Formulišimo još jednu važnu teoremu koja se odnosi na razmatrana pitanja, odnosno koja govori o tome u kojoj mjeri može biti narušen uslov $\det \varphi'(x) \neq 0$.

Teorema 6. (Sardova teorema). *Neka je D zatvorena ograničena dopustiva oblast u R^n a funkcija φ ima u D neprekidne parcijalne izvode prvog reda po svim promjenljivim. Neka je $A = \{x \in D : det\,\varphi'(x) = 0\}$. Tada je $\varphi(A)$ skup mjere nula.*

U primjerima koji slijede iliustrovaćemo mogućnosti primjene gornjih formula.

Primjer 1. (Polarne koordinate.) Svakom paru (φ, ρ) pridružujemo par $g(\rho, \varphi) = (x, y)$, pri čemu je $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Gornje formule se mogu posmatrati kao veza između Dekartovih koordinata x i y i takozvanih polarnih koordinata ρ i φ, gdje se položaj tačke određuje na taj način što se fiksira jedna tačka (pol) i jedna orjentisana poluprava (polarna osa) pa se sa ρ označi rastojanje tačke do pola a sa φ ugao između vektora položaja te tačke i polarne ose. Ako se pol poklopi sa koordinatnim početkom a polarna osa sa x-osom onda su Dekartove i polarne koordinate vezane gornjim formulama. Možemo, međutim, reći da je gornjim formulama definisano preslikavanje polutrake $\{(\rho, \varphi) : \rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ na ravan $\{(x, y) : x \in R, y \in R\}$. Preslikavanje g je bijektivno, ako se izuzme odsječak $\rho = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ koji se inače slika u tačku $(0, 0)$. A oba ova skupa su sa stanovišta integracije zanemarljiva-to su skupovi mjere nula. Možemo posmatrati i inverzno preslikavanje g^{-1} koje skup $\{(x, y) : (x, y) \in R^2\} \backslash \{(0, 0)\}$ slika u $\{(\rho, \varphi) : \rho > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Pri tome je Jakobijeva matrica preslikavanja $(\rho, \varphi) \to g(\rho, \varphi) = (x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi)$ jednaka

$$\left(\begin{array}{cc} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{array} \right),$$

dok je Jakobijeva determinanta $det\,g'(\rho, \varphi) = \rho \neq 0$ kad god je $\rho \neq 0$. Uzimajući u obzir da su uslovi osnovne teoreme o zamjeni promjenljivih narušeni samo na skupu mjere nula, možemo zaključiti da ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna na kružnom isječku kruga $K = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ onda je funkcija $F(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho$ integrabilna na pravougaoniku $P = \{(\rho,\varphi) : \rho \geq 0, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ i važi sledeća formula

$$\int\int_I f(x,y)dxdy = \int\int_P f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_0^r (\rho \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi)d\rho.$$

U gornjoj formuli je pretpostavka o tome da je I kružni isječak, bila važna samo u tom smislu da se na desnoj strani dobije integracija po pravougaoniku. Formula

$$\int\int_{g(A)} f(x,y)dxdy = \int\int_A f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

ima opštiji značaj-ona važi kad god je A dopustiv skup.

Primjer 2. (Cilindričke koordinate.) Položaj tačke u prostoru se takođe može određivati pomoću Dekartovih koordinata x, y, z, ali je to moguće raditi i u cilindričkom sistemu koordinata (ρ, φ, z), gdje treća koordinata (z-koordinata) ima isto značenje kao u Dekartovom sistemu, dok su prve dvije polarne koordinate pomoću kojih se određuje položaj projekcije tačke na horizontalnu (ρ, φ) ravan. Otuda veze $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$. Možemo, međutim, gornje relacije posmatrati kao formule pomoću kojih se određuje preslikavanje $(\rho, \varphi, z) \to g(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$ definisano na skupu $D = \{(\rho, \varphi, z) : \rho > 0, 0 < \varphi < 2\pi, z \in R\}$. Slika $g(D)$ je skup $R^3 \backslash \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$. Pri tome je Jakobijeva matrica preslikavanja g jednaka

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 01 & \end{pmatrix},$$

a njena determinanta $det\, g'(\rho, \varphi, z)$ jednaka je ρ i $g : D \to \psi(D)$ je difeomorfizam. Ako je A dopustv skup u prostoru promjenljivih (ρ, φ, z) onda je $\psi(A)$ dopustiv skup u prostoru promjenljivih (x, y, z) i važi formula

$$\int\int\int_{g(A)} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_A f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Naime, uslovi iz osnovne teoreme o zamjeni promjenljivih mogu biti narušeni samo na skupu koji je zanemarljiv. Specijalno, ako je funkcija f integrabilna na cilindru $C = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq r^2, a \leq z \leq b\}$ onda je funkcija $g(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$ integrabilna na skupu $K = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq z \leq b\}$ i važi jednakost

$$\int\int\int_C f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b (\int_0^r (\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)d\varphi)\rho d\rho)dz.$$

Primjer 3. (Sferne koordinate.) Položaj tačke u prostoru se opisuje tako što se fiksira jedna tačka (pol koji se označava sa O), orjentisana ravan koja sadrži pol (ekvatorijalna ravan koju ćemo označavati sa Π) i osa koja prolazi kroz pol i koja je normalna na ekvatorijalnu ravan (zenitna osa koja se označava sa Oz). U ravni Π bira se osa koja prolazi kroz pol (polarna osa koju označavamo sa Ox). Sve to zajedno čini sferni sistem koordinata (ili polarni sistem koordinata u prostoru). Položaj tačke M u prostoru se određuje pomoću rastojanja ρ te tačke do pola, $(0 \leq \rho)$, uglom φ od polarne ose Ox do poluprave OM', gdje je M' ortogonalna projekcija tačke M na polarnu ravan $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ i uglom θ od zenitne ose do poluprave OM $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Veza između Dekartovih i sfernih koordinata uspostavlja se formulama $x = \rho\cos\varphi\sin\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\theta$. Iste formule definišu preslikavanje $g : g(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$. Pri tome Jakobijeva matrica

$$g'(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix},$$

a determinanta ove matrice je $det\, g'(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\sin\theta$. Ako je $D' = \{(\rho,\varphi,\theta) : 0 < \rho, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$ i $D = \{(x,y,z) \in R^3\}\backslash\{(x,0,z) \in R^3 : x \geq 0\}$, onda je $g : D' \to D$ difeomorfizam. Ako je A proizvoljan dopustiv skup onda je i skup $g(A)$ dopustiv, uslovi iz teoreme o zamjeni promjenljivih su narušeni najviše na skupu koji je zanemarljiv, pa važi formula

$$\int\int\int_{g(A)} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_A f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Specijalno, zapremina V lopte $K = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$ se može izračunati na sledeći način:

$$V = \int\int\int_K dxdydz = \int\int\int_{K'} \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^r (\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^2\sin\theta d\theta)d\varphi)d\rho = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Primjer 4. (Sferne koordinate u R^n). U prostoru R^n zamjena promjenljivih se može vršiti pomoću takozvanih sfernih koordinata u R^n. Tada je $g(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ pri čermu je

$$x^1 = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1},$$

$$x^2 = \rho\cos\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{n-1} = \rho\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}$$

$$x^n = \rho\cos\theta_{n-1}.$$

Dobija se da je $det\, g'(\rho,\theta_1,\ldots\theta_{n-1}) = \rho^{n-1}\sin\theta_2\sin^2\theta_3\cdots\sin^{n-2}\theta_{n-1}$. Pokačimo kako se primjenom gornjih formula računa zapremina $V(K_n)$ kugle K_n poluprečnika r u R^n. U sfernim kordinatama kugla K_n se opisuje sa $K_n = \{(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta_1 2\pi, 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \ldots, 0 \leq \theta_{n-1} \leq \pi\}$. Na osnovu teoreme o zamjeni promjenljivih i formule za Jakobijevu determinantu imamo

$$V(K_n) = \int_0^{\rho} \rho^{n-1}d\rho \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta_{n-1} =$$

$$\frac{2\pi r^n}{n}\int_0^\pi \sin\theta_2 d\theta_2\cdots\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta_{n-1}.$$

Izvedimo formule za integrale $I_k=\int_0^\pi \sin^k\varphi d\varphi, k=1,\ldots,n-1$. Imamo da je $I_1=2, I_2=\frac{\pi}{2}$. Dalje je

$$I_k=\int_0^\pi \sin^k\varphi d\varphi=-\int_0^\pi \sin^{k-1}\varphi d(\cos\varphi)=(k-1)\int_0^\pi \sin^{k-2}\varphi\cos^2\varphi d\varphi=(k-1)I_{k-2}-(k-1)I_k.$$

Odavde slijedi da je $I_k=I_{k-2}\frac{k-1)}{k}$, odnosno

$$I_{2m}=\pi\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, I_{2m+1}=2\frac{(2m)!!}{(2m+1)!.}$$

To znači da je

$$V(K_{2m})=2\pi r^{2m}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!};\ V(K_{2m+1})=4\pi r\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Gornje formule, koristeći Γ-funkciju, možemo zapisati u obliku

$$V(K_n)=(\frac{\sqrt{\pi}}{2})^{n-2}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Specijalno, za $n=2$ i $n=3$ dobijamo dobro poznate formule $V(K_2)=\pi r^2$ i $V(K_3)=\frac{4\pi r^3}{3}$.

Primjer 5. Neka je $D'=[0,1]\times[-2\pi,2\pi], D=\varphi(D')$, gdje je $\varphi(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. Tada je $D=\{(u,v)\in R^2: 1\le u^2+v^2\le e^2\}$. Pri tome je $det\,\psi'(x,y)=e^{2x}\neq 0$. Posmatrajmo funkciju $f(u,v)=1$. Ona je na skupu D integrabilna i $\int\int_D f(u,v)dudv=\pi(e^2-1)$. Dalje, primjenjujući Fubinijevu teoremu imamo da je $\int\int_{D'} f(e^x\cos y, e^x\sin y)\psi'(x,y)dxdy==\int\int_{D'} e^{2x}dxdy=4\pi\int_0^1 e^{2x}dx=2\pi(e^2-1)$.

Dobili smo rezultate koji nijesu u skladu sa formulom za zamjenu promjenljivih. Koji od uslova odgovarajuće teoreme nije ispunjen?

Zadatak. Dokazati jednakost (Dirihleova formula):

$$\int_{x^n=0}^{x}\cdots\int_{x^2=0}^{x^3}\int_{x^1=0}^{x^2} f(x^1)dx^1dx^2\cdots dx^n=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-z)^{n-1}f(z)dz.$$

Primjer 4. Izračunaćemo površinu S elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. U tom cilju izračunaćemo površinu onog dijela elipse koji se nalzi u prvom kvadrantu. Odgavoarajući integral je

$$I=\int\int\frac{x^2}{a[2}+\frac{y^2}{b^2|\le 1, x,y\ge 0}dxdy.$$

Uvedimo smjenu (uopštene polarne koordinate) $x=a\rho\cos\varphi, y=b\rho\sin\varphi, 0\le\rho\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Jakobijan je jednak $J=ab\rho$, pa je

$$I=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 ab\rho d\rho=ab\frac{\pi}{2}\frac{1}{2},$$

pa je $S = 4I = ab\pi$.

Primjer 5. Izračunaćemo integral $I = \int\int_D xydxdy$, gdje je D oblast ogrnaičena krivim: $y^2 = x, y^2 = 2x, y\frac{1}{x}, y = \frac{2}{x}$. Uvedimo nove promjenljive u, v: $u = \frac{y^2}{x}, v = xy$. Tada se ograničenja transformišu u $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$. Pri tome je $x = u^{1/3}v^{2/3}, y = u^{1/3}v^{1/3}$. Jakobijan ovog preslikavanja

$$J = |\frac{D(x,u)}{D(u,v)}| = |\frac{\partial x}{\partial u \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{1}{3u}.$$

pa je

$$I = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{v}{3u} dv = \frac{1}{6} \ln 2(4-1) = \frac{1}{2}$$

§7 Primjena integrala

O mogućnostima primjene govorili smo već kod definicije integrala. Opšta primedba je da je kod primjene integrala važno ustvari kako se definiše neka veližina. Kada kažemo da se integral može primijeniti za izračunavanje zapremine ili mase tijela mi zapravo posredstvom integrala i definišemo ove veližine. S druge strane, nije teško uočiti praktično istu shemu primjene integrala za izražavanje različitih veličina. Ovdje ćemo tu zajednižku shemu precizno istaći. Pretpostavićemo da je D oblast u R^n (za nas su važni jedino slučajevi $n = 1, n = 2$ i $n = 3$) i posmatraćemo familiju $\mathcal{D}$ dopustivih podskupova skupa D. Neka je $F : \mathcal{D} \to R$ funkcija definisana na familiji $\mathcal{D}$ čija svojstva ćemo kasnije istaći. Naglasimo da su argumenti funkcije F podskupovi skupa D. Prvo svojstvo koje tražimo da bude ispunjeno je svojstvo aditivnosti. Ranije je dokazano da ako su A i B elementi familije $\mathcal{D}$ onda je $A \bigcup B$ iz iste familije. Zahtjev aditivnosti se sastoji u tome da ako je skup $A \cap B$ mjere nula onda je $F(A \bigcup B) = F(A) + F(B)$. Primijetimo da odavde slijedi da je, u opštem slučaju, $F(A \bigcup B) = F(A) + F(B) - F(A \cap B)$. Drugo svojstvo ćemo nazvati svojstvom diferencijabilnosti peslikavanja F po mjeri. Naime, za svaku tačku x oblasti D posmatraćemo zatvorene oblasti $\Pi(x)$ koje leže u D i sadrže tačku x. Reći ćemo da funkcija F ima izvod po mjeri (izvod po površini ako je $n = 2$ odnosno izvod po zapremini ako je $n = 3$) ili da ima gustinu $f(x)$ u tački x ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da kad god je $diam\,\Pi < \delta$ onda je $|\frac{F(\Pi(x))}{\mu(\Pi(x))} - f(x)| < \epsilon$. Pretpostavićemo dakle da je funkcija F takva da u svakoj tački x iz oblasti D postoji njen izvod po mjeri (odnosno njena gustina) $f(x)$. Pisaćemo tada $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial \mu}$ i specijalno $f(x) = \frac{\partial F(x)}{partiall}$ ako je D interval u R, $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial S}$ ako je $D \subseteq R^2$ i $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial V}$ ako je $D \subseteq R^3$.

Pitanje koje postavljmo je: da li postoje aditivne funkcije žija je gustina zadata funkcija i ako postoje kako ih naći? Razmotrimo jedan primjer.

Neka je funkcija f neprekidna u D i neka je za $A \in \mathcal{D}$ $G(A) = \int_A f$. Fiksirajmo tačku $x \in D$ i posmatrajmo proizvoljnu oblast $O(x)$ koja sadržitačku x. Tada je $\int_{O(x)} f = \mu(O(x))f(\xi), \xi \in O(x)$. Ako $diam(O(x)) \to 0$ onda tačka $\xi \to x$ i, zbog neprekidnosti funkcije f u tački x, količnik $\frac{G(O(x))}{\mu(O(x))} = \frac{\int_{O(x)}}{\mu(O(x))}$ konvergira ka $f(x)$. Dalje, ako su $A \subseteq D$ i $B \subseteq D$ dopustivi skupovi takvi da je njihov presjek skup mjere nula onda je, kako je ranije dokazano $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$, odnosno, $G(A \bigcup B) = G(A) + G(B)$. Sve u svemu, funkcija $\mathcal{D} \ni A \to \int_A f$ je aditivna i ima izvod po mjeri, odnosno ima gustinu. Neka je sada F takođe aditivna funkcija skupa čiji je izvod po mjeri jednak istoj funkciji f definisanoj na skupu D. Njihova razlika $\Phi = F - G$ je funkcija oblasti koja ima svojstvo da je $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$ i koja je takođe aditivna. Dokažimo da je $\Phi = 0$. Očigledno je da ako je $\mu(A) = 0$ onda je $i\Phi(A) = F(A) = 0$. Neka je, naprimjer, $\Phi(A) < 0$, pri čemu je A dopustiv i zatvoren skup. Tada je Žordanova mjera $\mu(A)$ skupa A pozitivna i $\frac{\Phi(A)}{\mu(A)} \leq \alpha < 0$, odnosno $\Phi(A) \leq \alpha\mu(A)$. Neka je I interval koji sadrži skup A. Podijelimo interval I na (zatvorene) intervale $I_1, \ldots, I_k$ tako da je $diam\, I_i \leq \frac{diam\, I}{2}$. Neka je $A_i = A \cap I, i = 1, \ldots, k$. Za bar jedan od tih skupova (označimo ga sa $A_{(1)}$) važi: $\Phi(A_{(1)} \leq \alpha\mu(A_{(1)})$. (U protivnom bismo imali da je za svako i $\Phi(I_i) > \alpha\mu(I_i)$, pa bismo, sabirajući ove relacije dobili da je $\Phi(A) > \alpha\mu(A)$, što je suprotno petpostavci.) Sa odgovarajućim I_1 postupimo na isti način. Dobićemo interval $I_{(1)}$ čiji je dijametar $diam\, I_{(2)} < \frac{diam\, I_{(1)}}{2}$ i skup $A_{(2)} = A \cap I_{(2)}$ za koji je $\Phi(A_{(2)}) \leq \alpha \cdot \mu(A_{(2)})$. Produžavajući ovaj postupak dobijamo niz zatvorenih ograničenih skupova $(A_{(l)})$ čiji dijametri teže ka nuli a od kojih svaki leži u prethodnom. Prema Kantorovoj teoremi svi ovi skupovi imaju zajedničku tačku x_0. Prema pretpostavci, postoji $\lim \frac{\phi(A_k)}{\mu(A_k)} = f(x_0) = 0$, a na osnovu konstrukcije imamo da je $\lim \frac{\Phi(A_k)}{\mu(A_k)} \leq \alpha < 0$. Kontradikcija. Na sličan način negira se mogućnost $\Phi(A) > 0$. Slijedi da je $\Phi(A) = 0$. Ako je skup A dopustiv ali nije zatvoren onda možemo posmatrati skup $B = A \cup \partial A$ koji je zatvoren i takođe dopustiv. Za ovaj skup važi: $0 = \Phi(B) = \Phi(A) + \Phi(\partial A) = \Phi(A)$. Dakle, za svaki dopustivi skup $A \in \mathcal{D}, \Phi(A) = 0$, odakle slijedi da je $F(A) = G(A) = \int_A f$.

To je formula koju smo htjeli da dokažemo i to je formula na koju ćemo se oslanjati kada budemo govorili o nekim mogućnostima primjene integrala.

§Primjeri primjene integrala.

Primjer 1. Definicija površine $S(A)$ (dvodimenzione Žordanove mjere) dopustivog skupa A u R^2 se, kako smo već ranije vidjeli, poklapa sa definicijom integrala funkcije $f(x,y) = 1, (x,y) \in R^2 : S(A) = \int\int_A dxdy$. U tom smislu se može govoriti da se dvodimenzioni integral može koristiti za izražunavanje površine skupa. Na sasvim isti način se trostruki integral može koristiti za izražunavnje zapremine (trodimenzione Žordanove mjere) skupa $A: \; V(A) = \int\int\int_A dxdydz$. Kao posledicu ovih formula, koristeći definiciju integrala na skupu, možemo izvesti i formule koje su nam i inače od ranije poznate. Neka je $f : [a,b] \to R$ nenegativna neprekidna funkcija i neka je $A = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Površina $P(A)$ skupa A se može računati po formuli $P(A) = \int_a^b (\int_0^{f(x)} dy)dx = \int_a^b f(x)dx$. Slično, ako je $A = \{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y\}$ gdje je D dopustiva oblast u R^2 a $f : D \to R$ nenegativna i neprekidna funkcija, onda se zapremina $V(A)$ skupa A može izražunati korišćenjem formule za svođenje integrala $\int\int\int_A dxdydz$ na uzastopne integrale: $V(A) = \int\int_D (\int_0^{f(x,y)} dz)dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy$.

Primjer 2. Vratimo se još jednom zadatku izračunavanja površine skupa $A = \{(x,y) \in R^3 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Ako sa $S([\alpha,\beta])$ označimo onaj dio površi koji leži iznad odsječka $[\alpha,\beta]$ onda nije teško vidjeti da ako odsježi $[\alpha,\beta]$ i $[\alpha,\beta]$ nemaju zajedničkih unutrašnjih tažaka onda je $S([\alpha,\beta] \cup [\alpha_1,\beta_1]) = S([\alpha,\beta]) + S([\alpha_1,\beta_1])$. Funkcija S je, dakle, aditivna. S druge strane, imamo da je $\min f(t) \cdot (\beta - \alpha) \leq S([\alpha,\beta]) \leq \max f(t) \cdot (\beta - \alpha)$. Slijedi da je $\frac{S([\alpha,\beta])}{\beta - \alpha} \to f(x)$ ako $\beta - \alpha \to 0$ a odsječak $[\alpha,\beta]$ sadrži tačku x. Tako dobijamo da je $S([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$. Opet na sličan način možemo doći do formula za zapreminu skupa $A = \{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$, gdje je funkcija f nenegativna ograničena i neprekidna na D. Ako je $M = (x,y)$ tačka iz skupa D, onda je za svaki zatvorenu dopustivu oblast E koji leži u D, $\min f(x,y) \cdot \mu(E) \leq V(E) \leq \max f(x,y) \cdot \mu(E)$. (Ovdje je sa $V(E)$ označena zapremina onog dijela skupa A koji leži iznad E a minimum i maksimum funkcije f se takođe računaju na skupu E). Iz ove relacije, zbog pretpostavljene neprekidnosti funkcije f, slijedi da je $\frac{V(E)}{\mu(E)} \to f(x,y)$ kada $diam\, E \to 0, E \ni (x,y)$. Aditivnost funkcije F dokazujemo na sledeći način. Neka su A i B podskupovi skupa D koji pripadaju familiji $\mathcal{D}$. Tada je očigledno, $V(AUB) = V(A) + V(B) - V(AnB)$. Skup $C = A \cap B$ je dopustiv a ako pretpostavimo da je njegova mjera $\mu(C)$ jednaka nuli, onda se on može pokriti sistemom intervala $J_1, \ldots, J_k$ čiji je zbir površina manji ili jednak od $\frac{\epsilon}{K}$, gdje je K broj koji zadovoljava uslov: $\forall (x,y) \in D f(x,y) \leq K$. Tada imamo da je $V(J_i) \leq K \cdot \mu(J_i)$. Odavde slijedi da je $V(C) \leq \sum V(J_j) \leq \sum K\mu(J_j) \leq \frac{K\epsilon}{K} = \epsilon$. To zapravo znači da je $V(C) = 0$. Time je dokazano da je funkcija V aditivna. Ukupno, imamo da je $V(A) = \int_A f(x,y)dxdy$, što smo i htjeli da dokažemo.

Primjer 3. Ponovo razmotrimo zadatak izražunavanja mase tijela. Neka je, dakle, $D \subseteq R^3$ oblast po kojoj je raspoređena masa. Ako svakom dijelu $A \subseteq D$ pridružimo $m(A)$-masu tog dijela onda je očigledno funkcija m aditivna funkcija oblasti. Dalje, granična vrijednost količnika $\frac{m(A)}{\mu(A)}$ kada $diam\, A \to 0, A \ni N$, je, prema definiciji, jednaka je gustini mase u tački M. Ako gustinu mase u tački M označimo sa $\rho(M)$ i ako pretpostavimo da je funkcija ρ neprekidna, onda je $m(A) = \int\int\int_A \rho(x,y,z)dxdydz$ i, specijalno, $m(D) = \int\int\int_D \rho(x,y,z)dxdydz$. Ako je $D \subseteq R^3$ oblast u ravni po kojoj je raspoređena masa čija je (površinska) gustina u tački M (koja se definiše kao granižna vrijednost količnika $\frac{m(A)}{\mu(A)}$ kada $diam\, A \to 0, \mu(A) > 0, M \in A$) jednaka $\rho(M)$, gdje je ρ neprekidna funkcija definisana na D, onda je $m(D) = \int\int_D \rho(x,y)dxdy$.

Primjer 4. U mehanici se statički momenti mase m koja je koncentrisana u tački sa koordinatama (x_m, y_m) u odnosu na x i y-osu računaju po formulam $M_x = m\cdot y, M_y = m\cdot x$. Ako su u ravni raspoređene mase $m_1, \ldots, m_k$ redom u tačkama $M_1(x_1,y_1), \ldots, M_k(x_k,y_k)$ onda se statististički momenti ovog sistema u odnosu na koordinatne ose, kao što je poznato iz kursa fizike, računaju po formulama $M_x = m_1y_1 + \cdots + m_ky_k$, $M_y = m_1x_1 + \cdots + m_kx_k$. Odavde slijedi da se koordinate (x_c, y_c) centra mase (težište) cijelog sistema računaju po formulama

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^k x_im_i}{\sum_{i=1}^k m_i}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^k y_im_i}{\sum_{i=1}^k m_i}.$$

Naš cilj je da odredimo statičke momente i koordinate centra mase raspoređene po zatvorenoj oblasti $D \subseteq R^2$. Za određivanje momenta M_x uočimo zatvorenu oblast $A \subseteq D$. Primijetimo da za moment $M_x(A)$ važe ocjene: $\min y \cdot \min \rho(x,y) \cdot P(A) \leq M_x(A) \leq \max y \cdot \max \rho(x,y) \cdot P(A)$, pri čemu se minimum i maksimum računaju na skupu A. Odavde slijedi da je $\lim \frac{M_x(A)}{P(A)} = y \cdot \rho(x,y)$ i da je $M_x = M_x(D) = \int\int_D y\rho(x,y)dxdy$. Na sasvim sli can način dobijamo da je $M_y = M_y(D) = \int\int_D x\rho(x,y)dxdy$. Koordinate x_c, y_c centra teže dobijamo iz uslova $M_x = m \cdot y_c$, $M_y = m \cdot x_c : x_c = \frac{\int\int_D x\rho(x,y)dxdy}{m} y_c = \frac{\int\int_D y\rho(x,y)dxdy}{m}$, gdje je $m = \int\int_D \rho(x,y,z)dxdydz$. Na sličan način izvode se formule za koordinate centra mase tijela, pod pretpostavkom da je gustina mase $\rho(x,y,z)$ neprekidna na D

$$x_c = \frac{\int\int\int_D x\rho(x,y,z)dxdydz}{m},\ y_c = \frac{\int\int\int_D y\rho(x,y,z)dxdydz}{m},\ z_c = \frac{\int\int\int_D z\rho(x,y,z)dxdydz}{m}.$$

U oba služaja, postavljajući $\rho = 1$, dobijamo formule za geometrijsko težište figure u R^2 odnosno tijela u R^3.

Primjer 5. U fizici se moment inercije materijalne tačke mase m u odnosu na osu s koja je na rastojanju d od mase računa po formuli $I_s = md^2$. Na isti način se računa moment inercije u oodnosu na taccku $O : I_O = md^2$. U mnogom ponavljajući postupak iz prethodnog primjera možemo izvesti formule za moment inercije mase raspoređene po zatvorenoj oblasti $D \subseteq R^3$, pretpostavljajući da je gustina mase $\rho(x,y,z)$ neprekidna :

$$I_x = \int\int\int_D (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,\ I_y = \int\int\int_D (z^2+x^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_z = \int\int\int_D (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Slične formule se mogu ispisati i ako se pitanje postavi za momente inercije mase raspoređene po oblasti $D \subseteq R^3$.

Primjer 6. Poznato je da se u fizici gravitaciona sila $\vec{G}$ materijalne tačke A mase m računa po formuli $\vec{G} = \frac{\gamma m \vec{r}}{r^3}$, gdje je $\vec{r} = \vec{AM}$. Opet ponavljajući postupak koji smo demonstrirali u prethodnim primjerima možemo izvesti formule za gravitacionu silu $\vec{G}(M)$ tački M (žiji je vektor položaja $\vec{r}$) mase raspoređene po zatvorenoj oblasti $D \subseteq R^3$, pretpostavljajući da je gustina mase $\rho(x,y,z)$ neprekidna:

$$\vec{G}(M) = \int\int\int_D \gamma\rho(x,y,z)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dxdydz,$$

odnosno komponente G_x, G_y, G_z vektora gravitacione sile $\vec{G}(M)$ se računaju po formulama

$$G_x = \int\int\int_D \gamma\rho(x,y,z)\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}dxdydz,$$

$$G_y = \int\int\int_D \gamma\rho(x,y,z)\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}dxdydz,$$

$$G_z = \int\int\int_D \gamma\rho(x,y,z)\frac{z-z_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}dxdydz.$$

Primjer 7. Odredićemo koordinte (x_c, y_c) težišta polukruga $K : x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0$. Možemo smatrati da je to homogena površ gustine $\rho(x,y) = 1$. Tada je masa brojno jednak površini $S = \frac{a^2\pi}{2}$. Očigledno je $x_c = 0$, što se potvrdjuje jednostavnim računom

$$x_c = \frac{2}{a^2\pi}\int\int_K xdxdy = \frac{2}{a^2\pi}\int_o^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} xdx = 0.$$

Dalje je

$$y_c = \frac{2}{a^2\pi}\int\int_K ydxdy = \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{as^2-x^2}ydy=\frac{2}{a^2\pi}\int_{-a}^a \frac{1}{2}\int_{-a}^a (a^2-x^2)dx = \frac{4a}{[}3\pi}.$$

§8 Kriva i površ. Novi primjeri primjene integrala

A) Kriva.

U primjerima koji slijede govori se o primjeni integrala u zadacima koji su vezani za krive i površi. Pošto će nam i u sledećoj glavi biti važno da u vezi sa ovim pojmovima imamo sasvim čistu i jasnu situaciju, to ćemo ovdje detaljnije raspraviti ove pojmove.

Definicija 1. Preslikavanje $\varphi : [a,b] \to R^n$ koje je naprekidno nazivamo *parametrizovanom krivom u* R^n.

Definicija 2. *Ako je* $\varphi : [a,b] \to R^n$ *parametrizovana kriva onda za skup* $\varphi([a,b]) = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\}$ *kažemo da je kriva ili da je nosač parametrizovane krive, a tačke* $\varphi(a)$

i $\varphi(b)$ početak odnosno kraj te krive. Ako je $\varphi(a) = \varphi(b)$ onda za krivu kažemo da je zatvorena.

Ubudu' ce ćemo ćemo umjesto parametrizovana kriva govoriti prosto kriva, a iz konteksta će biti jasno da li se radi o pramaetriovanoj krivoj ili o njenom nosaču.

Definicija 3. *Za krivu $\varphi : [a, b] \to R^n$ koji nije zatvorena kažemo da je prosta ako je preslikavanje $\varphi : [a, b] \to R^n$ injektivno, tj. ako je $(\forall t_1, t_2 \in [a, b](t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow (\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2))$.*

Definicija 4. *Za zatvorenu krivu $\varphi : [a, b] \to R^n$ kažemo da je prosta zatvorena kriva ako je preslikavanje φ injektivno na $[a, b)$ tj. ako $(\forall t_1, t_2 \in [a, b)(t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow (\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2))$.*

Sledeći primjer pokazuje da različiti parametrizovane krive mogu imati iste nosače.

Primjer 1. Parametrizovane krive $\varphi(t) = (t, \sqrt{1-t^2}, 0), t \in [-1, 1], \psi(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, \pi]$ i $\eta(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0), t \in [0, \frac{1}{2}]$ imaju isti nosač-to je polukružnica polupreč-nika 1 sa centrom u koordinatnom početku $O(0, 0, 0)$ koji leži u gornjoj poluravni ravni Oxy. Početak parametrizovane krive $\varphi : [-1, 1] \to R^2$ je tačka $A = (-1, 0, 0)$ a kraj tačka $B = (1, 0, 0)$, dok je tačka B početak a tačka A kraj krivih $\psi.[0, \pi] \to R^2$ i $\eta : [0, 2\pi| \to R^2$.

Definicija 5. *Kriva $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$ je glatka (regularna) ako su funkcije $x(t), y(t), z(t)$ diferencijabilne, njihovi izvodi neprekidni na (a, b) a za za svako $t \in [a, b]\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ za svako $t \in (a, b)$.*

U vezi sa krivom $\varphi : [a, b] \to R^3, \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ posmatraćemo i preslikavanje $\vec{\varphi}$ koje svakoj tački $t \in [a, b]$ pridružuje vektor $\vec{\varphi}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$. Pretpostavljajući da je kriva φ glatka, tj. da postoje $x'(t), y'(t), z'(t)$, sa $\vec{\varphi}'(t)$ označavaćemo vektor $x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$. Ako je $M_0 = \varphi(t_0)$ tačka koja pripada krivoj $\gamma = \varphi([a, b])$, onda vektor

$$\frac{\vec{\varphi}(t_0 + h) - \vec{\varphi}(t_0)}{h} = \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}\vec{i} + \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}\vec{j} + \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h}\vec{k}$$

možemo interpretirati kao vektor srednje brzine na intervalu $[t_0, t_0 + h]$. Tada je

$$\vec{\varphi}'(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\varphi}(t_0 + h) - \vec{\varphi}(t_0)}{h} = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$$

vektor brzine u trenutku t_0. Možemo dati i geometrijsku interpretaciju vektora $\frac{\vec{\varphi}(t_0+h)-\vec{\varphi}(t_0)}{h}$ kao vektora koji je kolinearan sa vektorom čija je početna tačka $M_0 = \varphi(t_0)$ a krajnja tačka $M = \varphi(t_0 + h)$. I tačka M_0 i tačka M pripadaju krivoj γ. Granični položaj vektora $\vec{M_0M}$ kada $h \to 0$ (a to je vektor $\vec{\varphi}'(t_0)$) je položaj vektora-tangente na krivu γ u tački $M_0 = \varphi(t_0)$. Vektor $\frac{\vec{T}(M_0) = \vec{\varphi}'(t_0)}{|\vec{\varphi}'(t_0)|}$ je jedinični vektor tangente krive $\gamma = \varphi([a, b])$ u tački $M = \varphi(t_0)$.

Primijetimo da ako je $\varphi : [a, b] \to R^3$ parametrizovana kriv, tada su poznate početna i krajnja tačka krive $\gamma = \varphi([a, b])$, i više od toga, tada je određen i redosled (ili poredak) svih ostalih tačaka na krivoj γ: ako su A i B tačke sa krive $\gamma = \varphi([a, b])$ i ako je $t_1 == \varphi^{-1}(A) < t_2 = \varphi^{-1}(B)$, onda ćemo reći da je tačka A ispred tačke B. Kažemo da prametrizacija krive put određuje orjentaciju krive.

O orjentaciji glatke krive γ možemo govoriti i na drugi način. U svakoj tački M te krive možemo postaviti tangentu-pravu koja prolazi kroz M i čiji je vektor pravca vektor tangente $\vec{T}(M)$. Tu pravu, kao i svaku drugu, možemo orjentisati. U principu mi možemo sasvim slobodno birati orijentaciju tangente u svakoj tački krive. Interesantni su međutim samo takozvani neprekidni izbori orijentacija tangenti, tj. one orijentacije koje se dobijaju prenošenjem orijentacije (poretka) sa skupa R pomoću glatkih parametrizacija. Naime, za krivu γ postoji glatka parametrizacija, $\varphi : [a,b] \to R^3$ čiji je nosač γ. Vektor $\vec{T}(\varphi(t)) = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|}$ definiše i orjentaciju tangente u tački $\varphi(t)$. Prema pretpostavci funkcija $\vec{T}$ je neprekidna (kao funkcija promjenljive $t \in [a,b]$) i zadavanjem neprekidnog polja tangenti $\vec{T}$ definisanog u tačkama krive γ mi zapravo zadajemo orjentaciju krive γ. Dakle, za svaku glatku parametrizaciju krive γ prirodno se veže neprekidna orijentacija te krive.

Ako se promijeni parametrizacija krive γ, odnosno ako je kriva γ i $\psi : [c,d] \to R^3$ parametrizacija krive γ, onda funkcija $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ definisana formulom $\alpha(\tau) = \varphi^{-1}(\psi(\tau))$ (vidi sliku) uspostavlja vezu između ove dvije parametrizacije. Kažemo da je α funkcija prelaza sa parametrizacije φ na parametrizaciju $\psi = \varphi \circ \alpha$ odnosno da je α funkcija zamjene parametra. Primijetimo odmah da kad god je zadana glatka parametrizacija $\varphi : [a,b] \to R^3$ krive γ, onda izborom funkcije-bijekcije $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ koja je diferencijabilna na (c,d), čiji je izvod neprekidan na (c,d) i za koju je $\alpha'(t) \neq 0$ za svako $t \in [c,d]$, možemo definisati novu glatku parametrizaciju $\psi : [c,d] \to R^3$ čiji se nosač poklapa sa nosačem puta φ : dovoljno je postaviti $\psi(\tau) = \varphi(\alpha(\tau))$, odnosno $\psi = \varphi \circ \alpha$. Za parametrizaciju ψ kažemo da je nastala iz parametrizacije φ zamjenom parametra posredstvom funkcije α. Kako god da smo došli do veze $\psi = \varphi \circ \alpha$, imamo da je $\psi'(\tau) = \varphi'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau)$. Ako smo imali dvije različite glatke parametrizacije čiji je zajednički nosač kriva γ, onda ćemo imati da je funkcija α' neprekidna na (c,d) i $\alpha'(\tau) \neq 0$ za svako $\tau \in (c,d)$.. Jedinični vektor tangente u tački $M = \psi(\tau) = \varphi(t)$, gdje je $t = \alpha(\tau)$, jednak je

$$\vec{T}_\psi(M) = \frac{\vec{\psi}'(\tau)}{\vec{\psi}'(\tau)} = \frac{\vec{\varphi}'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau))}{|\vec{\varphi}'(\alpha(\tau))||\alpha'(\tau))} = \frac{\vec{T}_\varphi(M)\alpha'(\tau)}{= \alpha'(\tau)}.$$

Primijetimo da je, zbog neprekidnosti funkcije α' i pretpostavke da je $\alpha' \neq 0$, α' stalnog znaka na (c,d). Zato, ako $sgn\, \alpha'(\tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{|\alpha'(\tau)|}$ označimo sa $\epsilon(\tau)$ imamo da je $\epsilon(\tau) = 1$ za svako $\tau \in [c,d]$ ili $\epsilon(\tau) = -1$ za svako $\tau \in [c,d]$. U prvom slučaju je $\vec{T}_\psi(M) = \vec{T}_\varphi(M)$ a u drugom $\vec{T}_\psi(M) = -\vec{T}_\varphi(M)$. U prvom slučaju jedinični tangentni vektori odredjeni parametrizacijama φ i ψ se poklapaju i te parametrizacije zadaju istu orijentaciju dok su u drugom slučaju suprotne i zadaju različite orijentacije.

Skup svih glatkih parametrizacija krive γ možemo podijeliti u dvije klase na sledeći način: parametrizacije φ_1 $ivarphi_2$ pripadaju istoj klasi ako se prelaz sa jedne na drugu parametrizaciju vrši posredstvom funkcije α čiji je izvod α' pozitivan a različitim klasama ako je izvod funkcije prelaza negativan. Svaka od ove dvije klase parametrizacija zadaje jednu orijentaciju krive γ. Za dvije parametrizacije iz iste klase kažemo da su ekvivalentne. Nije teško utvrditi da je ekvivalentnost parametrizacija relacija ekvivalencije. Istaknimo još jednom da glatka kriva ima samo dvije orijentacije. Jednu od njih, ako to želimo, možemo zvati pozitivnom a drugu negativnom. Orjentacija krive se može zadati tako što se ona opiše geometrijski. Tada je potrebno naći parametrizaciju krive koja definiše istu orjentaciju, odnosno koja je saglasna sa orjentacijom.

Definicija 6.*Parametrizovana kriva* $\varphi : [a,b] \to R^n$ *je dio po dio glatka ako se odsječak* $[a,b]$ *može podijeliti na konačno mnogo odsječaka* $[a_0,a_1],[a_1,a_2],\ldots,[a_{k-1},a_k], a_0 =$

$a, a_k = b$, *tako da je restrikcija* $\varphi_i : [a_{i-1}, a_i] \to R^n, \varphi_i(t) = \varphi(t), t \in [a_{i-1}, a_i], i = 1, 2, \ldots, k$, *glatka. Za odgovarajuću krivu tada kažemo da je dio po dio glatka kriva.*

Dio po dio glatku krivu γ koja se sastoji od glatkih djelova $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ orijentišemo tako što redom orjentišemo glatke djelove $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ tako da ako je tačka B_i kraj krive γ_i onda je ta tačka početak krive γ_{i+1}.

Definicija 7. *Kontura je dio po dio glatka zatvorena kriva koja leži u ravni.*

Primjer 2. Primijetimo da vektor brzine regualrne krive φ, koji je u tački t jednak $\vec{\varphi}(t)$ zavisi od parametrizacije te krive; promjenom parametriacije tj. zamjenom parametra posredstvom funkcije α dobija se parametrizacija $\psi : [c, d] \to R^3$, čiji je vektor brizine jednak $\vec{\psi}'(t) = (\alpha'(t)\vec{\varphi}'(\alpha(t))$. Dakle, vektor brzine krive zavisi od parametrizacije. Kažemo da vektorsko polje nije geopmetrisjko svojstvo krive. S druge starne, ako su $\varphi : [a, b] \to R^3$ i $psi : [c, d] \to R^3$, ekvivalentne parametrizacije krive, tada za jedinične tangentne vektore $\vec{T}_{\psi(t)}$ i $\vec{T}_{\varphi(\alpha(t))}$ te krive važi

$$\vec{T}_{\psi(t)} = \frac{\psi'(t)}{|\psi'(t)|} = \frac{\alpha'(t)\vec{\varphi}'(\alpha(t))}{|\alpha'(t)\vec{\varphi}'(\alpha(t))|} = \vec{T}_{\varphi}(\alpha(t))$$

a jednačina tangentne prave u tački $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ je

$$\frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{x - x_0}{x'(t_0}.$$

Dakle, jedinični tangentni vekltor krive, ne zavisi od parametrizacije ako te parametrizacije definišu istu orijentaciju krive. Tada ni tangentna prava krive ne zavisi od parametrizacije, i kažemo da su jedinični tangentni vektor i tangentna prava gometrijska svojstva krive.

Primjer 3. Ako je kriva u ravni R^2, zadata kao grafik funkcije $y = f(x), x \in [a, b]$, tada je možemo predstaviti parametarski sa $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, gdje je $x(t) = t, y(t) = f(t)$, i vektor tangente $\vec{T}_{(x_0,y_0)}$ te krive u tački $(x_0, y_0 = f(x_0))$ je vektor $\vec{i} + f'(x_0)\vec{j}$ i jednačina tangentne parve je $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Primjer 4. Ako je pak kriva zadata implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, i ako je $F(x_0, y_0) = 0$, pri čemu je $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$, tada se ta kriva u okolini tačke (x_0, y_0) može predstaviti u obliku $y = g(x)$, tako da je $F(x, g(x)) = 0$ u okolini tav cke x_0. Pri tome je $\partial_1 F(x_0, y_0) + \partial_2 F(x_0, y_0)g'(x_0) = 0$ odakle slijedi da se jednačina tangente u tački (x_0, y_0) koja glasi $y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$, zamjenom $g'(x_0)$ sa $-\frac{\partial_1 F(x_0,y_0)}{\partial_2 F(x_0,y_0)}$, dobijamo jednačinu tangentne prave na krivu zadatu sa $F(x, y) = 0$ u tački (x_0, y_0) koja glasi $\partial_1 F(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

Vratimo se pitanjima primjene integrala.

Primjer 5. Neka je $\varphi : [a, b] \to R^3$ glatka kriva. Tada je za svako $t \in [a, b]$ $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Postavljamo zadatak izračunavanja dužine te krive. Ako sa $l([\alpha, \beta])$ označimo dužinu onog dijela koji odgovara intervalu $[\alpha, \beta]$, onda ako su $l[\alpha_1, \beta_1]$ i $[\alpha_2, \beta_2]$ intervali koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, onda je $l([\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_1]) = l([\alpha_1, \beta_1]) + l([\alpha_2, \beta_2]$. Nismo definisali precizno dužinu krive, ali je formula koju smo napisali u skladu sa našom intuitivnom predstavom o dužini krive. Iz mehaničke interpretacije zaključujemo da je $\inf\{|v(t) : t \in [a, b]\} \cdot (\beta - \alpha) \leq l([\alpha, \beta]) \leq \sup\{|v(t)| : t \in [a, b]\} \cdot (\beta - \alpha)$.

Odavde slijedi da važi: $lim\frac{l([\alpha,\beta])}{\beta-\alpha} = v(t)$, gdje se limes računa kada $\beta - \alpha \to 0$ a $t \in [\alpha, \beta]$. Ukupno, prema opštoj shemi, imamo da je

$$l([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Istaknimo još jednom da je formula dobijena oslanjanjem na mehaničku interpretaciju i interpretaciju vektora $(x'(t), y'(t), z'(t))$ kao vektora brzine. Ako u vezi sa istom situacijom pretpostavimo da je na krivoj $\gamma = \varphi([a, b]) \subseteq R^n$ (φ je glatka parametrizacija) raspoređena masa čija je (linijska) gustina u tački M (koja se definiše kao granična vrijednost količnika $\frac{m(s)}{l(s)}$ kada $diam(s) \to 0, M \in s$) jednaka $\rho(M)$. Pretpostavimo da je funkcija ρ neprekidna. Ako sa $m([\alpha, \beta])$ označimo masu dijela krive $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq \gamma$, onda na osnovu fizičke interpretacije slijedi da je

$$\min\{\rho(\varphi(t)) : t \in [\alpha,\beta]\} l([\alpha,\beta]) \leq m([\alpha,b]) \leq \max\{\rho(\varphi(t)) : t \in [\alpha,\beta]\} l([a,b]).$$

Ako je $M = \varphi(t) \in \gamma$ fiksirana tačka, onda će iz gornje relacije slijediti da količnik $\frac{m([\alpha,\beta])}{l([\alpha,\beta])} \to \rho(\varphi(t) = \rho(M)$ kada $\beta - \alpha \to 0, t \in [\alpha, \beta]$. Dalje, na osnovu formula koje smo izveli kod izračunavanja dužine krive imamo da je

$$\frac{m([\alpha,\beta])}{\beta-\alpha} = \frac{m([\alpha,\beta])}{l([\alpha,\beta]} \cdot \frac{l([\alpha,\beta])}{\beta-\alpha} \to \rho(\varphi(t)) \cdot |\vec{v}(t)| =$$

$$\rho(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}'(t)| = \rho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Jasno je da je funkcija m definisana na familiji segmenata $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, aditivna. Njena gustina u tački $t \in [a, b]$ jednaka je $\rho(\varphi(t)) \cdot |\vec{v}(t)|$. Slijedi da je

$$m([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \rho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

U vezi sa dužinom krive linije, napomenimo da se od svih mogućih parametrizacija glatke krive γ posebno ističe takozvana prirodna parametrizacija. Ako kriva γ nije zatvorena, onda ćemo uočiti jednu krajnju tačku (označimo je sa A) krive γ, proglasiti je početnom i sa $l(M)$ označiti dužinu dijela AM krive γ. Ako je l dužina krive γ onda će put $\pi : [0, l] \to R^3$, gdje je $\pi(s) = l^{-1}(s)$ ona tačka M na krivoj γ za koju je $l(M) = s$. Parametrizacija π je prirodna parametrizacija krive γ. Ako je $\varphi : [a, b] \to R^3$ glatka parametrizacija iste krive γ i ako je $\varphi(a) = A$, onda se prelaz sa parametrizacije φ na prirodnu parametrizaciju može izvršiti tako što se definiše novi parametar $s = \alpha(t) = l(\varphi(t)) = \int_a^t |\varphi'(\tau)| d\tau$. Tada je $\pi = \varphi \circ \alpha^{-1}, \alpha'(t) = |\varphi'(t)| > 0, |\pi'(s)| = 1, \vec{T}_\pi(\pi(s)) = \vec{\pi}'(s)$, što se lako provjerava.

Primjer 2. Razmotrimo još jedan zadatak u vezi sa glatkom krivom $\varphi : [a, b] \to R^3$. Pretpostavimo da je u nekoj oblasti D koja sadrži krivu $\gamma = \varphi([a, b])$ (ili bar na samoj krivoj γ) definisano polje sila F. Dakle, u svakoj tački M definisana je sila $\vec{F}(M)$. Ako je sila konstantna na pravoliniskom odsječku određenom nekim vektorom $\vec{s}$, rad sile se računa po formuli $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}| \cos(\vec{F}, \vec{s})$. Izvešćemo formule za izračunavanje rada sile $\vec{F}$ na putu $\varphi : [a, b] \to BbbR^3$. Pretpostavićemo da je polje $\vec{F}$ neprekidno. Odsješku $[\alpha, \beta]$ pridružimo broj $A([\alpha, \beta])$ koji je jednak radu sile na dijelu $\varphi : [\alpha, \beta] \to R^3$ date krive. Uočimo da je projekcija vektora $\vec{F}(M) = \vec{F}(\varphi(t))$ na vektor tangente $\vec{T}(M)$ na krivu γ u tački $M = \varphi(t)$ jednak $|\vec{F}(M)| \cdot \cos(\vec{F}(M), \vec{T}(M))$. Iz fizičke interpretacije zadataka slijedi da je

$$\min\{|\vec{F}(\varphi(t))| \cos(\vec{F}(\varphi(t)), \vec{T}(\varphi(t)) : t \in [\alpha, \beta] l([\alpha, \beta]) \leq$$

$$\max\{|\vec{F}(\varphi(t))| \cos(\vec{F}(\varphi(t)), \vec{T}(\varphi(t)) : t \in [\alpha, \beta] l([\alpha, \beta]).$$

Ako fiksiramo tačku $M = \varphi(t)$ i posmatramo granični proces gdje $\beta - \alpha \to 0, t \in [\alpha, \beta]$, odavde i iz ranije izvedenih relacija dobijamo da

$$\frac{A([\alpha, \beta])}{\beta - \alpha} = \frac{A([\alpha, \beta])}{l([\alpha, \beta])} \frac{l([\alpha, \beta])}{\beta - \alpha} \to$$

$$|\vec{F}(\varphi(t))| \cos(\vec{F}(\varphi(t)), \vec{T}(\varphi(t)) \cdot |\vec{v}(t)| = \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{v}(t) = \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t).$$

Naša funkcija A definisana na familiji pododsječaka odsječka $[a, b]$ očigledno je aditivna. Njen izvod po mjeri (njena gustina) u tački t iznosi $\vec{F}(\varphi(t) \cdot \vec{\varphi}'(t)$. Tako zaključujemo da se rad sile $\vec{F}$ na putu φ može računati po formuli $A([\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\varphi(t))\vec{\varphi}'(t)dt$, odnosno

$$A([a, b]) = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt.$$

Što se tiče formule za gustinu (izvod po dužini) mogli smo postupiti na sledeći način. Fiksira se tačka $t \in (a, b)$ i posmatraju odsječci $[\alpha, \beta]$ koji sadrže tačku t. Uočimo tačke $\varphi(\alpha)$ i $\varphi(\beta)$ koje pripadaju krivoj γ. Rad na putu koji spaja tačke $\varphi(\alpha)$ i $\varphi(\beta)$ iznosi $\vec{F}(\varphi(t)) \cdot \phi(\beta) \vec{-} \phi(\alpha) = \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(\xi)(\beta - \alpha)$. Ako i lijevu i desnu stranu podijelimo sa $(\beta - \alpha)$ i ako se interval $[\alpha, \beta]$ steže na tačku t i tačka ξ će težiti ka tački t, pa ćemo dobiti da gustina rada sile $\vec{F}$ u tački t iznosi $\vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)$.

Napravimo dvije važne napomene. Prvo, formula za rad sile po krivoj liniji vezana je za parametrizaciju te krive, a svakia parametrizacija određuje koja je tačka na krivoj prva (to je tačka $A = \varphi(a)$) a koja poslednja (to je tačka $B = \varphi(b)$). Drugačije, parametrizacija određuje i orijentaciju krive. Iz fizičke interpretacije formule jasno je da ako izmijenimo orjentaciju krive, tj. ako krivu zadamo kao nosač puta ψ kod koga je početna tačka tačka $B = \psi(\alpha)$ a krajnja $A = \psi(\beta)$, onda će se rad sile $\vec{F}$ po putu ψ i rad sile $\vec{F}$ po putu φ razlikovati u znaku. Drugo, formula za rad se ne mora vezati za silu. Na isti način se, na primjer, može računati i rad električnog polja $\vec{E}$ po putu $\varphi : A_E([a, b]) = \int_a^b \vec{E}(\varphi(t) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt$, rad jačine magnetnog polja $H : A_H([a, b]) = \int_a^b \vec{E}(\varphi(t) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt$ i slično.

§(B) Površ

Izložićemo i nekoliko primjera primjene integrala koji su vezani za pojam površi. Kako će nam i u sledećoj glavi ovaj pojma biti važan, to ćemo ga nešto detaljnije raspraviti. Napomenimo odmah da ako sve uporedimo sa pojmom puta i krive, situacija pred kojom se nalazimo je osjetno komplikovanija.

Počećemo, prirodno, od definicije površi. Osnovni primjeri površi u R^3 su ravan, sfera, cilindar, konus, paraboloid i svaka definicija površi morala bi obuhvatiti ove površi. Mi bismo htjeli da ukažemo na analitičko zadavanje površi i na mogućnosti koje odatle slijede.

Tako na primjer sfera se može opisati jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, ali se za opisivanje sfere koriste i jednačine $x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta$. Kada se govori o krivima onda se uobičajeno koristi terminologija iz mehanike-kriva se posmatra kao trag koji nastaje pri kretanju materijalne čestice. Kada je riječ o površima onda je uobičajeno da se koristi terminologija iz oblasti kartografije-kada se pravi karta odgovarajućeg dijela zemljine (ili neke druge) površi onda se pravi slika te površi u ravni i ustvari se uspostavlja veza između tačaka na karti i tačaka na površini zemlje. To pridruživanje je neprekidno-bliskim tačkama na karti odgovaraju tačke koje su bliske na površini zemlje. To je osnovna ideja a njena realizacija je prilično složena. Počnimo sa realizacijom. Zadržaćemo se na površima u R^3.

Definicija 8. *Neka su D_1 i D_2 skupovi iz R^3. Za preslikavnje $\varphi : D_1 \to D_2$ kažemo da je homeomorfizam ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

a) $\varphi : D_1 \to D_2$ je bijekcija;

b) $\varphi : D_1 \to D_2$ i $\varphi^{-1} : D_2 \to D_1$ su neprekidna preslikavanja na D_1 odnosno na D_2.

Očigledno je da ako je $\varphi : D_1 \to D_2$ homemorfizam onda je i $\varphi^{-1} : D_2 \to D_1$ homemorfizam.

Definicija 9. *Za skupove $D_1 \subseteq R^3$ i $D_2 \subseteq R^3$ kažemo da su homemorfni ako postoji preslikavanje $\varphi : D_1 \to D_2$ koje je homemorfizam.*

Zadatak. a) Dokazati da je svaka prosta zatvorena kriva linija homeomorfna sa kružnicom.

b) Dokazati da ako je skup γ homeomorfan sa kružnicom onda je γ prosta zatvorena kriva linija.

Definicija 10. *Za skup σ u R^3 kažemo da je prosta zatvorena površ ako je σ homemorfna sa sferom.*

Primjer 1. Otvorena elipsa $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ je homemorfna slika otoverong kruga $x^2+y^2 < 1$, pri čemu je homemorfizam dat formulom $(\xi, \eta) = (ax, by)$.

Definicija 11. *Skup Ω u R^2 je dopustiva oblast ako je Ω oblast ili zatvorena oblast čija je granica $\partial\Omega$ kontura u R^2.*

Definicija 12. *Skup $S \subseteq R^3$ je elementarna površ u R^3 ako postoji dopustiva oblast u R^3 koja je homeomorfna sa S.*

Ako je S elementarna površ u R^3, Ω oblast u R^2 i $\varphi : \Omega \to S$ homeomorfizam onda za preslikavanje $\varphi : \Omega \to S$ kažemo da je parametrizacija (karta) površi S, Ω je oblast parametara a S rejon važenja karte.

Definicija 13. *Skup S je površ u R^3 ako za svaku tačku $M \in S$ postoji kugla $K(M, r)$ sa centrom u tački M za koju je $S \cap K(M, r)$ elementarna površ u R^3.*

Definicija 14. *Ako je S površ i ako je $M \in S$, onda za parametrizovanu površ $\varphi : \Omega_M \to K(M, r) \cap S$ kažemo da je lokalna karta površi S u blizini tačke M.*

Definicija 15. *Skup lokalnih karata površi S čiji rejoni važenja pokrivaju površ S nazivamo atlasom površi S.*

Definicija 16. *Elementarna površ $S \subseteq R^3$ je glatka ako postoji karta $\varphi : \Omega \to S$ koja je glatka.*

Pri tome za homemorfizam $\varphi : \Omega \to S$ kažemo da je glatka preslikavanje ako $\varphi \in C^1(\Omega)$ (tj. φ je diferencijabilno na Ω i parcijalni izvodi su neprekidni na Ω) i $(\forall (u, v) \in$

$\Omega)$ $\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v) \neq 0$. Ako je $\varphi(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, onda je

$$\partial_1\vec{\varphi}(u,v) = \partial_1 x(u,v)\vec{i} + \partial_1 y(u,v)\vec{j} + \partial_1 z(u,v)\vec{k},$$

$$\partial_2\vec{\varphi}(u,v) = \partial_2 x(u,v)\vec{i} + \partial_2 y(u,v)\vec{j} + \partial_2 z(u,v)\vec{k}.$$

Uslov $\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v) \neq 0$ označava da ovi vektori nijesu kolinearni.

Primjer 2. Pretpostavimo da je karta $\varphi : \Omega \to S$ glatka i neka je $(u_0, v_0) \in \Omega$. Posmatrajmo dio prave paralelene u-osi koja prolazi kroz tačku (u_0, v_0) i leži u Ω. Slika ove duži je kriva k_1 koja leži na S i čiji je put $[\alpha_1, \beta_1] \ni u \to \varphi(u, v_0)$. Tangentni vektor ove krive u tački $\varphi(u_0, v_0)$ je vektor $\vec{T_1} = \partial_1\vec{\varphi}(u_0, v_0)$. Slično, slika duži $u = u_0, v = v \in [\alpha_2, \beta_2]$ je kriva k_2 a njen tangentni vektor u tački $\varphi(u_0, v_0)$ je vektor $\vec{T_2} = \partial_2\vec{\varphi}(u_0, v_0)$. Ako je sada k proizvoljna glatka kriva koja leži na S i prolazi kroz tačku $\varphi(u_0, v_0)$ je slika krive $k' \subseteq \Omega$. Pri tome je k' zadata sa $[\alpha, \beta] \ni t \to (u(t), v(t))$ a kriva k sa $[\alpha, \beta] \ni t \to \psi(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Tangentni vektor krive k u tački $\varphi(u_0, v_0) = \varphi(u(t_0), v(t_0()$ je vektor $\vec{\psi}'(t_0)$. Pri tome je vektor

$$\vec{T} = \vec{\psi}'(t_0) = \partial_1\vec{\varphi}(u(t_0), v(t_0)) \cdot u'(t_0) + \partial_2\vec{\varphi}(u(t_0), v(t_0)) \cdot v'(t_0) == u'(t_0)\vec{T_1} + v'(t_0)\vec{T_2}$$

linearna kombinacija vektora $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$. Možemo zaključiti da skup svih vektora koji su tangentni na glatke krive koje leže na glatkoj površi S i prolaze kroz tačku $\varphi(u_0, v_0)$. To je tangentna ravan površi S u tački $\varphi(u_0, v_0)$. Vektor $\vec{T_1} \times \vec{T_2} = \partial_1\vec{\varphi}(u_0, v_0) \times \partial_2\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ je njen normalni vektor ili vektor normale na površ S . Njegov koordiante su

$$A = \partial_1 y(u_0, v_0)\partial_2 z(u_0, v_0) - \partial_1 z(u_0, v_0)\partial_2 y(u_0, v_0)),], B = \partial_1 z(u_0, v_0)\partial_2 x(u_0, v_0) - \partial_1 x(u_0, v_0)\partial_2 x(u_0, v$$

$$C = \partial_1 x(u_0, v_0)\partial_2 y(u_0, v_0) - \partial_1 y(u_0, v_0)\partial_2 z(u_0, v_0)),$$

a jednačina tangentne ravni u tački (x_0, y_0, z_0) je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Primjer. 4. Odredićemo jednačinu tangentne ravni jedinične sfere u sjevernom polu.

Rješenje. Prvo, parametrizujmo sferu ili bar njen dio u kojem je i sjeverni pol. To se može uraditi na više načina. Prvi, kada $(u,v) \to \varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}$. Uočimo sjeverni pol $N(0,0,1) = \varphi(0,0)$. Posmatrajmo krive $k_1 : (u, 0) \mapsto \varphi(u, 0) = (u, 0, \sqrt{1 - u^2})$ i njen vektor tangente je $\vec{t_1} = \varphi'_u(0,0) = (1,0,0) = \vec{i}$, dok je vektor tangente krive k_2 u istoj tački $\vec{t_2} = \varphi'_v(0,0) = (0,1,0) = \vec{j}$, pa je vektor normale tangentne ravni $\vec{n} = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = (0,0,1)$. Slijedi da je jednačina tangentne ravni u tački $N(0,0,1) : z = 1$. To je geometrijski bilo sasvim očigledno.

Primjer 4. Pretpostavimo sada da je površ Σ zadata jednačinom $z = f(x,y)$ i da tačka $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. Tada polazeći od parametrizacije $x = u, y = v, z = f(u,v)$ dobijamo tangentne vektore krivih $k_1 : u \mapsto (u, v_0, f(u, v_0)$ i $k_2 : v \mapsto (u_0, v, f(u_0, v)$ u tački M_0. To su vektori $\vec{t_1} = \vec{i} + \partial_1 f(u_0, v : 0)\vec{k}, \vec{t_2} = \vec{j} + \partial_2 f(u_0, v : 0)\vec{k}$, a vektor norale na tangentnu ravan u tački $(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, f(u_0, v_0))$ je vektor $\vec{N} = \vec{t_1} \times \vec{t_2} = -\partial_1 f(u_0, v_0)\vec{i} - \partial_2 f(u_0, v_0)\vec{j} + \vec{k}$, pa je, s obzirom da je $(u_0, v_0, f(u_0.v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, jednačina tangentene ravni u tački (x_0, y_0, z_0):

$$-f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'(x_0.y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0, \text{ odnosno } z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y -$$

a jednačine normale na posmatranu površ.

Primjer 5. Ako je površ Σ zadata impicitno jednačinom $F(x,y,z)=0$, i ako tačka (x_0,y_0,z_0) pripada toj površi, pri čemu $\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, tada postoji okolika tačke (x_0,y_0,z_0) na površi Σ u kojoj se površ može predstaviti jednačinom $z=g(x,y),(x,y)\in G$. Tada je $F(x,y,g(x,y))=0$, a jednačina tangentne ravni u tački (x_0,y_0,z_0) je:

$$z-z_0=\partial_1 g(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_2 g(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Iz jednakosti $F(x,y,g(x,y))=0$ slijedi da je $\partial_1 F(x_0,y_0,z_0)+\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)\partial_1 g(x_0,y_0)=0$ i $\partial_2 F(x_0,y_0,z_0)+\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)\partial_2 g(x_0,y_0)=0$, odakle, dobijamo jednačinu tangentne ravni

$$z-z_0=-\frac{\partial_1 F(x_0,y_0.z_0)}{\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{\partial_2 F(x_0,y_0,z_0)}{\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)$$

odnosno

$$\partial_1 F(x_0,y_0.z_0)(x-x_0)+\partial_2 F(x_0,y_0.z_0)(y-y_0)+\partial_3 F(x_0,y_0.z_0)(z-z_0)=0$$

Primjer 6. Izračunati površinu tijela ograničenog površima $x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=a^2$.

Primijetimo da se $\frac{1}{16}$ tijela (napraviti skicu) projektuje se na Oxy ravan, u trougao $\Delta: 0\leq x\leq a, 0\leq y\leq x$, pa je tražena površina

$$S=16\int\int_\Delta \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy,$$

gdje $z=\sqrt{a^2-x^2}$. Sada imamo:

$$S=16a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x dy=16a\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=16a^2.$$

Primjer 7. Izračunaćemo površinu (a) S sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ i (b) površinu S_1 dijela sfere koji se nalazi van cilindara $x^2+y^2=ax$ i $x^2+y^2=-ax$.

Površina $S/2$ polusfere ǐja je jednačina $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ jednaka je

$$\frac{S}{2}=\int\int_{x^2+y^2\leq a^2}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\int\int_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{a}{sqrta^2-x^2-y^2}.$$

Prelaskom na polarne koordinate $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, J=\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\rho)}=\rho$, dobijamo

$$S=4\pi a\int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=4a^2\pi.$$

(b) Primijetimo dalje da je $S_1/8$ površina dijela površine kojise nalazi u prvom kvadrantu, pa je

$$S_1=8\int\int_D \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

Prelazeći na polarne koordinate dobijamo da je oblast D u polarnim kooordinatama oodredjena sa $0 \leq \varphi \leq \frac{pi}{2}, a\cos\varphi \leq \rho \leq a$, pa je

$$S_1 = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 8a^2.$$

Uvedimo i pojam orjentacije površi.

Pretpostavimo da se u svakoj tački površi S može postaviti tangentna ravan a samim tim i normala. Neka je M tačka te površi, k proizvoljna glatka zatvorena kriva koja leži u S i sadrži tačku M i $\vec{n}(M)$ jedinični vektor normale. Obilazeći krivu k počevši od tačke M, vektor normale se mijenja. U vezi sa tim razlikujemo dvije mogućnosti :

i) Ako je, na primjer, S površ kugle i ako se posmatraju samo neprekidne promjene vektora normale, onda, kada se vratimo u početnu tačku M, nezavisno od izbora krive k vektor normale će se poklopitisa $\vec{n}(M)$. Za površ koja ima opisanu osobinu kažemo da je orjentabilna. Primijetimo da je ako je $\vec{n}(M)$ normala površi onda je i $-\vec{n}(M)$ normala. Kod orjentibalnih površi izborom neprekidne funkcije $k \ni M \to \vec{n}(M)$ zadaje se orjentacija površi. Dakle, za svaku orjentabilnu površ možemo izabrati dvije orjentacije, koje su međusobno suprotne.

Ako je S elementarna glatka površ zadata glatkom kartom $\Omega \ni (u,v) \to \varphi(u,v)$, onda je formulom

$$\vec{n}(M) = \frac{\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)}{|\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)|}$$

zadato neprekidno preslikavanje $S \ni M \to \vec{n}(M)$, odnosno zadata je orjentacija te površi. Tada kažemo da površ zadata parametarski i da je orjentacija zadata posredstvom parametrizacije φ. Ako je orjentacija $M \to \vec{n}(M)$ površi određena na neki drugi način (recimo, geometrijski je opisano preslikavanje $M \to \vec{n}(M)$) onda se ta orjentacija može upoređivati sa orjentacijom $M \to \vec{n}(M) = \vec{n}(\varphi(u,v))$ koja je zadata kartom (parametrizacijom) φ. Tada postoje dvije mogućnosti: a) $\vec{n}_1(M) = \vec{n}(M)$ i tada kažemo da je parametrizacija φ saglasna sa izabranom orjentacijom i b) $\vec{n}(M) = -\vec{n}(M)$ i tada kažemo da je parametrizacija φ nesaglasna sa orjentacijom.

ii) Ako je S Mebijusov list (ta površ se dobija tako što se spoje dijagonalna tjemena pravougaonika), onda se može kriva k može izabrati tako da kada se vratimo u početnu tačku vektor normale bude suprotan vektoru $\vec{n}(M)$. Za takvu površ kažemo da je neorjentabilna ili da se ne može orjentisati.

Ponovo pretpostavimo da imamo posla sa elementarnom glatkom površi S. Ako je $\varphi : \Omega \to S$ glatka parametrizacija (karta) ove površi i ako je $\omega : \Omega' \to \Omega$ difeomorfizam, onda zajedno sa parametrizacijm (kartom) $\varphi : \Omega \to S$ možemo posmatrati i parametrizaciju (kartu) $\psi = \varphi \circ \omega : \Omega' \to S$, koja je takođe glatka, pri čemu je $\psi(\Omega') = S$. Kažemo da je parametrizacija (karta) $\psi : \Omega' \to S$ nastala iz parametrizacije (karte) $\varphi : \Omega \to S$ zamjenom parametara posredstvom difeomorfizma ω. Obrnuto, ako su $\varphi : \Omega \to S$ i $\psi : \Omega' \to S$ dvije glatke parametrixacije (karte) jedne te iste površi S, onda uvodeći preslikavanje $\omega = \varphi^{-1} \circ \psi : \Omega' \to \Omega$, za koje se lako provjerava da je difeomorfizam, dobijamo da je $\psi = \varphi \circ \omega$, odnosno da jeparametrizacija (karta) $\psi : \Omega' \to S$ nastala iz parametrizacije (karte) $\varphi : \Omega \to S$ posredstvom difeomorfizma ω.

Pogledajmo u kakvom su odnosu orijentacije površi S koje zadaju karte φ i ψ. Iz $\psi = \varphi \circ \omega$, odnosno iz

$$\psi(u', v') = \varphi(u, v) = \varphi(\omega_1(u', v'), \omega_2(u', v')),$$

na osnovu teoreme o izvodu složene funkcije, slijedi da je

$$\partial_1 \vec{\psi}(u', v') = \partial_1 \vec{\varphi}(u, v) \cdot \partial_1 \omega_1(u', v') + \partial_2 \vec{\varphi}(u, v) \cdot \partial_1 \omega_2(u', v'),$$

$$\partial_2 \vec{\psi}(u', v') = \partial_1 \vec{\varphi}(u, v) \cdot \partial_2 \omega_1(u', v') + \partial_2 \vec{\varphi}(u, v) \cdot \partial_2 \omega_2(u', v'),$$

Odavde dalje jednostavno dobijamo da je

$$\partial_1 \vec{\psi}(u', v') \times \partial_2 \vec{\psi}(u', v') = \partial_1 \vec{\varphi}(u, v) \times \partial_2 \vec{\varphi}(u, v) \cdot det\, \omega'(u', v').$$

Kako je $\omega : \Omega' \to \Omega$ difeomorfizam, to je $det\, \omega'(u', v') \neq 0$ u svakoj tački (u', v') oblasti Ω'. Zbog neprekidnosti funkcije $det\, \omega'(u', v')$ slijedi da $det\, \omega'(u', v')$ ne mijenja znak.

Iz izvedenih formula i uzimajući u obzir date napomene slijedi da je

$$\vec{n}_\psi(M) = \vec{n}_\psi(\psi(u', v')) = \frac{\partial_1 \vec{\psi}(u', v') \times \partial_2 \vec{\psi}(u', v')}{|\partial_1 \vec{\psi}(u', v') \times \partial_2 \vec{\psi}(u', v')|} =$$

$$\frac{\partial_1 \vec{\varphi}(u, v) \times \partial_2 \vec{\varphi}(u, v) \cdot det\, \omega'(u', v')}{|\partial_1 \vec{\varphi}(u, v) \times \partial_2 \vec{\varphi}(u, v)| \cdot |\, det\, \omega'(u', v')|} = \epsilon \cdot \vec{n}_\varphi(M),$$

gdje je $\epsilon = sgn\, det\, \omega'$.

Slijedi da parametrizacije (karte) $\varphi : \Omega \to S$ i $\psi = \varphi \circ \omega : \Omega' \to S$ zadaju istu orjentaciju površi S ako je determinanta difeomorfizma prelaza sa jedne parametrizacije (karte) na drugu pozitivna i različite (suprotne) orjentacije ako je ta determinanta negativna. U prvom slučaju kažemo da su parametrizacije (karte) ekvivalentne. Lako se dokazuje da je ekvivalentnost karata koje zadaju istu površ relacija ekvivalencije i da se sve karte dijele u dvije klase ekvivaklencije odnosno zadaju dvije orjentacije.

Pređimo na primjenu integrala u zadacima vezanim za površi.

Primjer 3. Neka je $D \subseteq R^2$ oblast u R^2 ograničena konturom γ i $\varphi : D \to R^3$ glatka karta površi $S = \varphi(D)$. Pretpostavimo da je φ' ograničeno na D. Površinu površi $S = \varphi(D)$ definišemo na sledeći način. Podijelimo površ S na djelove $S_1, \ldots, S_k$. Skupovi $D_1 = \varphi^{-1}(S_1), \ldots, D_k = \varphi^{-1}(S_k)$ čine podjelu skupa D. Pretpostavimo da ovi skupovi nemaju zajedničkih tačaka osim eventualno graničnih. Izaberimo u svakom parčetu S_j tačku $Q_j = \varphi(M_j) = \varphi(u_j, v_j)$ i postavimo ravan R_j koja dodiruje površ S u tački M_j. Primijetimo da je vektor normale ove ravni $\vec{n}_j = \partial_1 \vec{\varphi}(M_j) \times \partial_2 \vec{\varphi}(M_j)$. Projekciju dijela S_j površi S na ravan R_j označimo sa Q_j. Površinu površi S definišemo kao graničnu vrijednost suma $\sum P(Q_j)$ gdje se granična vrijednost računa kada maksimalni dijametar skupova S_j (ili D_j) teži ka nuli. Da bismo utvrdili formulu za računanje površine površi S, posmatraćemo funkciju F koja svakom dopustivom skupu $A \subseteq D$ pridružuje površinu skupa $\varphi(A)$. Nije teško dokazati da je funkcija F aditivna. Da bismo izračunali gustinu odnosno izvod po površini funkcije F potrebno je naći graničnu vrijednost količnika $\frac{F(E)}{P(E)}$ kada se skup E steže na tačku M. Nekaje E pravouganik (vidi sliku) koji sadrži tačku M. Primijetimo da je $\varphi(M+h) = \varphi(M)h^1 + \partial_1\varphi(M)h^2 + \partial_2\varphi(M) + o(h)$. Slika pravougaonika

E je krivolinijski paralelogram. Linearno preslikavanje $\psi(M+h) \to \varphi(M) + \partial_1\varphi(M)h^1 + \partial_2\varphi(M)h^2$ će pravougaonik E preslikati u paralelogram Π koji leži u tangentnoj ravni R koja sadrži tačku M. Površina ovog paralelogram jednaka je modulu vektorskog proizvoda vektora $\partial_1\vec{\varphi}(M)h^1$ i $\partial_2\vec{\varphi}(M)h^2$. Odavde slijedi da je $P(\varphi(E)) = P(E)\cdot|\partial_1\vec{\varphi}(M)\times\partial_2\vec{\varphi}(M)$. Ako je dijemetar skupa E dovoljno mali onda je odnos $P(\varphi(E))/P(\psi(E))$ blizak jedinici. Količnik

$$\frac{F(E)}{P(E)} = \frac{P(\varphi(E))}{P(E)} = \frac{P(\psi(E))}{P(E)} \cdot \frac{P(\varphi(E))}{P(\psi(E))}$$

konvergira ka $|\partial_1\vec{\phi}(M) \times \partial_2\vec{\phi}(M)|$ kada $diam\, E \to 0$. Relacija

$$\frac{F(E)}{\mu(E)} = \frac{P(\varphi(E))}{\mu P(E)} \to |\partial_1\vec{\phi}(M) \times \partial_2\vec{\phi}(M)| \text{ kada } diam\, E \to 0.$$

važi i ako E nije pravougaonik već proizvoljna zatvorena dopustiva oblast koja leži u D i sadrži tačku M. To se može dokazati i tako što se skup E aproksimira unijom pravougaonika pa se prethodni zaključci primijene na ove pravougaonike. Može se dokazati da je za svaku dopustivi zatvorenu oblast $E \subseteq D$,

$$\min\{|\partial_1\vec{\phi}(M)\times\partial_2\vec{\phi}(M)| : M \in E\}\mu(E) \leq F(E) \leq \max\{|\partial_1\vec{\phi}(M)\times\partial_2\vec{\phi}(M)| : M \in E\}\mu(E).$$

odakle zbog pretpostavljene neprekidnosti parcijalnih izvoda funkcije φ slijedi da je gustina funkcije F u tački M jednaka $|\partial_1\vec{\phi}(M) \times \partial_2\vec{\phi}(M)|$. U svakom slučaju iz gornjih razmatranja slijedi da ako je $A \subseteq D$ dopustiv skup onda je površina $F(A) = P(F(A))$ dijela $\varphi(A)$ površi S jednaka

$$P(\varphi(A)) = \int\int_A |\partial_1\vec{\phi}(u,v) \times \partial_2\vec{\phi}(u,v)| dudv.$$

Jasno je da ista formula važi i kada je S dio po dio glatka površ. Ako sa $\alpha = \alpha(u,v) = \alpha(M)$ označimo ugao između vektora $\partial_1\vec{\phi}(M)$ i $\partial_2\vec{\phi}(M)$ i iskoristimo vezu između kosinusa ugla i skalarnog proizvoda, dobićemo da je

$$|\partial_1\vec{\phi}(M) \times \partial_2\vec{\phi}(M)| = |\partial_1\vec{\phi}(M)| \cdot |\partial_2\vec{\phi}(M)| \sin\alpha = |\partial_1\vec{\phi}(M)| \cdot |\partial_2\vec{\phi}(M)| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$\sqrt{|\partial_1\vec{\phi}(M)|^2 \cdot |\partial_2\vec{\phi}(M)|^2 - |\partial_1\vec{\phi}(M)|^2 \cdot |\partial_2\vec{\phi}(M)|^2 \cos^2\alpha} = \sqrt{EG - F^2}$$

gdje je

$$E = (\partial_1\phi_1(u,v))^2 + (\partial_1\phi_2(u,v))^2 + (\partial_1\phi_3(u,v))^2,$$
$$G = (\partial_2\phi_1(u,v))^2 + (\partial_2\phi_2(u,v))^2 + (\partial_2\phi_3(u,v))^2,$$
$$F = (\partial_1\phi_1(u,v))\partial_2\phi_1(u,v) + (\partial_1\phi_2(u,v))\partial_2\phi_2(u,v) + (\partial_1\phi_3(u,v))\partial_2\phi_3(u,v).$$

Na kraju formulu za izračunavanje površine možemo pisati u sledećem obliku:

$$F(A) = P(\varphi(A)) = \int\int_A \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Ako je površ S zadata formulom $z = f(x,y), (x,y) \in D$, gdje je funkcija f neprekidna na oblasti D zajedno sa svojim parcijalnim izvodima onda možemo pisati $S =$

$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$, odnosno preslikavanje $\varphi : D \to R^3$ definisano je formulom $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Dobija se da je $\frac{\partial\vec{\varphi}(x,y)}{\partial x} = -f'_x(x, y) \cdot \vec{i} - f'_y(x, y) \cdot \vec{j} + \vec{k}$, odnosno

$$F(A) = P(\varphi(A) = \int\int_A \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + f'_y(x, y)^2}dxdy.$$

Primjer 4. Postavimo zadatak izračunavanja ukupne mase raspoređene po površi S iz prethodnog primjera. Svakom skupu $A \subseteq D$ pridružimo broj $G(A) = m(\varphi(A))$ koji je jednak masi raspoređenoj na dijelu $\varphi(A)$ površi S. Nije teško dokazati da ako je $P(A) = 0$ onda je $G(A) = 0$ i da je G aditivna funkcija definisana na familiji dopustivih podskupova zatvorene oblasti $\overline{D}$. Posmatrajmo količnik $\frac{G(A)}{P(A)} = \frac{m(\varphi(A))}{P(\varphi(A)}\frac{P(\varphi(A))}{P(A)}$, uz pretpostavku da skup A sadrži tačku $M = (u, v) \in D$ i da $diam\, A \to 0$. Prvi činilac $\frac{m(\varphi(A))}{P(\varphi(A)}$ konvergiraće broju $\rho(\varphi(M)) = \rho(\varphi(u, v))$ koji ćemo zvati (površinskom) gustinom mase u tački $\varphi(u, v)$. Kako je već ranije utvrđeno drugi činilac $\frac{P(\varphi(A))}{P(A)}$ konvergiraće ka broju $|\partial_1\vec{\varphi}(M) \times \partial_2\vec{\varphi}(M)| = \sqrt{EG - F^2}|_{M=(u,v)}$. Ako je funkcija ρ koja je u svakoj tački površi S jednaka (površinskoj) gustini mase u toj tački, neprekidna na S, onda je

$$m(\varphi(A)) = \int\int_A \rho(u, v) \cdot \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

za svaki dopustivi skup $A \in D$ i specijalno,

$$m(\varphi(D)) = \int\int_D \rho(u, v) \cdot \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Opet, specijalno ako je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y), (x, y) \in D$, onda je

$$m(\varphi(A) = \int\int_A \rho(\varphi(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}dxdy.$$

Primjer 5. Posmatrajmo stacionarno proticanje tecnosti u oblasti $\Omega \subseteq R^3$ koja sadrži glatku površ S iz prethodnog primjera. Napomenimo da pod stacionarnim proticanjem podrazumijevamo proticanje tečnosti u kome brzina svake čestice zavisi samo od položaja u kome se ona nalazi (ne zavisi od vremena). Postavimo zadatak izračunavanja količine tečnosti koja u nekom momentu vremena protekne kroz površ S u pravcu vektora normale na S. Primijetimo da ta količina ne zavisi od trenutka posmatranja. Napomenimo da je $S = \{\varphi(u, v) : (u, v) \in D\}$, gdje je $\varphi : D \to R^3$ injektivno i neprekidno-diferencijabilno preslikavanje oblasti $D \subseteq R^2$ koja je ograničena konturom γ. Pretpostavlja se da je u svkoj tački $M = (u, v) \in D$ vektor $\partial_1\vec{\varphi}(M) \times \partial_2\vec{\varphi}(M)$ različit od nule - to je vektor normale na površ S. Označimo jedinični vektor normale u tački $K = \varphi(M)$ sa $\vec{n}(K)$. Označimo vektor brzine proticanja u tački K sa $\vec{v}(K)$. Neka je $A \subseteq D$ dopustiv skup koji sadrži tačku M i $B = \varphi(A) \subseteq S$. Ako svaku tačku K površi S transliramo za vektor $\vec{v}(K) \cdot \Delta t$, dio B će se translirati u B'. Protok tečnosti $Q(A)$ kroz $B = \varphi(A)$ pomnožen sa Δt jednak je zapremini krivog paralelepipeda čija su osnove B i B' a tačke $K \in B$ i $K' \in B'$ su spojene vektorom $\vec{v}(K) \cdot \Delta t$. Projekcija vektora $\vec{v}(K) \cdot \Delta t$ na vektor jedinične normale $\vec{n}(K)$ jednaka je $\vec{n}(K) \cdot \vec{v}(K) \cdot \Delta t$. Zapremina $V(A)$ ovog paralelepipeda se može ocijeniti na sledeći način :

$$\min\{\vec{n}(K) \cdot \vec{v}(K) \cdot \Delta t : K \in B\} \cdot P(B) \leq V(A) \leq \max\{\vec{n}(K) \cdot \vec{v}(K) \cdot \Delta t : K \in B\} \cdot P(B)$$

dok za protok $Q(A)$ važi

$$\min\{\vec{n}(K)\cdot\vec{v}(K) : K\in B\}\cdot P(B) \leq Q(A) \leq \max\{\vec{n}(K)\cdot\vec{v}(K) : K\in B\}P(B).$$

Ako pretpostavimo da je polje brzina $\vec{v}$ neprekidno na S onda iz gornje relacije izvodimo da $\frac{Q(A)}{P(A)}$ konvergira ka $\vec{n}(K)\cdot\vec{v}(K) = \vec{n}(\varphi(M))\cdot\vec{v}(\varphi(M))$ kada $diam\, A \to 0, M \in A$. Dalje, koristeći rezultat koji smo imali u primjeru 3, dobijamo da za količnik $\frac{Q(A)}{\mu(A)}$ važi:

$$\frac{Q(A)}{\mu(A)} = \frac{Q(A)}{\mu((B)} \cdot \frac{\mu P(B)}{\mu(A)} \to \vec{n}(K)\cdot\vec{v}(K)\cdot|\frac{\partial\vec{\phi}(M)}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\phi}(M)}{\partial v}| =$$

$$n(\vec{\varphi(M)}\cdot\vec{v}(\varphi(M))\cdot|\partial_1\vec{\phi}(M)\times\partial_2\vec{\phi}(M)|.$$

To znači da je gustina (izvod po mjeri) funkcije Q u tački $M=(u,v)$ jednaka

$$\vec{n}(\varphi(u,v))\cdot\vec{v}(\varphi(u,v))\cdot|\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v)| =$$

$$\frac{\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v)}{|\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v)|}\cdot\vec{v}(\varphi(u,v))\cdot|\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v)| =$$

$$(\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v))\cdot\vec{v}(\varphi(u,v)) = [(\partial_1\vec{\phi}(u,v),\partial_2\vec{\phi}(u,v)),\vec{v}(\varphi(u,v))]$$

gdje je sa $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ označen mješoviti proizvod vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Funkcija Q je aditivna. Slijedi da je

$$Q(A) = \int\int_A(\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v))\vec{v}(\varphi(u,v))dudv.$$

i specijalno

$$Q(D) = \int\int_D(\partial_1\vec{\phi}(u,v)\times\partial_2\vec{\phi}(u,v))\vec{v}(\varphi(u,v))dudv.$$

Primijetimo da protok može biti i negativan. Ovdje se radi o protoku u pravcu vektora normale, koji ne mora biti pozitivan.

Jasno je da u gornjem primjeru nije bilo od odlučujuće važnosti to što se radilo o stacionarnom proticanju fluida i protoku vektorskog polja brzina. Slične formule ćemo pisati i kada želimo da izračunamo protok jačine električnog polja kroz površ (tok električnog polja) ili protok indukcije magnetnog polja (magnetni fluks).

Zadaci.

1. U sljedećim primjerima dvostruki integral $I=\int\int_D f(x,y)dxdy$ napisati kao uzastopne integrale, jednom na dva načina sa različitim redosljedom promjenljivih:

(a) Ako je D trougao sa tjemenima $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$. [Rez. $I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_1^y f(x,y)dx$.]

(b) Ako je D trougao sa tjemenima $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$, napisati integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$ kao uzastopne i integrale. [Rez: $I = \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy + \int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$.]

(c) Ako je D kruga $x^2+y^2 \leq y$. [Rez. $I = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)d$

2. Promijeniti redosljed integracije u uzastopnim integralima

(a)$\int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$. [Rez. $\int_0^1 \int_{2-y}^1 \sqrt{1-y^2} f(x,y)dx$.

(b) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$. [Rez: $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)dy - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x,y)dx$.

3. Izračunati integral $I = \int\int_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy$, gdje je D trougao ograničen linijama $x = 2y, y = 2x, x+y = 6$. [Rez: $I = \frac{1}{3}\ln 7 - \frac{2}{7}$.

4. Izračunati integral $I = \int\int_D y^2 dxdy$, gdje je D skup ograničen linijama $x = y^2, y = x-2$. [Rez. $I = \frac{63}{20}$.

5. Izračunati integral $I = \int\int\int_V (x+y+z)dxdydz$ gdje je V skup ograničen ravnima $x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1$. [Rez. $I = \frac{1}{8}$.

6. Izračunati integral $I = \int\int\int_V ydxdydz$, gdje je V skup zadan nejednakostima $|x| \leq z, 0 \leq z \leq 1, z \leq y, x^2+y^2+z^2 \leq 4$. [Rez. $I = \frac{17}{12}$.

7. Izračunati integral $I = \int\int\int_T (x^2+y^2)dxdydz$, gdje je T polulopta $x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0$. [Rez. $I = \frac{4}{15}a^5\pi$.]

8. Izračanati $I = \int\int_D |\cos(x+y)|dxdy$, gdj je $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$.

9. Izračunati integral $I = \int\int_{x^2+y^2 \leq 1} |\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2|dxdy$. [Rez. $I = \frac{9}{16}\pi$.]

10. Izračunati površinu figure ograničene krivom (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$; (b) $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}, (a,b,h,k > 0)$ [Rez: (a) $\frac{\pi ab}{4}(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2})$. (b) $\frac{ab}{6}(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2})$.]

11. Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima $z = x^2+y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$. [Rez: $V = \frac{88}{105}$.

12. Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima $z = x^2+y^2, z = x+y$. [Rez. $V = \frac{\pi}{8}$.

13. Izračunati zapreminu elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. [Rez: $V = \frac{4}{3}\pi abc$.]

14. Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$. [Rez. $V = \frac{\pi}{3}abc(2-\sqrt{2})$.]

15. Izračunati površinu dijela površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$ koji se nalazi unutar cilindra $x^2+y^2 = 2x$ [Rez. $\pi\sqrt{2}$.

16. Izračunati zapreminu tijela ograničenog paraboloidom $z = x^2+y^2$, cilindričnim površima $x^2+y^2 = x, x^2+y^2 = 2x$ i ravni $z = 0$. [Rez. $V = \frac{45\pi}{32}$.

17.Izračunati moment inercije homogenog tijela gustine $\rho = 1$ koje je ograničeno dijelom sfere $x^2+y^2+z^2 = 2$ i dijelom konusa $x^2+y^2 = z^2, z \geq 0$. [Rez. $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.]

18. Koristeći jednakost $\lim_{a\to+\infty} \int\int_{[-a,a]\times[-a,a]} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to+infty} \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2}dx$ prelazom u drugom integralu na polarne koordinate, izračunati $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$. [Rez. $I = \sqrt{\pi}$.

19. Izračuanti integral $I = \int\int\int_T zdxdydz$ gdje je T tijelo ograničemo konusnom površi $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ i ravni $z = h$. [Rez. $I = \frac{R^2h^2\pi}{4}$.]

20. Izračunati integral $I = \int\int\int_T \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$, gdje je T tijelo ograničeno sa gornje strane površi $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x$ a sa donje ravni $z = 0$. [Rez.$I = \frac{a^4}{144}$.

III GLAVA
ELEMENTI TEORIJE POLJA

U ovom poglavlju insistiraćemo na terminologiji koja je uobičajena u teoriji polja. Ako je svakoj tački M oblasti $D \subseteq R^3$ pridružen broj $f(M)$ reći ćemo da je u D definisano skalarno polje f. Tako na primjer ako svakoj tački neke oblasti pridručimo temperaturu onda kačemo da posmatramo polje temperatura u odgovarajućoj oblasti. Pojam skalarnog polja nije nov-tu se zapravo radi o realnoj funkciji od tri promjenljive koja je definisana u D. Drugačija je samo terminologija. Slično, ako je svakoj tački M oblasti D pridružen vektor $\vec{A}(M)$ reći ćemo da je u D definisano vektorsko polje $\vec{A}$. S obzirom da se vektor $\vec{A}(M)$ jednoznačno opisuje pomoću svojih koordinata $A_x(M), A_y(M), A_z(M)$, mogli bismo reći da se ovdje radi o preslikavanju $A : D \to R^3$. Dakle, opet je riječ o promjeni termina. Kao primjere vektorskih polja navodimo polje brzina stacionarnog proticanja fluida (svakoj tački M dodjeljuje se vektor brzine $\vec{v}(M)$ u tački M ili jačinu elektrostatičnog polja (svakoj tački M pridružujemo vektor jačine električnog polja $\vec{E}(M)$ u M) ili indukciju magnetnog polja $\vec{B}$ i slično.

Naš cilj je da definišemo i računamo razne veličine koje su vezane za vektorska odnosno skalarna polja, kao na primjer rad vektorskog polja na zadatom putu, protok polja kroz površ i slično. Nešto od toga, u drugačijim terminima, već smo izložili u prethodnom poglavlju.

§1 Krivolinijski integrali

U prethodnoj glavi smo pripremili sve što je potrebno da bismo mogli da definišemo integral skalarnog i integral vektorskog polja po zadatom putu φ.

1. Definicija krivolinijskih integrala

Definicija 1. *Neka je $\varphi : [a, b] \to R^3$ glatki put i $f : D \to R$ skalarno polje definisano na skupu D koja sadrži nosač $\varphi([a, b])$ puta φ. Tada integral polja f po putu φ, koji označavamo sa $\int f(x, y, z)ds$, definišemo sledećom formulom*

$$\int\int f(x, y, z)ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}'(t)|dt \tag{1}$$

Može se dogoditi da integral na desnoj strani ne postoji. Tada ćemo reći da skalarno polje f nije integrabilno po putu φ. Krivolinijski integral skalarnog polja nazivamo krivolinijskim integralom prve vrste.

Ako je $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ onda formulu (1) možemo pisati u sledećem obliku

$$\int_\varphi f(x, y, z)ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot sqrt(x'(t)^2 + (y'(t)^2 + (x'(t)^2 dt$$

Formula pokazuje i kako treba računati integral skalarnog polja po putu. Prisjetimo se da smo se sa integralima koji stoje na desnoj strani sretali kada smo izučavali problem izračunavanja mase (količine naelektrisanja) raspoređenog po krivoj. U formulama koje smo tamopisali umjesto funkcije f stojala je gustina mase odnosno gustina naelektrisanja.

Primjer 1. Izračunati dužinu krive k, koja je definisana parametarskim jednačinama

$$x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t},\ t \in [0, 2\pi]$$

Rješenje. Imamo da je dužina l rive k jednaka $l = \int_k ds$. Primijetimo da je kriva k leži na dijelu konusne površi $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Imamo da su krajnje tačke krive k tačke $A(1, 0, 1)$ i $B(e^{-2\pi}, 0, e^{-2\pi})$ Pri tome je

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}), \varphi'(t) = (-e^{-t}(\cos t+\sin t), e^{-t}(\cos t-\sin t), -e^{-t}).$$

Slijedi da je

$$l = \int_0 2\pi\sqrt{3e^{-2t}}dt = \sqrt{3}(1 - e^{-2\pi}).$$

Primjer 2. Izračunti krivolinijski integral $I = \int_k (x+y)ds$ gje je k tougo sa tjemenima $O(0, 0), A(1, 0)$ i $B(1, 1)$.

Rješenje. Imamo da je

$$I = \int_{OA}(x + y)ds + \int_{AB}(x + y)ds + \int_{BO}(x + y)ds.$$

Pri tome se duži $OA, AB,$ i BO mogu parametirzovati na sljedeći način:$OA : x = t, y = 0, t \in [0, 1];\ AB : x = 1y = t, t \in [0, 1];\ BO : x = -t, y = -t, t \in [-1, 0]$, pa je

$$I = \int_0^1 tdt + \int_0^1 tdt + \int_{-1}^0 (-2t)\sqrt{2}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2}* = 1 + \sqrt{2}.$$

Primjer 3. Izračunati $I = \int_k (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$ dgje je c astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = ax^{\frac{2}{3}}$.

Rješenje. Astroida može biti opisana parametarskim jednačinama: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0.2\pi]$. Slijedi da je

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t+\sin^4 t)\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt = 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t+\sin^4 t)|\sin t||\cos t|$$

$$12a^{\frac{7}{3}}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\sin tdt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos tdt = 2a^{\frac{7}{3}}(\cos^6 t - \sin^6 t)|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

Primjer 4. Izračunati $I = \int_k \sqrt{x^2 + y^2}ds$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = ax$.

Rješenje. Krivu k je moguće parametrizovati, recimo na sljedeći način $x = a\cos^2 t, y = a\cos t\sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Do ove parametrizacije dolazimo tako što pokušamo da dtu jednačinu kružnice zapišemo u polarnim koordinatama $x = \rho\cos tt, y = \rho\sin t$. Uvrstimo u jednačinu i dobijamo vezu $\rho = a\cos t$, i to je jednačina krive k u polarnim koordinatama. Odavde dobijamo parametarske jednačine krive $k : x = a\cos^2 t, y = a\cos t\sin t$, a sa skice krive k vidimo d se polarni ugao t mijenja u odsječku $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.) Sada imamo da je

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^4 t + a^2\cos^2 t\sin^2 t}\sqrt{a^2\sin^2 2t + a\cos^2 2t} =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t a dt = 2a^2.$$

Primjer 5. Izračunati integral $I = \int_k x^2 ds$, gdje je k presjek sfere $x^+ y^2 + z^2 = a^2$ i ravni $x + y + z = 0$.

Rješenje. Primijetimo da je polupečnika kružnice k jednak a, jer je ona presjek sfere i ravni koja prolazi kroz centar sfere. Obim te kružnice je $2\pi a$. Pri tome je $I = \int_k y^2 ds = \int_k z^2 ds$, pa je $I = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$. Neka je $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizacija krive k i $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Tada je $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = a^2$,, pa je

$$I = \frac{1}{3}\int_k f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \frac{1}{3}a^2\int_k \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} =$$

$$\frac{1}{3}a^2\int_k \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \frac{1}{3}a^2 l(k)$$

gdje je $l(k) = 2\pi a$ obim kružnice k. Dakle, $I = \frac{2\pi a^3}{3}$.

Zajedno sa prostorom $R^3 = \{M = (x, y, z) : x, y, z \in R\}$ posmatraćemo i skup vektora $V^3 = \{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} : x, y, z \in R\}$.

Definicija 2. *Neka je $\varphi : [\alpha, \beta] \to R^3$ glatki put i $\vec{A} : D \to V^3$ vektorsko polje definisano na skupu D koji sadrži nosač $\varphi([\alpha, \beta])$ puta φ. Tada integral polja $\vec{A}$ po putu φ, koji označavamo sa $\int_\varphi \vec{A}(x, y, z)d\vec{s}$, definišemo sledećom formulom*

$$\int_\varphi \vec{A}(x, y, z)d\vec{s} := \int_\alpha^\beta \vec{A}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt. \qquad 2$$

Na desnoj strani jednakosti koju smo napisali stoji skalarni proizvod vektora $\vec{A}(\varphi(t))$ i $\vec{\varphi}'(t)$. Izraz na desnoj strani formule (2) smo sretali kada smo računali rad sile po putu.

Ako je $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, i

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}, (x, y, z) \in D,$$

onda formulu (2) možemo pisati u obliku

$$\int_\varphi \vec{A}(x, y, z)d\vec{s} = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t))dt.$$

Gornju formulu možemo shvatiti i kao formulu za računanje integrala vektorskog polja $\vec{A}$ po putu φ.

Često se integral vektorskog polja $\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$ po putu φ zapisuje u obliku

$$\int_\varphi P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz.$$

Integral vektorskog polja po putu nazivamo krivolinijskim integralom druge vrste.

Napomena. Krivolinijski integrali mogu biti definisani i na drugi način. Neka je dakle γ kriva čiji je početak tačka A, kraj tačka B a $f : D \to R$ skalarno polje definisano na skupu koji sadrži krivu γ. Neka je $\mathcal{M}$ podjela krive γ realizovana pomoću tačaka $A = M_0, \ldots, M_k = B$. Između svake dvije tačke M_{i-1} i M_i podjele $\mathcal{M}$ izaberimo po jednu tačku K_i sa krive γ. Ovoj podjeli i skupu izabranih tačaka $K = \{K_1, \ldots, K_k\}$ pridružimo sumu $\sigma(f, \mathcal{M}, K) = f(K_1) \cdot \Delta l_1 + \cdots + f(K_k) \cdot \Delta l_k$, gdje je Δl_i dužina onog dijela krive γ koji se nalazi između tačaka M_{i-1} i M_i. Graničnu vrijednost integralnih suma kada dijametar podjele $\Delta = \max\{\Delta l_i : 1 \leq i \leq k\}$ teži ka nuli označimo sa I. Ako je glatki put $\varphi : [a, b] \to R^3$ parametrizacija krive γ pri čemu je $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$, može se dokazati da je $I = \int_\varphi f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}'(t)| dt$.

Dajemo grubu skicu dokaza ove činjenice. Podjeli $\mathcal{M}$ krive γ odgovara podjela odsječka $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$, gdje je $t_i = \varphi^{-1}(M_i)$. Tačkama K_i sa krive γ odgovaraju tačke $\xi = \varphi^{-1}(K_i)$ sa odsješka $[a, b]$. U integralnoj sumi Δl_i možemo aproksimirati dužinom dijela tangente $\psi(t) = \varphi(t_{i-1}) + \varphi'(t_{i-1})) \cdot (t - t_{i-1})$ koji odgovara odsječku $[t_{i-1}, t_i]$. Ta dužina iznosi $|\vec{\varphi}'(t_{i-})| \cdot (t_i - t_{i-1})$. Integralna suma je približno jednaka

$$f(\varphi(\xi_1)) \cdot |\vec{\varphi}'(t_0)| \cdot (t_1 - t_0) + \cdots + f(\varphi(\xi_k)) \cdot |\vec{\varphi}'(t_{k-1})| \cdot (t_k - t + k - 1)$$

a ova suma konvergira ka $\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}'(t)| dt$. Dakle, krivolinijski integral skalarnog polja (funkcije) f po krivoj γ možemo definisati i kao graničnu vrijednost integralnih suma $\sigma(f, \mathcal{M}, K)$ kada dijametar podjele teži ka nuli.

Posmatrajmo opet krivu γ, podjelu $\mathcal{M}$ realizovanu pomoću tačaka $M_0 = (x_0, y_0, z_0), M_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, M_k = (x_k, y_k, z_k)$, izbor tačaka K iz prethodnog primjera i vektorsko polje $\vec{A} : D \to V^3$, definisano na skupu D koji sadrži krivu γ. Neka je za $M \in D$ $\vec{A}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$. Za podjelu $\mathcal{M}$ i izabrane tačke K formirajmo integralnu sumu

$$\sigma(\vec{A}, \mathcal{M}, K) = P(K_1)\Delta x_1 + Q(K_1)\Delta y_1 + R(K_1)\Delta z_1 + \cdots + P(K_k)\Delta x_k + Q(K_1)\Delta y_k + R(K_k)\Delta z_k,$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Može se dokazati da je granična vrijednost integralnih suma kada dijametar podjele Δ teži ka nuli jednaka integralu

$$\int\int P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz = \int_\varphi \vec{A}(x, y, z) d\vec{s}.$$

Skica dokaza ove činjenice izgleda ovako. Neka je glatki put $\varphi : [a, b] \to R^3$ parametrizacija krive γ pri čemu je $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$. Podjeli $\mathcal{M}$ krive γ odgovara podjela odsječka $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$, gdje je $t_i = \varphi^{-1}(M_i$. Tačkama K_i sa krive γ odgovaraju tačke $\xi_i = \varphi^{-1}(K_i)$ sa odsješka $[a, b]$. U integralnoj sumi veličine $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}), \Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}), \Delta z_i = z(t_i) - z(t_{i-1})$ možemo zamijeniti sa $x'(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}), y'(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}), z'(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$. Tako integralnu sumu zamjenjujemo sa

$$\sum_{i=1}^{k} (P(\varphi(\xi_i) \cdot x'(\eta_i) + Q(\varphi(\xi_i) \cdot y'(\eta_i) + R(\varphi(\xi_i) \cdot z'(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}). \tag{3}$$

Kada dijametar Δ teži ka nuli onda i $\max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq k\}$ teži ka nuli i suma (3) konvergira ka integralu

$$\int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q((x(t), y(t), z(t))y'(t) + R((x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

koji je jednak $\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{s}$. To znači da se krivolinijski integral vektorskog $\vec{A}$ po krivoj γ može definisati i kao graničnu vrijednost integralnih suma (4) kada dijametar podjele teži ka nuli.

Definisali smo krivolinijske integrale po glatkom putu i napisali formule za njihovo računanje. Definicije pa dakle i formule za računanje se lako prenose na integraciju po dio po dio glatkom putu. Tako ako je $\varphi : [a,b] \to R^3$ dio po dio glatki put koji se sastoji od glatkih puteva $\varphi_i : [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \to R^3, i = 1, \dots, k$, onda integrale skalarnog odnosno vektorskog polja po putu φ definišemo sledećim formulama

$$\int_\varphi f(x,y,z)ds := \int_{\varphi_1} f(x,y,z)ds + \cdots \int_{\varphi_k} f(x,y,z)ds,$$

$$\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{s} := \int_{\varphi_1} \vec{A}(x,y,z)d\vec{s} + \cdots \int_{\varphi_k} \vec{A}(x,y,z)d\vec{s}.$$

Istaknimo i da se definicije integrala skalarnog i vektorskog polja odnosno definicije krivolinijskog integrala prve i druge vrste prirodno i jednostavno prenose na integraciju po putu u R^n. Naime, ako je $\vec{A} : D \to V^3, f : D \to R$, gdje je $D \subseteq R^n$ skup koji sadrži nosač glatkog puta $\varphi : [a,b] \to R^n$, integrali vektorskog polja $\vec{A}$ i skalarnog polja f po putu φ definišu se i računaju po sledećim formulama

$$\int_\varphi \vec{A}(x^1, x^2, \dots, x^n) \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{A}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt =$$

$$\int_a^b A_1(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))x_1'(t)dt + \cdots + \int_a^b A_n(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))x_n'(t)dt,$$

$$\int_\varphi f(x^1, x^2, \dots, x^n) \cdot ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}'(t)|dt =$$

$$\int_a^b f(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \cdot \sqrt{(x^{1\prime}(t))^2 + (x^{2\prime}(t))^2 + \cdots + (x^{n\prime}(t))^2}dt$$

U gornjim formulama sa $A_1, \dots, A_n$ označene su komponente vektorskog polja $\vec{A}$ a sa $x^1(t), \dots, x^n(t), t \in [a,b]$, komponente puta φ.

Primjer 1. Izračunaćemo integral $I = \int_k (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, gdje je k luk parabole $y = x^2$ od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.

Imamo već datu parametrizaciju kriv$ek : x = t, y = t^2$. Slijedi da je

$$I = \int_{-1}^1 [(t^2 - 2t^3) + (2t^5 - 4t^4)]dt = 2\frac{1}{3} - 4 \cdot 2\frac{1}{5} = -\frac{14}{15}.$$

Primjer 2. Izračunaćemo integral $I = \int_k \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, gdje je k kontura kvadrat s tjemenima $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ i $D(0,-1)$. Kriva k je dio po dio glatka, djelove maožemo parametrizovati na sljedeći način: $AB : x = t, y = 1-t, t \in [1,0]; BC : x = t, y = t+1, t \in [0,-1]; CD : x = t, y = -1-t, t \in [-1,0]; DA : x = t, y = t-1, t \in [0,1]$, $|x| + |y| = 1$ na svakoj od ovih duži, pa integral I možemo napisati u obliku:

$$I = \int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + y|} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} =$$

$$\int_1^0 (1-1)dt + \int_0^{-1} (1+1)dt + \int_{-1}^0 (1-1)dt + \int_0^1 2dt = 0.$$

2. Veza između krivolinijskog integrala skalarnog i vektorskog polja. Zamjena parametra. Osnovna svojstva krivolinijskih integrala.

Pošto smo definisali integral vektorskog i integral skalarnog polja prirodno je postaviti pitanje*:* kada ovi integrali postoje. Međutim, ovi integrali su definisani posredstvom integrala funkcije jedne realne promjenljive, pa, primjenjujući rezultate o integrabilnosti funkcije, možemo zakjlučiti da je neprekidno vektorsko polje $\vec{A}$ (neprekidno skalarno polje f) definisano na skupu D koji sadrži nosač dio po dio glatkog puta φ, integrabilno po φ. Primjenjujući Lebegovu teoremu mogu se izvesti precizniji uslovi integrabilnosti skalarnog odnosno vektorskog polja. Mi se nećemo dalje baviti ovim pitanjem.

U sledećoj teoremi se utvrđije veza između krivolinjskih integrala prve i druge vrste.

Teorema 1.*Neka je* $\varphi : [a,b] \to R^3$ *glatki put i* $\vec{A} : D \to V^3$ *vektorsko polje definisano na skupu* D *koji sadrži* $\varphi([a,b])$. *Tada je*

$$\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{s} = \int_{varphi} F(x,y,z)ds, \qquad 4$$

gdje je $F(x,y,z) = \vec{A}(x,y,z) \cdot \vec{T}_\varphi(x,y,z), (x,y,z) \in \gamma = \varphi([a,b])$.

Dokaz. Na osnovu definicija integrala vektorskog odnosno skalarnog polja po putu φ, slijedi da važi sledeći lanac jednakosti:

$$\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{s} = \int_a^b (\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt = \int_a^b \vec{A}(\varphi(t)) \cdot \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|} =$$

$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}'(t)|dt = \int_a^b F(x,y,z)ds.$$

Dokaz je završen. Jasno je da jednakost (4) važi pod pretpostavkom da integrali na lijevoj i desnoj strani jednakosti postoje. Smisao iskaza u teoremi je da ako postoji jedan od ova dva integrala onda postoji i drugi i važi jednakost (4). Druga napomena u vezi sa jednakošću (4) je da ona, uz mala dodatna objašnjenja, važi i kada je put $\varphi : [a,b] \to R^3$ dio po dio gladak. Naime, funkcija F tada nije definisana u konačno mnogo tačaka krive γ-to su tačke u kojima ne postoji tangenta krive. Međutim, vrijednosti podintegralne funkcije F u tih konačno mnogo tačaka ne utiču na vrijednost integrala i uz takvo shvatanje jednakost (4) važi i za dio po dio glatke puteve. Pri tome se integracija po dio po dio glatkom putu (i na lijevoj i na desnoj strani jednakosti (4) svodi na zbir integrala po glatkim djelovima. Na kraju istaknimo da jednakost (4) možemo pisati u obliku

$$int_\varphi \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_\varphi \vec{A} \cdot \vec{T}_\varphi ds.$$

Koordinate jediničnog vektora tangente $\vec{T}_\varphi$ su kosinusi uglova koji taj vektor zahvata sa koordinatnim osama. Ako te uglove označimo sa α, β, γ a komponente polja $\vec{A}$ sa P, Q i R, onda integral polja $\vec{A}$ po putu φ možemo pisati u obliku

$$\int_\varphi \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_\varphi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds.$$

Kao što je nekoliko puta isticano, različiti putevi mogu kao nosač imati jednu te istu krivu. Prirodno je postaviti pitanje: da li su integrali vektorskog odnosno skalarnog polja po takvim putevima jednaki? Ako bi odgovor bio pozitivan onda bismo umjesto da govorimo o integralu po putu mogli govoriti o integralu po krivoj. Odgovor se može naslutiti iz primjera u kojima se vidi da se integral skalarnog polja pojavljuje kada se računa ukupna masa materije koja je raspoređena po krivoj te da se integral vektorskog polja pojavljuje kada se izračunava rada sile na putu. Može se dakle, očekivati da integral skalarnog polja ne zavisi od toga kako je kriva paramertizovana a da će integral vektorskog polja promijeniti znak ako se pređe na parametrizaciju koja će promijeniti orjentaciju krive. To uostalom sugeriše i formula $\int_\varphi \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\varphi \vec{A}\cdot \vec{T}_\varphi ds$, jer će se u integralu na desnoj strani ove jednakosti promjenom orjentacije krive promijeniti smjer jediničnog vektora tangente, odnosno podintegralna funkcija će promijeniti znak. Razmatranja se preciziraju u sledećoj teoremi.

Teorema 2. *Neka su $\varphi : [a,b] \to R^3$ i $\psi : [c,d] \to R^3$ glatki putevi čiji je nosač kriva γ i neka skup $D \subseteq R^3$ sadrži krivu γ.*

a) Ako je $f : D \to R$ skalarno polje onda je $\int_\varphi f ds = \int_\psi f ds$;

b) Ako je $\vec{A} : D \to V^3$ vektorsko polje onda je $\int_\varphi \vec{A}\cdot d\vec{s} = \epsilon(\varphi,\psi)\cdot \int_\psi \vec{A}\cdot d\vec{s}$, gdje je $\epsilon(\varphi,\psi) = 1$ ako su putevi φ i ψ ekvivalentni i $\epsilon(\varphi,\psi) = -1$ ako putevi φ i ψ nijesu ekvivalentni.

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $\alpha : [c,d] \to [a,b], \alpha(\tau) = \varphi^{-1}(\psi(\tau))$ pomoću koje je izvršena promjena parametra odnosno pomoću koje je izvršen prelaz sa parametrizacije φ na parametrizaciju $\psi = \varphi\circ\alpha$. Tada je $\psi'(\tau) = \varphi'(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)$

$$\int_\psi f\cdot ds = \int_c^d (\psi(\tau))\cdot|\vec{\psi}'(\tau)|d\tau = \int_c^d (\varphi(\alpha(\tau)))\cdot|\vec{\varphi}'(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)|d\tau =$$

$$\int_\psi \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_c^d \vec{A}(\psi(\tau))\cdot\vec{\psi}'(\tau)d\tau = \int_c^d \vec{A}(\varphi(\alpha(\tau)))\cdot\vec{\varphi}'(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)d\tau$$

Uvedimo novu promjenljivu $\tau = \alpha(t)$. Razlikovaćemo dva slučaja. Ako su putevi φ i $\psi = \varphi\circ\alpha$ ekvivalentni onda je $\alpha'(\tau) > 0$ na $[c,d], \alpha(c) = a, \alpha(d) = b$ i važe sledeće jednakosti

$$\int_c^d f(\varphi(\alpha(\tau)))\cdot|\vec{\varphi}'(\tau)\alpha'(\tau)|d\tau = \int_c^d f(\varphi(\alpha(\tau)))\cdot|\vec{\varphi}'(\tau)|\alpha'(\tau)d\tau =$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot|\vec{\varphi}'t|dt = \int_\varphi f ds,$$

$$\int_c^d \vec{A}(\varphi(\alpha(\tau)))\cdot\vec{\varphi}'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)d\tau = \int_a^b \vec{A}(\varphi(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)\cdot dt = \int_\varphi \vec{A}\cdot d\vec{s}.$$

Ako putevi φ i ψ nijesu ekvivalentni onda je $\alpha'(\tau) < 0$ na $[c,d],\ \alpha(c) = b, \alpha(d) = a$ i važi

$$\int_c^d f(\varphi(\alpha(\tau)))\cdot|\vec{\varphi}'(\tau)\alpha'(\tau)|d\tau = \int_c^d f(\varphi(\alpha(\tau)))\cdot|\vec{\varphi}'(\tau)|(-\alpha'(\tau))d\tau =$$

$$-\int_b^a f(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}' t| dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\vec{\varphi}' t| dt = \int_\varphi f ds,$$

$$\int_c^d \vec{A}(\varphi(\alpha(\tau))) \cdot \vec{\varphi}'(\alpha(\tau)) \alpha'(\tau) d\tau = \int_b^a \vec{A}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) \cdot dt = -\int_a^b \vec{A}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) \cdot dt = -\int_\varphi \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Teorema je dokazana.

Jasno je da tvrđenje važi i kada se radi o integraciji po putevima čiji je nosač dio po dio glatka kriva.

U dijelu koji se odnosi na krivolinijski integral prve vrste teorema tvrdi da se može govoriti o integraciji polja po krivoj, jer je svejedno kako je kriva parametrizovana. To je uobičajeni termin. Parametrizacija krive postaje važna tek kada se postavi pitanje izračunavanja integrala a onda se ima potpuna sloboda izbora parametra. Što se tiče integracije vektorskog polja promjenom parametrizacije može se (ali ne mora) promijeniti znak integrala. Eventualana promjena znaka je vezana za izbor parametrizacije koja mijenja orjentaciju krive. Tako se o krivolinijskom integralu vektorskog polja može govoriti kao o integralu po orjentisanoj krivoj, i to je uobičajeno. U oznakama integrala se umjesto $\int_\varphi$ piše $\int_\gamma$ a kada se radi o integralu vektorskog polja onda se dodatnim oznakama naglasi kako je kriva γ orjentisana. Specijalno, kada se radi o integraciji po zatvorenoj (dio po dio glatkoj) krivoj koja leži u ravni koriste oznake $\oint_\gamma f$.

Istaknimo sledeća svojstva krivolinijskih integrala.

1. $\int_\gamma (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)) ds = \alpha \int_{gamma} f(x,y,z) ds + \beta \int_\gamma g(x,y,z) ds.$

1'. $\int_{\gamma^+} (\alpha \vec{A}(x,y,z) + \beta \vec{B}(x,y,z)) d\vec{s} = \alpha \cdot \int_{\gamma^+} \int (\vec{A}(x,y,z) d\vec{s} + \beta \cdot \int_{\gamma^+} \vec{B}(x,y,z)) d\vec{s},$

2. $|\int_\gamma f(x,y,z) ds| \leq \int_\gamma |f(x,y,z)| ds.$

2'. $|\int_\gamma \vec{A}(x,y,z) ds| \leq \int_\gamma |\vec{A}(x,y,z)| ds.$

3. Ako je f neprekidna na γ, onda postoji $M \in \gamma$ tako da je $\int_\gamma f(x,y,z) ds = f(M) \cdot l(\gamma)$.

U svojstvima 2. i 2'. oznaka γ^+ je korišćena da se naglasi da se integral računa po orjentisanoj krivoj. Gornja svojstva se jednostavno dokazuju oslanjajući se na definicije i odgovarajuća svojstva integrala funkcije jedne realne promjenljive.

Na kraju dajemo i nekoliko primjera primjene krivolinijskih integrala. Formule koje ćemo pisati izvode se po shemama sličnim onima koje smo koristili u prethodnoj glavi kada smo govorili o prrimjeni integrala.

Primjer 1. Neka je po krivoj γ raspoređena materija sa linijskom gustinom $\rho(x,y,z), (x,y,z) \in \gamma$. Ukupna masa takve krive γ iznosi $\int_\gamma \rho(x,y,z) ds$. Specijalno, dužina $l(k)$ krive jednaka je $\int_k ds$. Krivolinijski integral se, dakle, može koristiti za izračunavanje mase materije raspoređene po γ. Koordinate težišta iste krive γ računaju se po formulama

$$x_c = \frac{\int_\gamma x\rho(x,y,z) ds}{\int_\gamma \rho(x,y,z) ds}, y_c = \frac{\int_\gamma y\rho(x,y,z) ds}{\int_\gamma \rho(x,y,z) ds}, z_c = \frac{\int_\gamma y\rho(x,y,z) ds}{\int_\gamma \rho(x,y,z) ds},$$

momenti inercije u odnosu na koordinatne ose

$$I_x = \int_\gamma (y^2 + z^2) \rho(x,y,z) ds, I_y = \int_\gamma (z^2 + x^2) \rho(x,y,z) ds, I_z = \int_\gamma (x^2 + y^2) \rho(x,y,z) ds.$$

2). Ako je $\vec{\gamma}$ orjentisana kriva a $\vec{F}$ sila uslijed čijeg djelovanja se materijalna tačka mase m pomjera duž krive $\vec{\gamma}$ i to od njenog početka do njenog kraja, onda se rad sile $\vec{F}$ računa po formuli $A = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{s}$. Ako je kriva γ parametrizovana pomoću glatkog puta $\varphi : [a,b] \to R^3$ i $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{v}', \vec{v} = \varphi'$, onda je

$$A = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt = m \cdot \int_a^b \vec{v}' \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} \cdot (|\vec{v}|^2|_a^b = \frac{m}{2} \cdot (v(a)^2 - v(b)^2.$$

Primjer 1. Neka je k glatka kontura i $\vec{a}$ proizvoljan jedinični vektor. Izračunati $\int_k \cos(\vec{a}, vecn)ds$, gdje je n spoljašanja jedinična normala na konturu k.

Rješenje. Imamo da je $\cos(\vec{a},\vec{n}) = \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle$. Označimo sa $\vec{T}$ jedinični vektor tangente na konturu k. Koordinate jediničnih vektora su kosinusi uglova koje ti vektori zahvataju sa koordiantnim osama. Ako uglove vektora $\vec{a}$ sa koordiantnim osama označimo sa α_0 i β_0, a promjenljive uglove vektora $\vec{n}$ sa koordinatnim osama sa α i β, tada imamo (vidjeti Primjer 3 iz dijela koji se odnosi na krivolinijski integral skalarnog polja)

$$\int_k \cos(\vec{a},\vec{n})ds = \int_k \cos\beta_0 dx + \cos\alpha_0 dy = \int_k d(\frac{\beta_0}{2}x^2 + \frac{\alpha_0}{2}y^2) = 0.$$

Primjer 2. Izračunati integrale

$I = \int_k ydx + xdy$, po krivoj k koja spaja tačke $O(0,0)$ i $A(1,1)$, ako je k (a) duž koja spaja tačke $O(0,0)$ i A (b) kraći luk kružnice radijusa 1 sa centrom u tački $C(0,1)$, (c) proizvoljna dio po dio glataka kriva koja spaja ove dvije tačke.

Rješenje. (a) Imamo parametrizaciju krive $k : x = t, y = t, t \in [0,1]$. Tada je $I = \int_0^1 (t+t)dt = 1$. (b) Jednačina kružnice k u ovom slučaju je $(x-1)^2 + y^2 = 1$, a jedna parametrizacija krive $k : x = \cos t, y = 1 + \sin t, t \in [-\pi/2, 0]$. Tada je

$$I = \int_{-\pi/2}^0 [(1+\sin t)(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t)]dt = \int_{-\pi/2}^0 (-\sin t - \sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_{-\pi/2}^0 (\sin t + \cos 2t) =$$

(c) Riješićemo opštiji zadatak. Izračunaćemo $\int_k P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$, gdje je k kriva koja spaja tačke A i B, u slučaju kada je podintegralni izraz potpuni diferencijal, tj. kada je $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z)$, gdje je u realna diferencijabilna funkcija u nekoj oblasti D koja sadraži krivu k. Imamo da ako je parametrizacija krive k data sa $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ tada je

$$\int_k P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \int_k du(x,y,z) = \int_\alpha^\beta [u'_x(x(t),y(t),z(t))x'(t)+u'_y(x(t),y($$

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(u(x(t),y(t),z(t))) = u(x(\beta),y(\beta),z(\beta)) - u(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha) = u(B) - u(A).$$

Ako je sada k dio po dio glatka kriva koja se sastoji od glatkih djelova $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, pri čemu je $A_0 \equiv A, A_n \equiv B$, tada je

$$\int_k = f(A_1)-f(A_0)+f(A_2)-f(A_1)+\cdots+f(A_n)-f(A_{n-1} = f(A_n)-f(A_0) = f(B)-f(A).$$

Primijetimo da rezultat zavisi od toga koje su krajnje tačke krive k, a ne od izbora same krive koja ih spaja, niti od parametrizacije te krive. Ako je pri tome još k zatvorena kriva, tada je odgovarajući integral jednak 0. Zbog toga je u slučaju (c), $\int_k ydx + xdy = \int_k d(xy) = xy_{(1,1)} - xy_{(0,0)} = 1$.

Uslov $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z)$ može se zapisati u obliku $P(x,y,z) = u'_x(x,y,z), Q(x,y,z) = u'_y(x,y,z), R(x,y,z) = u'_z(x,y,z)$.

Za vektorsko polje $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ koje zadovoljava prethodne uslove u nekoj oblasti D, kažemo da je *potencijalno* u toj oblasti, a za odgovarajuću funkciju (tj skalarno polje u) kažemo da je potencijal polja $\vec{A}$.

Primijetimo da se u slučaju ravanskog polja $\vec{A} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ uslov postojanja potencijal u polja $\vec{A}$ glasi $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, and $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, odakle se, ako su parcijaln izvodi funkcija P i Q neprekidni, diferenciranjem prve jednakosti po y a druge po x, dobija neophodan uslov potencijalnosti (tj. uslov nezavisnoti integral od puta) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Postavlja se pitanje da li je taj uslov dovoljan. Ovaj uslov ćemo kasnije dodatno komentarisati. Za sada napomena da je taj uslov dovoljnan ako je oblast D u kojoj je taj uslov ispunjen jednostruko povezana. navodimo i dva primjera.

Primjer 3. Posmatrajmo integral $I = \int_k \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. U ovom slučaju je $P = -\frac{y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, pa je za svako $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Medjutim, posmatrani integral po bilo kojoj kružnici sa centrom u tački $O(0,0)$, orijentisanoj suprotno kretanju kazaljke na satu, koja je parametrizuje jednačinama $x = R\cos t, y = R\sin t, t \in [0, 2\pi]$ jednak je

$$I = \int_k \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t}{R^2} dt = 2\pi.$$

Dakle, iako je ispunjen uslov $\partial P \partial y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ imamo da integral zavisi od puta integracije. Razlog je činjenica da je tačka $O(0,0)$ singularna tačka polja $\vec{A}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, odnosno oblast $D = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ u kojoj su parcijalni izvodi funkcija P i Q neprekidni nije jednostruko povezana.

Primjer 4 Izračunaćemo integral $I = \oint_k \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ orijentisna suprotno kretanju kazaljke na satu.

Rješenje. Jedna od paramatrizacija k koja definiše orijentaciju suprotnu kretanju kazaljke na satu je $x = a\cos t, y = a\sin t, t \in [0, 2\pi]$. Dobijamo da je

$$I = \int_0^{2\pi} [\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \frac{a\cos t}{a^2} a\cos t]dt = 2\pi.$$

Primjer 5. U fizici se razmatra tzv. Gausov integral $g = \int_k \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|} ds$, gdje je $\vec{r}$ vektor $\vec{AM}$ koji spaja tačku $A(x_0, y_0)$ sa promjenljivom tačkom $M(x,y)$ na glatkoj zatvorenoj krivoj k, koja ne sadrži tačku A, a $\vec{n}$ vektor normale na krivu k u tački M. Predstavimo ovaj integral kao integral vektorskog polja. Primijetimo da je

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \pm\frac{\langle\vec{r},\vec{n}\rangle}{|\vec{r}} = \frac{(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta}{|\vec{r}|},$$

gdje su $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ kosinusi pravca vektora $\vec{n}$, pi čemi znak $+$ odgovara jednom ila znak $-$ drugom izboru neprekidnog polja normala na krivu k. Odavde slijedi da je

$$g = \pm\int_k \frac{y-y_0}{|vecr|^2}dx - \frac{x-x_0}{|vecr|^2}dy$$

Pri tome su funkcije $P = \frac{y-y_0}{|vecr|^2}$ i $Q = -\frac{x-x_0}{|vecr|^2}$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima u svakoj tački osim u tački A, i u svakoj tački različtoj od A, važi $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.Odavdeslijedidaakokriva4k$ ne obuhvata tačku A, tada je $g = 0$.

Ako pak kriva k obuhvata tačku A, tada se kriva k može parametrizovati na sljedeći način: $x = x_0 + R(t)\cos t, y = y_0 + R(t)\sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Tada je

$$g = \pm\int_0^{2\pi}[\frac{R(t)\sin t(R'(t)\cos t - R(t)\sin t)}{R^2(t)} - \frac{R(t)\cos t(R'(t)\sin t + R(t)\cos t)}{R^2(t)}]dt = \pm\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^2(t)}[I$$

Za krivu k koja obuhvata tačku $A(x_0,y_0)$ sa noramalma usmjerenim na spoljnju stranu, imamo $g = 2\pi$.

Napomenimo da Gausov integral ima geomettisjki smisao: g je mjera ugla pod kojim se iz tačke A vidi kriva k (uračunavajući da se ugao koji se opisuje radijus vektorom iz tačke A, pri obilasku krive računa sa znakom). Izračunaćemo $\lim_{d(D)\to 0}\frac{1}{S}\oint_k\langle\vec{F},\vec{n}\rangle ds$, gdje je S površina oblasti D, ograničene konturm k, koju okružuje tačku $A(x_0,y_0)$, $d(D$ dijametra oblasti D, $\vec{n}$

Primjer 6. Izračunaćemo integrale $I_1 = \int_k(x^2-y^2)dx$ i $I_2 = \int_k(x^2-y^2)dy$ gdje je k dio parabole $y = x^2$ od tačke $O(0,0)$ do tačke $A(2,4)$

Rješenje. Primijetimo da je u opštem sluăcaju, kada je kriv k po kojoj se integrali grafik funkcije $y = \varphi_1(x)$, od tačke $A(\alpha_1,\varphi(\alpha_1)$ do tačke $B(\beta,\varphi(\beta_2)$, odnosno ako je jednačina krive k: $x = \varphi_2(y), y \in [\alpha_2,\beta_2]$, tada su odgovarajući integrali

$$J_1 = \int_k f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(x,\varphi_1(x))dx \text{ odnosno } J_2 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(\varphi_2(y),y)dy.$$

Primjenjujući ove formule, dobijamo da je

$$I_1 = \int_0^2(x^2-x^4)dx = -\frac{56}{54},\ I_2 = \int_0^4(y-y^2)dy = -\frac{40}{3}.$$

3. Grinova formula.

U teoriji polja široku primjenu ima Grinova formula koja povezuje rad vektorskog polja po konturi γ i dvostruki integral po oblasti ograničenoj tom konturom.

Teorema 3. *Neka je $D \subseteq R^2$ oblast ograničena konturom γ. Ako su funkcije $P : \Omega \to R$ i $Q : \Omega \to R$ neprekidno-diferencijabilne na skupu Ω koji sadrži $D \cup \gamma$, onda važi Grinova formula*

$$\int\int_D (\partial_1 Q(x,y) - \partial_2 P(x,y))dxdy = \oint_{\gamma^+} Pdx + Qdy,$$

pri čemu je u integralu na desnoj strani kriva γ orijentisana suprotmo kretanju kazaljke na satu, tj. tako da obilazeći krivu γ oblast D ostaje sa lijeve strane.

Dokaz. Neka je vektorsko polje $\vec{A}$ definisano formulom $\vec{A}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}, (x,y) \in \Omega$. Tada je $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, gdje je $\vec{A}_1 = P(x,y)\vec{i}, \vec{A}_2 = Q(x,y)\vec{j}$. Pretpostavimo da je oblast D elementarna u odnosu na koordinatne ose, tj. da je $D = \{(x,y) : \alpha \leq x \leq \beta, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$, gdje su f_1 i f_2 neprekidne funkcije. Tada je $\gamma^+ = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 + \vec{\gamma}_3 + \vec{\gamma}_4$. gdje znak " + " označava nadovezivanje krivih, a $\vec{\gamma}_i$ označava orjentisanu krivu pri čemu je orjentacija naslijeđena od konture γ. Imamo da je $\gamma_1 = \{(x, f_1(x) : x \in [\alpha, \beta]], \gamma_2 = \{(\beta, y) : y \in [f_1(\beta), f_2(\beta)]\}, \gamma_3 = \{(x, f_2(x) : x \in [\alpha, \beta]\}, \gamma_4 = \{(\alpha, y) : y \in [f_1(\alpha), f_2(\alpha)]\}$. Slijedi da važe sledeće formule

$$\int_{\vec{\gamma_1}} \vec{A}_1 d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma_1}} P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P(x, f_1(x)dx,$$

$$\int_{\vec{\gamma_2}} \vec{A}_1 d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma_1}} P(x,y)dx = 0$$

$$\int_{\vec{\gamma_3}} \vec{A}_1 d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma_1}} P(x,y)dx = -\int_\alpha^\beta P(x, f_2(x)dx,$$

$$\int_{\vec{\gamma_4}} \vec{A}_1 d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma_1}} P(x,y)dx = 0.$$

Odavde slijedi da je

$$\oint_\gamma Pdx = \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_\alpha^\beta P(x, f_1(x))dx - \int_\alpha^\beta P(x, f_2(x))dx =$$

S druge strane, koristeći Fubinjevu teoremu, imamo

$$\int\int_D \partial_2 P(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta (\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (\partial_2 P(x,y)dy)dx =$$

$$\int_\alpha^\beta (P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)))dx = -\oint_{\gamma^+} \vec{A}_1 d\vec{s} = -\oint_{\gamma^+} P(x,y)dx.$$

Slično se dokazuje da je

$$\int_D \partial_1 Q(x,y))dxdy = \oint_{\gamma^+} \vec{A}_2 d\vec{s} = \oint_{\gamma^+} Q(x,y)dy.$$

Oduzimajući od poslednje formule prethodnu dobijamo

$$\int_D \partial_1 Q(x,y))dxdy - \int_D \partial_2 P(x,y))dxdy == \oint_{\gamma^+} \vec{A}_2 d\vec{s} + \oint_{\gamma^+} \vec{A}_1 d\vec{s} = \oint_{\gamma^+} \vec{A} d\vec{s}.$$

Grinova formula je dokazana za slučaj kada je oblast elementarna. Ako se, na primjer, krivom γ', oblast D dijeli na dvije proste oblasti D_1 i D_2 i ako se za svaku od ovih podobalsti napiše Grinova formula, pa se odgovarujeće jednakosti saberu, onda će se krivolinijski integrali $\int \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int Pdx + Qdy$ po krivoj γ' jedanput pojaviti sa znakom "$+$" a jedanput sa znakom $-$". Oni će se dakle poništiti i dobićemo da i u ovom slučaju važi Grinova formula

$$\int \int_D (\partial_1 Q(x,y) - \partial_2 P(x,y))dxdy = \oint_{\gamma^+} Pdx + Qdy,$$

Napomena 1. Grinova formula važi i ako se pretpostavi da je polje $\vec{A}$ neprekidno u zatvorenoj oblasti $\bar{D} = \cup\gamma$, neprekidno diferencijabilno u oblasti D i postoji integral $\int\int_D (\partial_1 Q(x,y) - \partial_2 P(x,y))dxdy$.

Napomena 2. Grinova formula važi i ako je oblast D višestruko povezana. Preciznije, ako su $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ konture takve da a) nikoje dvije od njih nemaju zajedničkih tačaka; b) kontura Γ obuhvata konture $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$; c) ni jedna od kontura $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ ne obuhvata drugu i ako je D oblast koja se nalazi unutar konture Γ a izvan kontura $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ onda važi jednakost

$$\int \int_D (\partial_1 Q(x,y) - \partial_2 P(x,y))dxdy = \oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + \oint_{\gamma_1^-} Pdx + Qdy + \cdots + \oint_{\gamma_k^-} Pdx + Qdy,$$

koja se često zapisuje u obliku

$$\int \int_D (\partial_1 Q(x,y) - \partial_2 P(x,y))dxdy = \oint_{\partial D^+} Pdx + Qdy,$$

gdje je "∂D^+" granica oblasti orjentisana tako da oblast D prilikom obilaska granice ostaje sa lijeve strane.

Dokaz gornje formule se izvodi tako što se konture γ_i dopunkskim krivim linijama γ_i spoje sa konturom Γ, tako da sve ove krive linije ograničavaju jednostruko povezanu oblast. Primjenjući Grinovu formulu na tako dobijenu oblast i uočavajući da se integrali po γ_i poništavaju, dobijamo gornju formulu.

Posmatrajmo ponovo jednostruko povezanu oblast $D \subseteq R^2$ i pretpostavimo da su u njoj definisane funkcije P i Q kioje su neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Postavimo ponovo pitanje: koji uslov treba da zadovoljavaju funkcije P i Q da bi krivoliniski integral $\in_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ po bilo kojoj konturi k koja leži u D bio jednak nuli. Ranije smo izveli neophodni uslov koji je glasio: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Sada, ako sa G označimo oblast ograničenu konturom k i primijenimo Grinovu formulu, dobijamo da ako je ovaj uslov ispunjenm, tada je

$$\int_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy 0 \int \int_G (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Odavde slijedi da bi integral $\int_k Pdx + Qdy$ po proizvoljnoj zatvorenoj konturi koja leži u jednostruko povezaoj poblasti D bio jednak nuli, dovoljno je da bude ispunjen uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Kako je ovaj uslov i neophodan, zaključujemo da integral $\int_{AB} Pdx + Qdy$ po krivoj koja čiji je početak tačka A a kraj tačka B ne zavisi od oblika te krive, već samo oda tačaka A i B.

Primjer 1. Neka je k glatka kontura i $\vec{n}$ (promjenljivi) jedinični vektor normale na k. Izračunati integral $I = \int_k [x\cos(\vec{n}, \vec{i}) + y\sin(\vec{n}, \vec{j}]ds$.

Rješenje. Napišimo gornji integarl kao integral vektroskog polja i primijenimo Grinovu teoremu. Imamo da je

$$I = \int -ydx + xdy = 2\int_D dxdy = 2S(D),$$

gdje je $S(D)$ površina obalsti D koaj je ograničena krivom k.

Primjer 2. Izračunati $\int_\Gamma x^2dy - xy^2dy$ gdje je je Γ kružnica $x^2 + y^2 = R^2$ orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu.

Rješenje. Koristeći Grinovu teoremeu imamo da je $I = \int\int_D (x^2 + y^2)dxdy$ gdje je D krug $x^2 + y^2 \leq R^2$. Prelazći na polarne koordinate, dobijamo dalje da je

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = -\frac{\pi R^4}{2}.$$

Primjer 3. izračunati krivolinijski integral $I = \int_{AmO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$, gdje je AmO gornja polukružnica $x^2 + y^2 = ax$ koja se obilazi od tačke $A(a, 0)$ do tačke $O(0, 0)$.

Rješenje. Primijetimo da računamo integral vektorskog polja $\vec{A} = (e^x \sin y - my)\vec{i} + e^x \cos y - m)\vec{j}$. Dopunimo krivu AmO do zatvorene krive k, dodavnjem duži OA (arametrizaija te krive $x = t, y = 0, t \in [0, a]$) i integral po toj duži označimo sa I_1. Orijentiťanju kazaljke na satu i primijenimo Grinovu teoremu na integral po krivoj k. Tada, ako je D obalst ograničenak krivom k, važi:

$$I+I_1 = \int_{AmO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy + \int_{OA}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = \int\int_D md$$

Pri tome je $I_1 = 0$, jer je skalarni proizvod vektora $\vec{A}(x(t), y(t))$ i $x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ jednak nuli. Dakle, $I = \frac{m\pi a^2}{8}$.

Primjer 4. Izračunaćemo $\lim_{d(D)\to 0} \frac{1}{S} \oint \langle \vec{F}, \vec{n}\rangle ds$, gdje je S površina oblasti D ograničene konturom k, koja okružuje tačku $A(x_0, y_0)$, $d(D)$ dijameter oblasti D, $\vec{n}$-jedinični vektor spoljašnej noramle konture k i $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ vektorsko polje koje je neprekidno -diferencijabilno u $D \cup k$.

Prvo primijetimo da je

$$I = \oint |_k \langle \vec{F}, \vec{n}\rangle ds = \oint_k -Qdx + Pdy,$$

a odavde, primjenom Grinove formule dobijamo

$$I = \int\int_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) dxdy.$$

Kada $d(D) = \rightarrow 0$, tada se kontura k steže na tačku, pa primjenom teoreme o srednjoj vrijednosti i zbog neprekidnosti podintegtralne funkcije dobijamo

$$\lim_{d(D)\to 0} \frac{1}{S} \oint \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle ds = \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x:0, y_0)}{\partial y}.$$

§2 Površinski integrali

U ovom dijelu ćemo razmotriti integraciju skalarnog odnosno vektorskog polja po površima u R^3. Mi smo u prethodnoj glavi definisali površ i razmotrili nogućnosti primjene integrala u vezi sa nekim zadacima vezanim za površi. Ti primjeri (ukupna masa materije raspoređene po određenoj površi i protok fluida kroz površ) mogu poslužiti kao osnovni primjer i za ilustraciju pojma integrala skalarnog odnosno vektorskog polja.

1. Definicija površinskog integrala

Definicija 1. *Neka je $\varphi : \Omega \to S$ glatka karta elementarne glatke površi S i $f : D \to R$ skalarno polje definisano na skupu D koji sadrži površ S. Tada integral polja f po karti φ, koji označavamo sa $\int\int_\varphi f(x, y, z)dS$, definišemo sledećom formulom*

$$\int\int_\varphi f(x, y, z)dS := \int\int_\Omega f(\varphi(u, v))|\partial_1\vec{\varphi}(u, v) \times |\partial_2\vec{\varphi}(u, v)|dudv$$

Može se dogoditi da integral na desnoj strani ne postoji. Tada ćemo reći da skalarno polje f nije integrabilno po karti φ. Površinski integral skalarnog polja nazivamo površinskim integralom prve vrste.

Ako je $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ onda je (v. II.8.2),

$$|\partial_1\vec{\varphi}(u, v) \times |\partial_2\vec{\varphi}(u, v)|dudv = \sqrt{EG - F^2},$$

gdje je

$$E = (\partial_1\phi_1(u, v))^2 + (\partial_1\phi_2(u, v))^2 + (\partial_1\phi_3(u, v))^2,$$
$$G = (\partial_2\phi_1(u, v))^2 + (\partial_2\phi_2(u, v))^2 + (\partial_2\phi_3(u, v))^2,$$
$$F = (\partial_1\phi_1(u, v))\partial_2\phi_1(u, v) + (\partial_1\phi_2(u, v))\partial_2\phi_2(u, v) + (\partial_1\phi_3(u, v))\partial_2\phi_3(u, v).$$

Dakle, uz gornje oznake, formulu kojom se definiše integral možemo pisati u obliku

$$\int\int_\varphi f(x, y, z)dS := \int_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2}dudv$$

iz kojeg se vidi i kako treba računati integral skalarnog polja po karti. Primijetimo da ako je površ S parametrizovana jednačinom $z = f(x, y), (x, y) \in D$, tj. ako je $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)), (u, v) \in D$, tada je $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$. Integral koji stoji na desnoj strani poslednje jednakosti. Napomeni da smo ovaj integral sretali kada smo računali ukupnu masu (naelektrisanje) raspoređenu po površi S. U formulama koje smo tamo pisali umjesto funkcije f stojala je gustina mase odnosno gustina naelektrisanja.

Definicija 2. *Neka je $\varphi : \Omega \to S$ glatka karta i $\vec{A} : D \to V^3$ vektorsko polje definisano na skupu D koji sadrži nosač (elementarnu glatku površ) $S = \varphi(\Omega)$. Tada integral polja $\vec{A}$ po karti φ, koji označavamo sa $\int\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{S}$, definišemo formulom*

$$\int\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{S} := \int\int_\Omega \vec{A}(\varphi(u,v)) \cdot \partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)dudv.$$

Na desnoj strani jednakosti pod znakom integrala stoji mješoviti proizvod vektora $\vec{A}(\varphi(u,v)), \partial_1\vec{\varphi}(u$ i $\partial_2\vec{\varphi}(u,v)$. Integral na desnoj strani se pojavio kada smo pisali formule za izračunavanja protoka fluida kroz površ S.

Ispisaćemo još nekoliko formula za površinski integral vektorskog polja. Neka je $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Koristeći formule za računanje mješovitog proizvoda i pretposatavljajući da je $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ dobijamo da je

$$\int\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{S} = \begin{vmatrix} P(\varphi(u,v)) & Q(\varphi(u,v)) & R(\varphi(u,v)) \\ \partial_1 x(u,v) & \partial_1 y(u,v) & \partial_1 z(u,v) \\ \partial_2 x(u,v) & \partial_2 y(u,v) & \partial_2 z(u,v) \end{vmatrix} dudv$$

U vezi sa pisanjem formula za površinski integral, primijetimo da iz formula za normalu

$$\vec{n}_\varphi(u,v) = \frac{\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)}{|\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)|}$$

slijedi da se integral vektorskog polja može pisati u obliku

$$\int\int_\varphi \vec{A}(x,y,z)d\vec{S} = \int\int_\Omega \vec{A}(\varphi(u,v)) \cdot \partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)dudv =$$

$$\int\int_\Omega \vec{A}(\varphi(u,v)) \cdot \vec{n}_\varphi(u,v) \cdot |\partial_1\vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2\vec{\varphi}(u,v)|dudv$$

Poslednji integral je zapravo integral skalarnog polja $f = \vec{A} \cdot \vec{n}_\varphi$. Pri tome je uobičejeno da se kod oznake za normalu izostavi slovo φ u indeksu, jer je u oznaci za integral napisano da se radi o parametrizovanoj površi φ. Tako zaključujemo da važi formula kojom se uspostavlja veza između površinskog integrala skalarnog i vektorskog polja*:*

$$\int\int_\varphi \vec{A}d\vec{S} = \int\int_\varphi \vec{A} \cdot \vec{n}dS.$$

Ako uglove jediničnog vektora normale prema koordinatnim osama označimo sa α, β i γ, onda je $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$. Ako je još $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, onda je $\vec{A} \cdot \vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, pa se koristi i sledeća jednakost

$$\int\int_\varphi \vec{A}d\vec{S} = \int\int_\varphi P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Ako se dS interpretira kao površina, onda su proizvodi $dS\cos\alpha, dS\cos\beta, dS\cos\gamma$ površine projekcija na yz, zx i xy ravan. Tada se može pisati još jedna formula za površinski integral

$$\int\int_{\varphi}\vec{A}d\vec{S}=\int\int_{\varphi}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

Površinski integral vektorskog polja po karti nazivamo površinskim integralom druge vrste.

Napomena. Površinski integrali mogu biti definisani i na drugi način, ponavljajući postupak koji smo sproveli kada smo računali ukupnu masu raspoređenu po površi S i protok polja kroz S. Neka je polje S definisano kartom $\varphi:\Omega\to S$ i skalarno polje f definisano na $D\supseteq S$. Podijelimo površ S na parčad $\Delta_1,\ldots,\Delta_k$ i ako se u svakom parčetu Δ_i izaberimo po jednu tačku M_i. Tada se u integralnoj sumi $f(M_1)P(\Delta_1)+\cdots+f(M_k)P(\Delta_k)$ sabirak $f(M_i)P(\Delta_i)$ može aproksimirati sa $f(M_i)P(\Delta_i)\approx f(\varphi(u_i,v_i))P(\Omega_i)\cdot\sqrt{EG-F^2}|_{(u_i,v_i)}$, gdje je $\varphi(\Omega_i)=\Delta_i$. Granična vrijednost ovih suma se naziva površinskim integralom skalarnog polja f po površi S.

Slično, ako je na oblasti $D\supseteq S$ definisano vektorsko polje $\vec{A}$, i ako je površ S, koja orjentisana pomoću neprekidnog polja normala $\vec{n}$, izdijeljena na parčad $\Delta_1,\ldots,\Delta_k$, onda se može formirati integralna suma $\vec{A}(M_1)\cdot\vec{n}(M_1)P(\Delta_1)+\cdots+\vec{A}(M_k)\cdot\vec{n}(M_k)P(\Delta_k)$. Ako ove sume konvergiraju kada $diam\,\Omega_i=\varphi^{-1}(\Delta_i)\to 0$, onda kažemo da je polje $\vec{A}$ integrabilno na S a graničnu vrijednost suma nazivamo površinskim integralom polja $\vec{A}$ po površi S orjentisanoj pomoću normala $\vec{n}$. Pokazuje se da su ove definicije ekvivalentna sa definicijama 1 i 2 površinskog integrala skalarnog odnosno vektorskog polja.

Definicije površinskih integrala skalarnog i vektorskog polja se prirodno uopoštavaju na integraciju po karti koja je dio po dio glatka i na integraciju po uniji takvih karata $\varphi_i:\Omega_i\to S_1$, naravno pod uslovom da su presjeci $S_i\cap S_j$ površine nula.

Što se tiče problema egzistencije integrala skalarnog i vektorskog polja, tu, slično kao kod krivolinijskih integrala treba uočiti da su ovi integrali definisani preko dvostrukih integrala, pa se na to pitanje može odgovoriti, recimo, primjenjujući Lebegovu teoremu o integrabilnosti funkcije. Tako na primjer ako je karta $\varphi:\Omega\to S$ glatka a polje $f(\vec{A})$ neprekidno na $D\supseteq S$, onda je $f(\vec{A})$ integrabilno na S.

2. Veza između površinskog integrala skalarnog i vektorskog polja. Zamjena parametra. Osnovna svojstva površinskih integrala.

Veza između površinskog integrala skalarnog i vektorskog polja je već izvedena u prethodnoj tački. Ostaje nam da samo formulišemo odgovarajuću teoremu.

Teorema 1.*Neka je $\varphi:\Omega\to S$ glatka karta i $\vec{A}:D\to V^3$ vektorsko polje definisano na skupu D koji sadrži površ S. Tada važi jednakost*

$$\int\int_{\varphi}\vec{A}d\vec{S}=\int\int_{\varphi}\vec{A}\cdot\vec{n}dS.$$

Smisao tvrđenja u teoremi je da ako postoji jedan od ova dva integrala onda postoji i drugi i važi gornja jednakost. Druga napomena u vezi sa jednakošću je da ona, uz mala dodatna objašnjenja, važi i kada je karta dio po dio glatka.

Površ S može biti parametrizovana na različite načine. Postavlja se pitanje: da li su integrali vektorskog odnosno skalarnog polja po takvim površima jednaki? Ako bi odgovor bio pozitivan onda bismo umjesto da govorimo o integralu po parametrizovanoj površi mogli govoriti o integralu po površi. Odgovor se može naslutiti iz primjera u kojima se vidi da se integral skalarnog polja pojavljuje kada se računa ukupna masa materije koja je raspoređena po površi te da se integral vektorskog polja pojavljuje kada se izračunava protok fluida kroz površ. Može se dakle očekivati da integral skalarnog polja ne zavisi od toga kako je zadata povrč a da će integral vektorskog polja promijeniti znak ako se pređe na kartu koja će promijeniti orjenatciju površi. To uostalom sugeriše i formula $\int\int_\varphi \vec{A}d\vec{S} = \int\int_\varphi \vec{A}\cdot\vec{n}dS$, jer će se u integralu na desnoj strani ove jednakosti promjenom orjentacije krive promijeniti smjer jediničnog vektora normale, odnosno podintegralna funkcija će promijeniti znak. Precizno, važi sledeća teorema.

Teorema 2. *Neka su $\varphi : \Omega \to S$ i $\psi : \Omega' \to S$ glatke karte pri čemu je karta $\psi : \Omega' \to S$ nastala od karte $\varphi : \Omega \to S$ zamjenom parametra posredstvom difemorfizma $\omega : \Omega' \to \Omega$.*

a) Ako je $f : D \to R$, $(D \supseteq S)$ skalarno polje onda je $\int\int_\varphi f dS = \int\int_\psi f dS$.

b) Ako je $\vec{A} : D \to V^3$ $(D \supseteq S)$ vektorsko polje onda je $\int\int_\varphi \vec{A}d\vec{S} = \epsilon\int\int_\psi \vec{A}d\vec{S}$, gdje je $\epsilon = \epsilon(\varphi,\psi) = 1$ ako su karte φ i ψ ekvivalentne i $\epsilon(\varphi,\psi) = -1$ ako karte φ i ψ nijesu ekvivalentne.

Dokaz. a) Imamo da je

$$\int\int_\psi f dS = \int\int_{\Omega'} f(\psi(u',v'))\cdot ||\partial_1\vec{\psi}(u',v')\times\partial_2\vec{\psi}(u',v')|du'dv'$$

Pri tome je $\psi(u',v') = \varphi(\omega(u',v'))$. Izvršimo zamjenu promjenljivih postavljajući $(u,v) = \omega(u',v')$, odnosno $(u',v') = \omega^{-1}(u,v)$. Koristeći jednakost (v. II.8.2)

$$\partial_1\vec{\psi}(u',v')\times\partial_2\vec{\psi}(u',v') = \partial_1\vec{\varphi}(u,v)\times\partial_2\vec{\varphi}(u,v)\cdot det\,\omega'(u',v')$$

dobijamo

$$\int\int_{\Omega'} f(\psi(u',v'))\cdot|\partial_1\vec{\psi}(u',v')\times\partial_2\vec{\psi}(u',v')|du'dv' =$$

$$\int\int_\Omega f(\varphi(u,v))\cdot|\partial_1\vec{\varphi}(u,v)\times\partial_2\vec{\varphi}(u,v)||\,det\,\omega'(u',v')||\,det(\omega){-}1'(u,v)|dudv =$$

$$\int\int_\Omega f(\varphi(u,v))\cdot|\partial_1\vec{\varphi}(u,v)\times\partial_2\vec{\varphi}(u,v)||\,det\,\omega'(u',v')|(\omega){-}1'(u,v)|dudv =$$

$$\int\int_\Omega f(\varphi(u,v))\cdot|\partial_1\vec{\varphi}(u,v)\times\partial_2\vec{\varphi}(u,v)|dudv = \int\int_\varphi f dS.$$

b) Za integral vektorskog polja, polazeći od definicije i vršeći smjenu promjenljivih, kao u a), dobijamo

$$\int\int_\psi \vec{A}d\vec{S} = \int\int_{\Omega'} \vec{A}(\psi(u',v'))\cdot\partial_1\vec{\psi}(u',v')\times\partial_2\vec{\psi}(u',v')du'dv' =$$

$$\int\int_{\Omega'} \vec{A}(\varphi(\omega(u',v')))\cdot\partial_1\vec{\varphi}(\omega(u',v'))\times\partial_2\vec{\varphi}(\omega(u',v'))\cdots det\,\omega'(u',v')du'dv' =$$

$$\int\int_\Omega \vec{A}(\varphi(u,v))\cdot\partial_1\vec{\varphi}(u,v)\times\partial_2\vec{\varphi}(u,v)dudv'\cdots det\,\omega'(u',v')$$

$$\epsilon \int\int_{\Omega} f(\varphi(u,v)) \cdot |\partial_1 \vec{\varphi}(u,v) \times \partial_2 \vec{\varphi}(u,v)| dudv = \epsilon \int\int_{\varphi} \vec{A} d\vec{S}.$$

Dokazano je i tvrđenje b).

U dijelu koji se odnosi na površinski integral prve vrste teorema tvrdi da se može govoriti o integraciji polja po površi, jer je svejedno pomoću koje je prametrizacije površ zadata. U stvari je uobičajeno da se govori o površinskom integralu skalrnog polja po površi i da se u oznaci integrala ne koristi oznaka za parametrziovanu površ već oznaka za površ. Izbor parametrizacije postaje važan tek kada se postavi pitanje izračunavanja integrala a onda se ima potpuna sloboda izbora. Što se tiče integracije vektorskog polja promjenom parametrizacije može se (ali ne mora) promijeniti znak integrala. Eventualana promjena znaka je vezana za izbor parametrizacije koji mijenja orijentaciju površi. Tako se o površinskom integralu vektorskog polja može govoriti kao o integralu po orijentisanoj površi, i to je uobičajena terminologija, a u vezi sa tim se mijenjaju i oznake. Što se oznaka tiče, specijalno za integraciju po zatvorenoj površi koja je orjentisana pomoću spoljnih normala koristi se oznaka $\int\int_S$.

Na kraju dajemo i nekoliko primjera primjene i računanja površinskog integrala.

Primjer 1. Ako je po površi S raspoređena materija sa površinskom gustinom $\rho(x,y,z), (x,y,z) \in S$. Ukupna masa takve površi S iznosi $\int\int_S \rho(x,y,z)dS$. Specijalno, površina površi S se računa po formuli $\int\int_S dS$.

Površinski integral se, dakle, može koristiti za izračunavanje mase materije raspoređene po S.

Koordinate težišta iste površi S računaju se po formulama

$$x_c = \frac{\int\int_S x\rho(x,y,z)dS}{m},\ y_c = \frac{\int\int_S y\rho(x,y,z)dS}{m}\ , z_c = \frac{\int\int_C z\rho(x,y,z)dS}{m},$$

gdje je $m = \int\int_S \rho(x,y,z)dS$.

Primjer 1. Izračunati $I = \int\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdje je S dio cilindričke površi $x = r\cos u, y = r\sin u, z = v, 0 \leq 2\pi, 0 \leq v \leq H$.

Rješenje. Površ je parametrizovana, pa direktnom primjenom definicije imamo

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^H \frac{rdudv}{\sqrt{r^2+v^2}} = 2r\pi \int_0^H \frac{dv}{\sqrt{r^2+v^2}} = 2r\pi \ln \frac{H+\sqrt{r^2+H^2}}{R}.$$

Primjer 2. Izračunćemo površinu dijela Σ sfere izmedju dva meridijana i dvije paralele. Parametrizacija površ u sfernim koordinatama koje odgovaraju geografskim kooordinatama je $x = R\cos u\cos v, y = R\sin u\cos v, z = R\sin v, -p \leq u < \pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. (u je dakle geografska dužina a v geografska širina). Akoje $\Pi = \{(u,v) : u_1 \leq u \leq u_2; v_1 \leq v \leq v_2\}$, tada je tražena površina

$$S = \int\int_{\Sigma} dS = \int\int_{\Pi} R^2 \cos v dudv = R^2(u_2-u_1)(\sin v_2 - \sin v_1).$$

Specijalno, di površi koji se nalazi izmedju 30-te i 60-te paralele ima površinu $S = 2R^2\pi(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.)$.

Primjer 3. Izračunaćemo $I = \int\int_{Sigma} z^2 dS$, gdje je Σ površ konusa $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2.$, $x^2+y^2 \leq 4$. Površ S_2 se parametrizuje prosto sa $z = 2, x^2+y^2 \leq 4$.

Neka je $\Sigma_1$omotač a Σ_2 osnova konusa. Tada je

$$I = \int\int_{\Sigma_1} z^2 dS + \int\int_{\Sigma_2} z^2 dS.$$

Povrs Σ_1 zadajemo jednačinom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tada je

Zadatak. Napisati formule za momente inercije površi u odnosu na kooordinatne ravni, ose i koordinatni početak.

Zadatak. Neka je površ S zadata formulom $f(x, y, z) = 0$. Dokazati da je protok Π polja $\vec{A}$ kroz povrč S jednak $\Pi = \int\int_S \frac{\vec{A}\, grad\, f}{|grad\, f|} dS$.

Primjer 4. Izračunaćemo integral $I = \int\int_\Sigma x^2 y^2 z^2 dxdy$, gdje je Σ donja (unutrašnja) strana polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$. Koristimo parametrizaciju $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2$. Tada je , uimajući u obzir da se radi o integralu po donjoj površi polusfere,

$$I = -\int\int_D x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy.$$

Prelaskom na polarne koordinate dobijamo

$$I = -\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho) = -\frac{2\pi R^7}{105}.$$

Primjer 5. Izračunaćemo integral $I = \int_{\Sigma^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdje je Σ^+ ona starna površi $x = v\cos u, y = v\sin u, z = v, (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 1]$, koja se ne vidi iz tačke $A(0, 0, 1)$.

Rješenje. Primijetimo da je $x^2 + y^2 = z^2$, što znači da je Σ konus koji se može opisati jednačinom $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, 1]$. Tada je vektor normale te površi jedank vektorskom proizvodu vektora $-v\sin u\vec{i} + v\cos uj$, i $\cos u\vec{i} + \sin u\vec{j} + \vec{k}$, i taj vektor ima koordinate ima koordinate $(v\cos u, v\sin u, -v)$ i ova parametrizacija odredjuje opisanu orijentaciju površi Σ. Slijedi da je

$$I = \int\int_[0, \pi] \times [0, 1](v^2\cos^2 u + v^2\sin^2 v - v^2) dudv = 0.$$

Primjer 6. Izračuanćemo integral $I = \int\int_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdje je S^+ gornja strana površi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Rješenje. Iz razloga simetrčnosti, imamo da je

$$\int\int |S^+ xdydz = \int\int_{S^+} ydzdx = \int_{S^+} zdxdy,$$

pa je dovoljno izračinati integral $I_1 = \int\int_{S^+} zdxdy$. Koristeći parametrizacije $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y - 2}$ gornje starne S_1 površi S i parametrizaciju $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ donje strane S_2 površi S, prelaskom na polarne koordinate, dobijamo

$$I_1 = 2\int\int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2} = \frac{4}{3} a^3 \pi.$$

3. Formula Gaus-Ostrogradskog. Divergencija vektorskog polja.

U prethodnom paragrafu smo izveli Grinovu formulu i time pokazali da postoji veza između krivolinijskog integrala po konturi i dvostrukog integrala po oblasti koja je ograničena tom konturom. Slična veza postoji i između površinskog integrala po zatvorenoj površi i trostrukog integrala po oblasti koja je tom površi ograničena.

Teorema 1. *Neka $D \subseteq R^3$ oblast čija je granica ∂D dio po dio glatka zatvorena površ. Ako vektorsko polje $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} : U \to V^3$ neprekidno diferencijabilno u oblasti U koja sadrži skup $D \cup \partial D$, onda važi formula Gaus-Ostrogradskog*

$$\int\int_{\partial D^+} \vec{A} d\vec{S} = \int\int\int_D (\partial_1 P + \partial_2 Q + \partial_3 R) dxdydz.$$

Dokaz. U gornjoj formuli P, Q i R su funkcije tri promjenljive a ∂_1, ∂_2 i ∂_3 označavaju izvode po prvoj, drugoj i trećoj promjenljivoj. Znak "$+$"kod ∂D označava da je ta granica je orijentisana pomoću spoljnih normala. Prtetpostavimo da je D elementarna u odnosu na $z-$osu, odnosno da je $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$. Granica ∂D se sastoji od tri dijela $\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_0$, pri čemu je $S_1 = \{(x,y,f_1(x,y)) : (x,y) \in \Omega\}, S_2 = \{(x,y,f_2(x,y)) : (x,y) \in \Omega\}$, dok je S_0 cilindrička površ: $S_0 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial\Omega, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$ Površ S_1 je orjentisana tako da normale sa z-osom zahvataju tup ugao, normale na površ S_2 zahvataju sa z-osom oštar ugao. Normale na S_0 su paralelne sa xy-ravni.

$$\int\int\int_D \partial_3 R(x,y,z) dxdydz = \int\int_\Omega (\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \partial_3 R(x,y,z) dz) dxdy =$$

$$\int\int_\Omega [R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))] dxdy.$$

Iz karte površi S_1 imamo da vektor jedinične normala $\vec{n}_1 = (\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \partial_1 f_1 \vec{k}) \times (0 \cdot \vec{i} + \vec{j} + \partial_2 f_1 \vec{k}) = -\partial_1 f_1 \vec{i} - \partial_2 f_1 \vec{j} + \vec{k}$ sa z-osom zahvata oštar ugao. Da bismo sve uskaldilli sa orjentaicijom površi S_1, treba za vektor normale birati vektor $-\vec{n}_1$. Slično, za površ S_2 imamo da je $\vec{n}_2 = -\partial_1 f_1 \vec{i} - partial_2 f_2 \vec{j} + \vec{k}$, i ova karta je saglasna sa orjentacijom površi S_2. Što se tiče površi S_0, imamo da je $\vec{n}_0 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Ukupno je

$$\int\int_{S_1^+} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = -\int\int_{S_1^+} R(x,y,z)\vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS = -\int\int_{S_1^+} R(x,y,z) dS = -\int\int_\Omega R(x,y,f_1(x,y)) dxdy,$$

$$\int\int_{S_2^+} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_1^+} R(x,y,z)\vec{k} \cdot \vec{n}_2 dS = \int\int_{S_1^+} R(x,y,z) dS = \int\int_\Omega R(x,y,f_2(x,y)) dxdy,$$

$$\int\int_{S_0^+} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = -\int\int_{S_1^+} R(x,y,z)\vec{k} \cdot \vec{n}_0 dS = 0.$$

Sabirajući ove integrale zaključujemo da je

$$\int\int_{\partial D} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_D \partial_3 R(x,y,z) dxdydz.$$

Ako pretpostavimo da je oblast D elementarna u odnosu na x-osu i y-osu, onda na isti način možemo dobiti i jednakosti

$$\int\int_{\partial D} P\vec{i}\cdot d\vec{S} = \int\int\int_D \partial_1 P(x,y,z)dxdydz, \int\int_{\partial D} Q\vec{j}\cdot d\vec{S} = \int\int\int_D \partial_2 Q(x,y,z)dxdydz.$$

Sabirajući poslednje tri jednakosti dobijamo formulu Gaus-Ostrogradskog.

Formulu za slučaj kada oblast D nije elementarna u odnosu na koordinatne ose nećemo dokazivati.

Napomenimo da, kao i Grinova formula, formula Gaus-Ostrogradskog važi i u opštijem slučaju. Naime, ako je polje $\vec{A}$ neprekidno u zatvorenoj oblasti $\bar{D} = D \cup \partial D$ a neprekidno-diferencijablno na D, onda važi formula Gaus-Ostrogradskog. Formula Gaus-Ostrogradskog važi i kada je oblast D mnogostruko povezana. Preciznije, ako se granica oblasti D sastoji iz zatvorenih dio po dio glatkih površi $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ tako da a) nikoje dvije od njih nemaju zajedničkih tačaka; b) površ Γ obuhvata površi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$; c) ni jedna od površi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ ne obuhvata drugu, d) oblast D se nalazi unutar površi Γ a izvan povrči $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, onda važi formula

$$\int\int_{\partial D^+} \vec{A}d\vec{S} = \int\int\int_D (\partial_1 P + \partial_2 Q + \partial_3 R)dxdydz.$$

Pri tome znak "$+$" kod oznake za granicu ∂D označava da je granica ∂D orjentisana tako da sve normale idi van oblasti D, tj. površ Γ je orjentisana pomoću spoljnih normala a površi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ pomoću unutrašnjih normala.

Primjer 1. Izračunati integral $I = \int\int_{S^+} x^3dudz + y^3dzdx + z^3dxdy$ po spoljnoj strani omotača konusa $K : x^2 + y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1$.

Rješenje. Označimo sa I_1 integral po spoljnoj strani cijele površi konusa, a sa I_2 integral po gornjoj strani osnove. Tada je $I + I_2 = I_1$. Pri tome, koristeći formulu Gaus-Ostrogradsog, i prelaskom na cilindričke koordinate dobijamo

$$I_1 = 3\int\int\int_K (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = 3\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z (\rho^2 + z^2)\rho d\rho = \frac{9}{10}\pi.$$

Primjer 2. Izračunaćemo $I = \int_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdje je S^+ spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Označimo sa V loptu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$. Primjenom formule Gaus-Ostrogradskog dobijamo:

$$I = 3\int\int\int_V dxdydz = 4a^2\pi.$$

Primjer 3. Neka je S^+ spoljna površ kocke $V : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$. Izračunćemo integral $I = \int\int_{S^+} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$. Primjenom formule Gaus-Ostrogradskog, dobijamo: (sa V označvamo tijelo ograničeno površi S:

$$I = \int\int\int_V (x + y + z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z)dz = 3a^4.$$

Primjer 4. Izrav cunaćemo integral $I = \int_{S^+} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, gdje je S^+ spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Primjenom formule Gaus-Ostrogradskog a zatim prelaskom na sferne koordinate imamo (sa V označena je lopta ograničena datom sferom):

$$I = 3 \in \int\int_V (x[2 + y^2 + z^2)dxdydz = 3\int_o^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

Posmatrajmo vektorsko polje $\vec{v} : D \to V^3$ brzina stacionarnog proticanja tečnosti definisano u oblasti D. Neka je $tial\Omega$ granica oblasti $\Omega \subseteq D$ zatvorena dio po dio glatka površ. Ako granicu $\partial\Omega$ orjentišemo pomoću spoljašnjih normala, integral $\int\int_{\partial\Omega} \vec{v}d\vec{S}$ će biti pozitivan ako iz oblasti Ω ističe više tečnosti nego što u nju utiče i negativan u suprotnom. Ako je ovaj integral jednak nuli onda je to znak da ili u oblasti nema ni izvora ni ponora ili da se oni međusobno poništavaju. Ako napravimo količnik $\frac{\int\int_{\partial\Omega} \vec{v}d\vec{S}}{\mu(\Omega)}$ onda će on predstavljati srednju izvornu moć oblasti Ω.

Definicija 1.*Neka je $\vec{A} : D \to V^3$ i M tačka iz oblasti D. Divergencija vektorskog polja $\vec{A}$ u tački M je broj $div\,\vec{A}(M)$ u tački definisan formulom*

$$div\,\vec{A}(M) := \lim_{\Omega\to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} \vec{A}d\vec{S}}{\mu(\Omega)}.$$

U gornjoj formuli $\partial\Omega$ je zatvorena dio po dio glatka površ orjentisana pomoću spoljnih normala koja ograničava oblast $\Omega \subseteq D$, dok znak "$\Omega \to M$" označava da $diam\,\Omega \to 0$ ali tako da $M \in \Omega$.

Fiziški, divergencija mjeri izvornu moć polja $\vec{A}$ u tački.

O tome kako se može izračunavati divergencija vektorskog polja u zadatoj tački važi sledeća teorema:

Teorema 2.*Neka je $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} : D \to V^3$ vektorsko polje koje je neprekidno-diferencijabilno u oblasti D. Ako je $M \in D$, onda je*

$$div\,A(M) = \partial_1 P(M) + \partial_2 Q(M) + \partial_3 R(M).$$

Dokaz. Neka je $\partial\Omega$ zatvorena dio po dio glatka površ koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$, pri žemu $M \in D$. Na osnovu formule Gaus-Ostrogradskog i teoreme o srednjoj vrijednosti integrala, slijedi jednakost

$$\int\int \partial\Omega\vec{A}d\vec{S} = \int\int\int \Omega(\partial_1 P + \partial_2 Q + \partial_3 R)dxdydz = (\partial_1 P(M') + \partial_2 Q(M') + \partial_3 R(M') \cdot \mu(\Omega).$$

gdje $M' \in \Omega$. Odavde slijedi da je

$$\frac{\int\int \partial\Omega\vec{A}d\vec{S}}{\mu(\Omega)} = (\partial_1 P(M') + \partial_2 Q(M') + \partial_3 R(M') \to (\partial_1 P(M) + \partial_2 Q(M) + \partial_3 R(M).$$

kada $diam\,\Omega \to 0, \Omega \ni M$, (jer tada $M' \to M$ a polje $\vec{A}$ je neprekidno diferencijabilno).

Poslije ove teoreme formulu Gaus-Ostrogradskog možemo pisati u obliku

$$\int\int_{\partial D^+} \vec{A} d\vec{S} = \int\int\int_D div\, \vec{A} dxdydz = \int\int\int_D div\, \vec{A} dV.$$

Zadatak 3. Izračunati divergenciju sferno-simetričnog polja $A = f(r) \cdot \vec{r}$, gdje je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ i $r =\mid \vec{r} \mid$.

Zadatak 2. Izračunati divergenciju polja ugaonih brzina tijela koje rotira oko z-ose ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, pri čemu je intenzitet ω ugaone brzine $\vec{\omega}$ konstantan.

Neka je $T \subseteq R^3$ jednostruko povezana oblast (to znači da ako je Σ zatovrena površ koja leži u T, tada i oblas G ograničena sa Σ leži u D) i P, Q, R neprekidne funkcije na oblasti T. eak je $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Objasnićemo kakve uslove funkcije P, Q i R treba da zadovoljavaju pa da površinski integral

$$\int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

po svakoj zatvorenoj površi S koja leži U T bude jednak nuli? Sličan zadatak za krivolinijski integral i funkcije dvije promjeljive rješavali smo pomoću Grinove formule. Na ovo pitanje ćemo odgovoriti korišćenjem teoreme Gaus-Ostrogradskog, pretpostavljajući pri tome da su funkcije P, Q i R neprekidno-diferencijabiljne na T. Iz formule Gaus-Ostrogradskog odmh dobijamo dovoljan uslov

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \text{ tj. } \div \vec{A} = 0 \text{ na } T.$$

Ovaj uslov je i neophodan. Zaista, ako je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka iz oblasti T i ako posmatramo zatvorenu površ $\Sigma \subseteq T$ koja obuhvata tačku M_0, i ako sa $V(\Sigma)$ označimo zapreminu tijela $T(\Sigma)$ koje ograničava povrŠ Σ, tada primjenom formule Gaus. Ostrogradskog, iz uslova

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

slijedi da je

$$\frac{1}{V(\Sigma)} \int\int\int_{T(\Sigma)} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz = \frac{1}{V(\Sigma)} \int\int_{\Sigma} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0$$

Odavde, prelazeći na graničnu vrijednost kada $diam(\Sigma \to 0)$ tj. kada $T(\Sigma) \to M_0$, koristeći teoremu o srednjo vrijednsoto, imajući u vidu da su parciajni izvodi funkcija P, Q i R neprekidni, dobijamo

$$\frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + \frac{\partial R(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0$$

ili u kraćem zapisu $\div \vec{A}(M_0) = 0$ za proizvoljnu tačku $M_0 \in T$, tj. $\div \vec{A} = 0$.

Primjer 5. Ponovo ćemo računati Gausov integral $G = \int_{Sigma} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} dS$, gdje je $\vec{r}$ vektor $\vec{M_0 M}$ koji spaja tačku fiksiranu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sa promjenljivom tačkom

$M(x,y,z)$ na glatkoj zatvorenoj površi Σ, koja ne sadrži tačku M_0, a $\vec{n}$ vektor normale na površ Σ u tački M. Predstavimo ovaj integral kao integral vektorskog polja. Primijetimo da je

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \frac{\langle \vec{r},\vec{n}\rangle}{|\vec{r}} = \frac{(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta + (z-z_0)\cos\gamma}{|\vec{r}|},$$

gdje su $\cos\alpha$ $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca vektora $\vec{n}$. Odavde slijedi da je

$$G = \int\int_{\Sigma} \frac{x-x_0}{|vecr|^3}dydz + \frac{y-y_0}{|vecr|^3}dzdx + \frac{z-z_0}{|vecr|^3}dxdy$$

Pri tome su funkcije $P = \frac{x-x_0}{|vecr|^3}, Q = \frac{y-y_0}{|vecr|^3}$ i $R = \frac{z-z_0}{|vecr|^3}$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima u svakoj tački osim u tački A, i u svakoj tački različtoj od M_o, važi $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ u svakoj tački različitoj od M_0. Odavde slijedi da ako površ Σ ne obuhvata tačku M_0, tada je $G = 0$.

Ako pak površ Σ obuhvata tačku M_0, i ako je S sfera poluprečnika R sa centrom u M_0, koja je obuhvaćena površi Σ, tada je prema formuli Gaus-Ostrogrdskog

$$\int\int_{(\Sigma\cup S)^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int_{\Sigma^+} - \int\int_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0,$$

pa je dovoljno računati integral po sferi dovoljno malog poluprečnika. Tada je $\cos(\vec{r},\vec{n}) = 1$ pa je $G = \int\int_{S^+} \frac{dS}{R^2} = 4\pi$.

Cirkulacija i rotor vektorskog polja. Stoksova teorema

U primjeni teorije polja posebno je interesantan rad tj. krivolinijski integral) vektorskog polja po zatvorenim krivim linijama. Rad vektorskog polja po zatvorenoj krivoj liniji k se naziva *cirkulacija* vektorskog polja po krivoj k. Cirkulacija se označava sa $\oint_k \vec{A}d\vec{s}$.

Objasnimo fizički smisao cirkulacije vektorskog polja. Neka je $\vec{v}$ vektorasko polje brzina stacionarnog proticanja tečnosti. Zamislimo sledeći eksperiment. U oblast D u kojoj je polje definisano postavlja se točak sa lopaticama raspoređenim po obodu k. Čestice tečnosti djelujući na lopatice stvaraju rotacione momente čiji je ukupni rezultat rotacija točka oko ose koja je normalna na ravan točka. Rotaciono dejstvo polja brzina u svakoj tački M se karakteriše tangencijalnom komponentom brzine $\vec{v}(M)$ na kružnicu k. Ukupno rotaciono dejstvo se izražava integralom $\oint_k \vec{s}d\vec{s}$, dakle cirkulacijom vektorskog polja. Dakle, cirkulacija vektorskog polja izražava njegovu rotacionu sposobnost oko nekog pravca. Iz same formule za cirkulaciju je jasno da cirkulacija zavisi i od ugla između polja i tangente na krivu po kojoj se cirkulacija računa.

A sada možemo definisati rotor vektorskog polja.

Definicija 1.*Rotor* $rot\,\vec{A}(M)$ *vektorskog polja* $\vec{A} : D \to V^3$ *definisanog u oblasti* D *u tački* $M \in D$ *je vektor čija je projekcija* $\Pi_{\vec{n}}\, rot\,\vec{A}(M)$ *na proizvoljni jedinični vektor* $\vec{n}$ *definisan formulom*

$$\Pi_{\vec{n}}\, rot\,\vec{A}(M) := \lim_{k\to M} \frac{oint_k \vec{A}d\vec{s}}{\mu(\Omega)}$$

pri čemu je k *kontura koja okružuje tačku* M, *leži u ravni* π *normalnoj na vektor* $\vec{n}$ *i sadrži tačku* M, Ω *oblast u toj ravni ograničena konturom* $k, \mu(\Omega)$ *površina skupa* Ω *a* $''\to M\,''$*označava da* $diam\, k \to 0, M \in \Omega$.

Objasnimo još jednom gornju definiciju. Dakle, za izabranu tačku M iz oblasti D u kojoj je polje A definisano rotor polja u toj tački je vektor koji se definiše tako što se definišu njegove projekcije na bilo koji drugi vektor. Ta definicija projekcija izgleda ovvako. Izabere se vektor $\vec{n}$ čiji je početak u tački M. Konstruiše se ravan π koja sadrži tačku M i normalna je na $\vec{n}$. Zatim se biraju konture k u ravni π koje okružuju tačku M i leže u ravni π. Količnik cirkulacije vektorskog polja po takvoj konturi k i površine koju ta kontura obuhvata je broj koji se može intepretirati kao prosječna rotaciona sposobnost u dijelu okruženom konturom k. Granična vrijednost tog količnika (naravno ako postoji) kada se kontura k steže na tačku M je projekcija rotora na vektor $\vec{n}$.

Izvedimo formule za izračunavanje rotora vektorskog polja u zadatoj tački.

Teorema 1. *Neka je $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} : D \to V^3$ vektorsko polje koje je neprekidno-diferencijabilno u oblasti D. Ako je $M \in D$, onda je*

$$rot\, \vec{A}(M) = (\partial_2 R(M) - partial_3 Q)\vec{i} + (\partial_3 P(M) - \partial_1 R)\vec{j} + (\partial_1 Q(M) - \partial_2 P)\vec{k}.$$

Dokaz. Izračunajmo, na primjer, projekciju vektora $rot\, \vec{A}(M)$ na z-osu, odnosno na vektor $\vec{k}$. To će biti treća koordinata vektora $rot\, \vec{A}(M)$. Neka je γ kontura koja leži u ravni π koja je normalna na z-osu i okružuje tačku $M = (x_0, y_0, z_0) \in D, \gamma'$ projekcija konture γ na xy-ravan Ω dio ravni xy ograničen konturom γ' Tada, koristeći Grinovu teoremu i teoremu o srednjoj vrijednosti, imamo

$$\oint_{\gamma^+} \vec{A} d\vec{s} = \oint_{\gamma'^+} (P(x,y,z_0)\vec{i} + Q(x,y,z_0)\vec{j}) d\vec{s} = \int\int_{\Omega} \partial_1 Q(x,y,z_0) - \partial_2 P(x,y,z_0)) dxdy$$

$$(\partial_1 Q(M') - \partial_2 P(M') \cdot \mu(\Omega).$$

Odavde, posmatrajući granični proces kada se kontura γ steže na tačku M, imamo da $M' \to M$, pa zbog pretposatvljene neprekidnosti svih parcijalnih izvoda, dobijamo da je projekcija vektora $rot\, \vec{A}(M)$ na vektor $\vec{k}$ jednaka $(\partial_1 Q(M) - \partial_2 P(M)$. Slično se izvode i formule za preostale dvije koordinate vektora $rot\, \vec{A}(M)$.

Napomena. Rotor vektorskog polja $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ može se definisati relacijom

$$rot\, \vec{A}(M) = \lim_{\Omega \to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} \vec{n} \times \vec{A} dS}{\mu(\Omega)}.$$

U ovoj formuli $\partial\Omega$ je zatvorena dio po dio glatka površ koja ograničava oblast $\Omega \subseteq D$, $\vec{n}$ je polje jediničnih spoljnih normala na $\partial\Omega$, dok znak "$\Omega \to M$"označava da $\Omega \subseteq D, diam\, \Omega \to 0$, ali tako da $M \in \Omega$.

Pokažimo da je gornja formula tačna. Zaista, ako je $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, onda, koristeći definiciju i formulu za divergenciju dobijamo da je prva komponenta jednaka

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} (R\cos\beta - Q\cos\gamma) dS}{\mu(\Omega)} = div(R\vec{j} - Q\vec{k})(M) = \partial_2 R(M) - \partial_3 Q(M)$$

a to je tačno treća komponenta vektora $rot\, \vec{A}(M)$. Slično se pokazuje da su i ostale dvije komponente jednake odgovarajućim komponentama vektora $rot\, A(M)$.

Zadatak. Izračunati rotor polja brzina krutog tijela koje rotira oko nepokretne tačke ugaonom brzinom $\vec{\omega}$.

Zadatak. Dokazati da je vrtložnost vektorskog polja (projekcija rotora na izabrani pravac) najveća u pravcu rotora tog polja.

Stoksova formula je uopštenje Grinove formule na polja koja su definisana u prostoru. U njoj se ustanovljava veza cirkulacije vektorsko polja sa protokom rotora tog polja. Da bismo formulisali odgovarajuću teoremu uvešćemo nekoliko pojmova.

Definicija 1. *Oblast $\Omega \subseteq R^3$ je jednostruko povezana ako svaka zatvorena povrć koja leži u Ω ograničava oblast koja takođe leži u Ω.*

Definicija 2. *Oblast $\Omega \subseteq R^3$ je prostopovezana ako za svaku dio po dio glatku zatvorenu krivu $\gamma \subseteq \Omega$ postoji dio po dio glatka površ $S \subseteq \Omega$ koja je oslonjena na krivu γ.*

Posmatrajmo skupove $D = R^3 \setminus \{(0,0,0)\}, D' = R^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in R\}$. Oba ova skupa su obalsti, dakle i povezani skupovi. Pri tome je skup D prostopovezan alo nije jednostruko povezan, dok je skup D' jednostruko povezan ali nije prostopovezan.

Neka je S dio po dio glatka zatvorena površ čiji je kraj dio po dio glatka zatvorena kriva γ. Površ S se orjentiše pomoću normala a kriva γ ukazivanjem načina obilaska krive. Za ove dvije orjentacije se kaže da su saglasne ako kada se gleda sa vrha normale površ S po krivoj γ obilazi suprotno kretanju kazaljke na satu, odnsono tako da S ostaje sa lijeve starne krive.

Teorema 2. *Neka je $\vec{A} : D \to V^3$ neprekidno-diferencijabilno vektorsko polje definisano u prostopovezanoj oblasti $D, S \subseteq D$ dio po dio glatka površ oslonjena na dio po dio glatku krivu $\gamma \subseteq D$. Tada važi Stoksova formula*

$$\oint_{\gamma^+} \vec{A} d\vec{s} = \int\int_{S^+} rot\, \vec{A} d\vec{S},$$

pri čemu znaci "$+$" kod oznake za krivu i za površ znače da su kriva γ i površ S saglasno orjentisane.

Dokaz. Podijelimo površ S na djelove $S_1, \ldots, S_k$, koji su ograničeni dio po dio glatkim krivim $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Posmatrajmo parče S_i. U tački $M_i \in S_i$ postavimo tangentnu ravan π_i i normalu $\vec{n}_i$. Neka je γ_i' projekcija krive γ a S_i' projekcija površi S_i na ravan π. Označimo sa $\mu(S_i)$ i $\mu(S_i')$ površine djelova S_i i S_i'. Na osnovu definicije rotora slijedi da važi ednakost

$$\oint_{\gamma_i'^+} \vec{A} d\vec{s} = \Pi_{\vec{n}_i}(rot\, \vec{A}(M_i)) \cdot \mu(S_i') + o(\mu(S_i')).$$

Ako je podjela površi S dovoljna usitnjena onda će važiti jednakost

$$\oint_{\gamma_i^+} \vec{A} d\vec{s} = \Pi_{\vec{n}_i}(rot\, \vec{A}(M_i)) \cdot \mu(S_i) + o(\mu(S_i)).$$

Pišući gornju jednakosti za $i = 1, \ldots, k$ i sabirajući ih, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{k} \oint_{\gamma_i^+} \vec{A} d\vec{s} = \sum_{i=1}^{k} \Pi_{\vec{n}_i}(rot\, \vec{A}(M_i)) \cdot \mu(S_i) + o(\mu(S_i)).$$

Transformišimo lijevu starnu jednakosti. Prilikom objedinjavnja susjednih djelova S_i i S_j integrali po zajedničkom dijelu granice se ponište (nacrtati sliku). Tako ostaje samo sumiranje po krivoj koja ograničava oba dijela S_i i S_j. Ukupno, lijeva strana gornje jednakosti se transformuiše u $\oint_{\gamma^+} \vec{A}d\vec{s}$. Tako dobijamo da važi jednakost

$$\oint_{\gamma^+} \vec{A}d\vec{s} = \sum_{i=1}^{k} \Pi_{\vec{n}_i}(rot\, \vec{A}(M_i)) \cdot \mu(S_i) + o(\mu(S_i)).$$

Međutim, suma na desnoj strani je integralna suma za površinski integral $\int\int_S rot\, \vec{A}\vec{n}dS$. U graničnom procesu dobijamo Stoksovu formulu.

Primjer 1. Izračunaćemo krivolinjski integral $I = \oint_{k^+} dx + 2x[3y^2dy + 3zdz$ gdj je k presjek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i ravni Oxy, orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu kada se lgleda odozgo.

Krivu k možemo jednostavno parametrizovati $k : x = a\cos t, y = a\sin t, z = 0$. Sada dobijamo da je

$$I = \int_0^{2\pi} (-a\sin t + 2a^6 \cos^4 t \sin^2 t)dt = \frac{\pi a^6}{4}.$$

Integral možemo računati primjenom Stoksove formule. za površ S čiji je kraj kriva k izaberimo krug D^+ koji ogrančava kriva k (njegovu gornju stranu). Tada je

$$I = \int\int_{D^+} x^2y^2dxdy = \frac{a^6\pi}{4}.$$

Primjer 2. Izračunaćemo krivolinijksi integral $I = \int_{k^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, gdje je k^+ presjek cilindra $x^2 + y^2 = a^2$ i ravni $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, a > 0, c > 0$, koja je orijentisana suprotnio kretnju kazaljke na satu kada se gleda sa pozitivnog dijela $z - ose$.

Primjenom Stoksove formule dobijamo:

$$I = \int\int_{S^+} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)dS,$$

pri ěmu se intregrali po gornjoj strani ravni (onog duijela koji se nalazi unutar cilindra). Pri tome α, β i γ su uglovi koje normala ravni $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ zahvata sa koordiantnim osama. Slijedi da je

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

pri čemu je površ S zadata sa $z = c - \frac{c}{a}x$, pa je

$$I = -2\int\int_S \frac{a + c}{\sqrt{a^2 + c^2}}dS = -2pia(a + c).$$

Primjer 3. Izračunaćemo integral $I = \int_{k^+}(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, gdje je k^+ presjeke paraboloida $x^2 + y^2 + z = 3$ i ravni $x + y + z = 2$. orijentisan suprotno kretanju kazaljke na satu kada se gleda iz tačke $A(1, 0, 0)$. Primijenićemo Stoksvu formulu.

Za površ S^+ izabraécmo dio ravni $x+y+z=2$ koji se nalaze unutar paraboloida. Tada je vektor jedinične normale na tu površ vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$. Slijedi da je

$$I=\frac{-4}{\sqrt{3}}\int\int_S (x+y+z)dS = frac8\sqrt{3}\int\int_S dS.$$

Ostalo je da se izračuna ovaj površinski integral prve vrste. Primijetmo da je projekcija D površi S na ravam Oxy krug $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\leq 3/2$, odakle slijedi da je

$$I=-8\int\int_D dxdy=-12\pi.$$

Primjer 4. Izračunaćemo krivolinijski integral $I=\int_{k^+} ydx+zdy+xdz$, gdje je k^+ presjek sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ i ravni $x+y+z=0$, orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu akose gleda sa pozitivne sttane $x-$ose. Primijenićemo Stoksovu teoremu a za površ S ćemo uzet površ kruga koji leži u ravni $x+y+z=0$. Imamo

$$I=-\int\int_{S^+} dydz+dzdx+dxdy=-\int\int_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS.$$

Pri tome su kosinusi pravca vektora normale na ravan, $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, pa je

$$I=-\sqrt{3}\int\int_S dS=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

Zadaci.

1. Izračunati krivolijski integral $I = \int_k xyzds$ gdje je k dio elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ koji leži u prvom kvadrantu. [Rez. $I = \frac{ab(a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$.

2. Izračunati integral $I = \int_k (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, gdje je k kontura koja ograničava dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ koja se obilazi takoda spoljašnja strana površi ostaje sa lijeve strane. [Rez. I=-4].

3. Izračunati integral $I = \int_k (x - y^2)dx + 2xydy$ ako se za krivu k bira jedna od sljedećih linija koje spajaju tačke $O(0,0)$ i $A(1,1)$: (a) k je duž OA, (b) izlomljena linija OPA, gdje je $P(1,0)$, (c) izlomljene linije OQA, gdje je $Q(0,1)$, Rez. (a) $I = \frac{5}{6}$, (b) $I = \frac{3}{2}$, (c) $I = -\frac{1}{2}$.

4. Izračunati integral $I = \int_{AB} yzdx + zxdy + xydz$, gdje je $A(1,2,3), B(6,1,1)$. [Rez. $I = 0$

5. Koristeći Grinovu formulu dokazati jednakosti:

$$\text{(a)} \int\int_D \Delta u dxdy = \int_k \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} ds$$

$$\text{(b)} \int\int_D v\Delta u dxdy = -\int\int_D (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy + \int_k v\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$$

$$\text{(c)} \int\int_D v\Delta u - u\Delta v)dxdy = \int_k (v\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{e}}.$$

gdje je

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\vec{i}, vece) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\vec{i}, \vec{e}).$$

6. Izračunati integral $I = \oint_k xy^2dy - x^2ydx$ gsdje je k kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ [Rez. $I = \frac{\pi a^4}{2}$.

7. Izračunati integral $I = \oint_k \cos(\vec{e}, \vec{n})ds$, gdje je k kontura, $\vec{e}$-fikisiran jedinični vektor a $\vec{n}$-polje spoljašnjih jediničnih normala na konturu k. Rez. $I = 0$

8. Neka je k glatka zatvorena kriva u R^2 koja ograničava oblast D, $S(D)$ površina oblasti D, $\vec{n}$ polje spoljašnjih normala na k. Dokazati da je

$$\oint (x\cos(\vec{n}, \vec{i}) + y\cos(\vec{n}, \vec{j}))ds = 2S(D).$$

9. Izračunati integral (a) $I = \int\int_S z^2 dS$, (b) $I \int\int_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, gdje je S površ elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. [Rez. (a) $I = 8\pi(2 + \sqrt{2})$, (b) $I = \frac{4}{3}abc(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$.

10. Izračunati integrale $I_1 = \int\int_S dxdy, I_2 = \int\int_S zdxdy, I_3 = \int\int_S z^3dxdy$, gdje je S spoljašnja starna eliposida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. [Rez. $I_1 = 0, I_2 = \frac{4}{3}abc\pi, I_3 = 0$.

11. Izračunati integral $I = \int\int_S zdxdy$, gdje je S donja strane konusne površi: $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq H$.

12. Izračunati protok vektorskog polja $\vec{A} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ kroz površ koja ograničava tijelo zadato nejednačinama: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$. [Rez. Protok je $\frac{7}{2}\pi R^4$.

13. Izračunati integrale $I_1 = \int\int_S x^3 dydz, I_2 = \int\int_S yzdzdx$, po gornjoj strani gornje polovine eliposoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. [Rez.$I_1 = \frac{2}{5}\pi a^3 bc, I_2 = \frac{1}{4}\pi abc^2$.]

14. Naći rad vektorskog polja $\vec{F} = \frac{\vec{i}}{y} + \frac{i \vec{+} j}{z} + \frac{\vec{k}}{x}$ po duži kj aspaja tačke $A(1,1,1)$ i $B(2,4,8)$. [Rez. $A = \frac{188}{21}\ln 2$.]

15. Neka zatvorena glatka površ Σ ograničava oblast V. Ako je $\vec{n}$ polje spoljašnjih jediničnih normala na Σ, koristeći formulu Gaus-Ostrogradskog dokazati formule:

$$\text{(a)} \int\int\int_V \Delta u dxdydz = \int\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS,$$

$$\text{(b)} \int\int\int_V v\Delta u dxdydz = -\int\int\int_V (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}) + \int\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}] dS,$$

$$\text{(c)} \int\int\int_V (v\Delta u - u\Delta v) dxdydz = \int\int_\Sigma (v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}) dS,$$

gdje je

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{partialx^2} + \frac{\partial^2 f}{partialy^2} + \frac{\partial^2 f}{partialz^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\vec{i}, \vec{n}) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\vec{j}, \vec{n}) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(\vec{k}, \vec{n}).$$

16. Izračunati integral $I = \int\int_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, gdje je S spoljašnja strana omotača konusa $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1$.

17. Izračunati integral $I = \int\int_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy$ gdje je S spoljašnja strana površi: $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$. $Rez. I = 1$.]

18. Izračuanti protok vektorskog polja $\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = x$. [Rez. $w = \frac{\pi}{5}$.

19. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ po kružnici $k : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x + y + z = R$ koja se obilazu+i suprotno kretanju kazaljkre na satu kada se gleda sa pozitivnog dijela $z-$ose. Rezultat provjeriti primjenom Štoksove formule. Rez. $c = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

20. Izračunati integral $I = \oint_k (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ gdje je k presjek površi kocke $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ i ravni $x + y + z = \frac{3}{2}a$, koja se obilazi u smjeru suprotnom kretanju kazaljek na satu kada se gleda sa pozitivnog dijela $x-$ ose. [Rez. $I = -\frac{9}{2}a^3$.

IV GLAVA

OSNOVNE OPERACIJE TEORIJE POLJA U DEKARTOVOM PRAVOUGLOM I U KRIVOLINIJSKIM SISTEMIMA KOORDINATA

U prethodnim paragrafima definisali smo divergenciju i rotor vektorskog polja. Ovdje ćemo definisati gradijent skalarnog polja a zatim izučiti neka svojstva ovih veličina i izvesti odgovarajuće formule za njihovo računanje u krivolinijskom sistemu koordinata.

1. Gradijent skalarnog polja Dajemo definicu gradijent askalarnog polja.

Definicija 1.*Neka je $f : D \to R$ skalarno polje iM tačka iz oblasti D. Gradijent polja f u tački M je vektor $grad\, f(M)$, definisan formulom*

$$grad\, f(M) := \lim_{\Omega\to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} f \cdot \vec{n} dS}{\mu(\Omega)}$$

U gornjoj formuli $\partial\Omega$ je zatvorena dio po dio glatka površ koja ograničava oblast $\Omega \subset D$, $\vec{n}$ je polje jediničnih spolnjih normala na $\partial\Omega$, dok znak "$\Omega \to M$ označava da $diam\, \Omega \to 0$ ali tako da $M \in \Omega$(-kažemo da se Ω steže na tačku M.)

Primijetimo da u gornjoj formuli u brojiocu pod integralom stoji vektorska funkciija $f \cdot \vec{n}$. U tom slučaju integral je vektor čije su komponente integrali komponenti vektora $f \cdot \vec{n}$.

Izvedimo formule za računanje gradijenta.

Teorema 1. *Neka je skalarno polje $f : D \to R$ diferencijabilno u tački $M \in D$. Tada je $grad\, f(M) = \partial_1 f(M)\vec{i} + \partial_2 f(M)\vec{j} + \partial_3 f(M)\vec{k}$.*

Dokaz. Odredimo prvu koordinatu vektora $grad\, f(M)$. Neka je $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$. Tada je $f \cdot \vec{n} = f\cos\alpha\vec{i} + f\cos\beta\vec{j} + f\cos\gamma\vec{k}$. Pišući integral iz brojioca po komponentama dobijamo da je

$$grad\, f(M) = \lim_{\Omega\to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} f \cdot \cos\alpha dS}{\mu(\Omega)}\vec{i} + \lim_{\Omega\to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} f \cdot \cos\beta dS}{\mu(\Omega)}\vec{j} + \lim_{\Omega\to M} \frac{\int\int_{\partial\Omega} f \cdot \cos\gamma dS}{\mu(\Omega)}\vec{k} =$$

$$\vec{i}\, div(f\vec{i})(M) + \vec{j}\, div(f\vec{j})(M) + \vec{k}\, div(f\vec{k})(M) = \partial_1 f(M)\vec{i} + \partial_2 f(M)\vec{j} + \partial_3 f(M)\vec{k}.$$

Teorema je dokazana.

Definicija 2. Izvod $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M)$ skalarnog polja $f : D \to R$ u tački $M \in D$ u pravcu koji je određen jediničim vektorom $\vec{e}$, definiše se formulom

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M) := \lim_{t\to 0} \frac{f(M + t\vec{e}) - f(M)}{t}.$$

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački M i $\vec{e} = e^1\vec{i} + e^2\vec{j} + e^3\vec{k}$ onda je

$$\frac{\partial f}{\partial e}(M) = \lim_{t\to 0} \frac{f(M + t\vec{e}) - f(M)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(M)te^1 + \partial_2 f(M)te^2 + \partial_3 f(M)te^3 + o(t)}{t} =$$

$$\partial_1 f(M)te^1 + \partial_2 f(M)te^2 + \partial_3 f(M)te^3 = \langle grad\, f(M)\vec{e}\rangle.$$

Primijetimo da je $|\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M)| = grad\, f(M) \cdot \vec{e}| \leq |\, grad\, f(M)|$, pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako je vektor $\vec{e}$ kolinearan sa $grad\, f(M)$ i pri tome je $\max_{\vec{e}} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M)| = |\, grad\, f(M)|$.

Zadatak. Izvesti zakon prelamanja svjetlosti na osnovu varijacionog principa o minimalnom vrremenu kretanja svjetlosti i prethodnog svojstva gradijenta.

Neka je $S \subseteq R^3$ površ zadata jednačinom $f(x,y,z) = c$. Pretpostavimo da je f neprerkidno-diferencijabilno funkcija. Jedančina tangentne ravni na S u tački M_0 glasi

$$\partial_1 f(M_0)(x - x_0) + \partial_2 f(M_0)(y - y_0) + \partial_3 f(M_0)(y - y_0) = c.$$

Vektor $grad\, f(M)$ je normalan na površ S u tački M. Jedinični vektor $\vec{n}(M) = \frac{\pm grad\, f(M)}{|grad\, f(M)|}$.

Hamiltonov operator , gradijent, divergencija , rotor

U različitim primjenama vektorske analize, u cilju jednostavnijeg izražavanja gradijenta, diveregencije i rotora široko se koristi i simbolički takozvani Hamiltonov operator ili nabla operator koji se označava sa ∇ i definiše jednakošću

$$\nabla = \vec{i}\partial_1 + \vec{j}\partial_2 + \vec{k}\partial_3 = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Vektor ∇ dobija smisao u kombinaciji sa skalrnim ili vektorskim funkcijama. Tako na primjer ∇f shvatamo kao proizvod simboličkog vektora ∇ i skalara (skalrnog polja) f, $\nabla \cdot \vec{A}$ kao skalarni proizvod vektora ∇ vektora (vektorskog polja) $\vec{A}$, $\nabla \times \vec{A}$ je vektorski proizvod i slično. Tada možemo pisati jednakosti

$$\nabla f\, grad\, f, \nabla \cdot \vec{A} = div\, \vec{A}, \nabla \times \vec{A} = rot\, \vec{A}.$$

Navedimo nekoliko primjera u kojima se koristi Hamiltonov operator. Imamo

Znamenite Maksvelove jednačine kojima se opisuje stanje komponenti elektromagnetnog polja kao funkcije prostornih promjenljivih x, y, z i vremenske promjenljive t, mogu biti zapisane u obliku

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \cdot \vec{A} = div\, \vec{A},$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Ovdje je $\rho = \rho(x,y,z,t)$ gustina naelektrisanja, $\vec{j} = \vec{j}(x,y,z,t)$ vektor gustine električnog toka (brzina proticanja naelektrisanja kroz jediničnu površ), $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$ i $\vec{B} = \vec{B}(x,y,z,t)$ vektori jačine električnog i magnetnog polja a $epsilon_0$ i c konstante.

Napišimo nekoliko jednakosti, koje možemo naslutiti na osnovu vektorsek i/1li diferencijalne prirode operatora ∇, a koje slijede direktno kada se insistira na tačnom značenju ovog operatora i ispišimo i odgovarajuće jednakosti u terminima gradijenta, divergencije i rotora.

1)	$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$	$1')$	$grad(fg) = f\, grad\, g + g\, grad\, f$
2)	$\nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla_f$	$2')$	$div(f\vec{A}) = f\, div\, \vec{A} + \vec{A} \cdot grad\, f$
3)	$\nabla \times (f\vec{A}) = f\nabla \times \vec{A} + \nabla f \times \vec{A}$	$3')$	$\nabla \times (f\vec{A}) = f\, rot\, \vec{A} + grad\, f \times \vec{A}$
4)	$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$	$4')$	$div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \times rot\, \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$
5)	$\nabla \times \nabla f = 0$	$5')$	$rot(grad = 0$
6)	$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$	$6')$	$div(rot)\vec{A}) = 0$

Na kraju pomenimo i takozvani Laplasov operator Δ koji dva puta diferencijabilnom skalarnom polju f pridružuje novo skalarno polje

$$\Delta f = div(grad\, f) = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Slijedi nekoliko primjera relacija u kojim ćemo demonstrirati slobodnije korišćenje operatora ∇. Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označićemo sa $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ dok ćemo vektorski proizvod istij vektora označiti sa $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Primjer 1. $grad|\vec{r}|^2 = \nabla\langle \vec{r}, \vec{r}\rangle = 2\vec{r}$

3. Krivolionijske koordinate. Gradijent, divergencija i rotor u krivolinijskim koordinatama

Paralelno sa Dekartovim pravouglim koordinatnim sistemom u vektorskoj analizi se široko koriste takozvani krivolinijski sistemi koordinata. Kao primjere krivolinijskih koordinata pomenimo cilindričke i sferne koordinate.

Položaj tačke u prostoru se usvakom koordinatnom sistemu opisuje trojkom realnih brojeva (q^1, q^2, q^3), pri čemu između skupa trojki i skupa tačaka mora postojati uzajamno-jednoznačna veza. Pretpostavimo da trojke (x, y, z) i (q^1, q^2, q^3) predstavljaju Dekartove i krivolinijske koordinate tačke M. Tada postoje veze

$$x = f_1(q^1, q^2, q^3), y = f_2(q^1, q^2, q^3), z = f_3(q^1, q^2, q^3),$$

i

$$q^1 = F_1(x, y, z), q^2 = F_2(x, y, z), q^3 = F_3(x, y, z),$$

pri čemu su preslikavanja $f = (f_1, f_2, f_3)$ i $F = (F_1, F_2, F_3)$ međusobno inverzna u oblastima izmjene promjenljivih q^1, q^2, q^3 i x, y, z. Radijus-vektor $\vec{r}(M)$ tačke M možemo pisati u obliku

$$\vec{r}(M) = \vec{r}(q^1, q^2, q^3) = f_1(q^1, q^2, q^3)\vec{i} + f_2(q^1, q^2, q^3)\vec{j} + f_3(q^1, q^2, q^3)\vec{k}.$$

Neka je u prostoru fiksiran sistem koordinata. Definišimo koordinatnu površ i koordinatnu krivu u tom prostoru. Skup tačaka $M(q^1, q^2, q^3)$ prostora za koje je jedna koordinata fiksirana se naziva koordinatna površ, dok je skup tačaka prostora za koje su fiksirane dvije koordinate koordinatna kriva (linija).

Koordinatne linije su presjeci koordinatnih površi. Vektorska jednačina koordinatne linije se dobija kada se u formuli fiksiraju dvije koordinate. Ako, na primjer, fiksiramo koordinate q^1 i q^2 onda je koordinatna linija $\vec{r}(M) = \varphi_1(q^3)\vec{i} + \varphi_2(q^3)\vec{j} + \varphi_3(q^3)\vec{k}$. Za ovu koordinatnu linju kažemo da je q^3-koordinatna linija. Slično se definišu q^1 i q^2 koordinatne linije. Posmatrajmo neku q^i koordinatnu liniju. Pretpostavićemo da u svakoj tački te krive postoji tangenta, čija je vektorska jednačina

$$\partial_i \vec{r} = \vec{i}\partial_i f_1 + \vec{j}\partial_i f_2 + \vec{k}\partial_i f_3$$

Kroz jednu tačku prolaze tri koordinatne linije. Odgovarajuće vektore $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ obrazuju koordinatnu bazu. Vektori ove baze se mijenja i po pravcu i po smjeru kada se mijenja tačka za koju se vežu koordinatne linije. Zbog toga kažemo da je ta baza lokalna.

Specijalno, za Dekartov pravougli kordinatni sistem vektori iz koordinatne baze su isti - to su vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$. Jedinične vektore vektora $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ označimo sa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a njihove dužine sa H_1, H_2 i H_3. Brojeve H_1, H_2 i H_3 nazivamo Lameovim koeficijentima. Oni igraju važnu ulogu u raznim izračunavanjima u krivolinijskom sistemu koordinata. Preko tih koeficijenata se izražavaju elementi dužine, površine i zapremine.

U vezi sa krivolinijskim sistemom koordinata (q^1, q^2, q^3), pored vektora $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ posmatraćemo i vektore $grad\, f_1 = \vec{i} \cdot \partial_1 f_1 + \vec{j} \cdot \partial_2 f_1 + \vec{k} \cdot \partial_3 f_1, grad\, f_2 = \vec{i} \cdot \partial_1 f_2 + \vec{j} \cdot \partial_2 f_2 + \vec{k} \cdot \partial_3 f_2, grad\, f_3 = \vec{i} \cdot \partial_1 f_3 + \vec{j} \cdot \partial_2 f_3 + \vec{k} \cdot \partial_3 f_3$. Njihove jedinične vektore označićemo sa $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, a njihove dužine sa h_1, h_2, h_3.

Za krivolinjski sistem koordinata kažemo da je ortogonalan ako su koordinatne linije u bilo kojoj tački prostora ortogonalne, odnosno ako su za svaku tačku M vektori $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ u parovima ortogonalni.

Zadatak. Dokazati da je za ortogonalnie sistem koordinata $H_i = \frac{1}{h_i}$.

Zadatak. Dokazati da su cilindrički i sferni sistemi koordinata ortogonalni.

Dalje ćemo pretpostaviti da je krivolinijski sistem koordinata koji razmatramo ortogonalan. Tada u svakoj tački M možemo konstruisati ortonormirane sisteme $\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|}$ i $\vec{e}'_1 = \frac{grad\, f_1}{|\, grad\, f_1|}, \vec{e}'_2 = \frac{grad\, f_2}{|\, grad\, f_2|}, \vec{e}'_3 = \frac{grad\, f_3}{|\, grad\, f_3|}$. Iako se baze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ mijenjaju od tačke do tačke, to ipak ne smeta da se bilo koji vektor pretstavi kao kombinacija vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, odnosno $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$:

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(q^1, q^2, q^3) = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A + 3\vec{e}_3 A'_1\vec{e}'_1 + A'_2\vec{e}'_2 + A + 3\vec{e}'_3,$$

gdje su A_1, A_2, A_3 projekcije vektora $\vec{A}$ na vektore $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a A'_1, A'_2, A'_3 projekcije istog vektora na $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ i $\vec{e}'_3$.

U ortogonalnom sistemu koordinata element dužine, površine i zapremine se izražavaju preko Lameovih koeficijenata. Koordinatnim površima ograničen je krivi paralelepiped. Dužine ivica takvog beskonačno malog paralelepipeda su $ds_i = H_i dq^i$, površine strana paralelepipeda su $dS_{ij} = H_i H_j dq^i dq^j$, zapremina je $dV = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3$.

Odredimo Lameove koeficijente za cilindričke i sferne koordinate. Za ciliondričke koordinate je $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$, odakle slijedi da je $H_1 = H_\rho = 1, H_2 = H_\varphi = \rho, H_3 = H_z = 1$. Za sferni sistem koordinata je $x = \rho\cos\varphi\sin\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\theta$,pa je $H_1 = H_\rho = 1, H_2 = H_\varphi = \rho\sin\theta, H_3 = H_\theta = \rho$. Odavde se dobija da je element zapremine za cilindrički sistem koordianta $dV = \rho$, dok je element zapremine za za sferne koordinate $dV = \rho^2\sin\theta$. Primijetimo da je element dV jednak Jakobijevoj determinanti.

Izvedimo formule za gradijent, divergenciju i rotor u krivolinijskom sistemu koordinata. Neka je $f : D \to R$ skalarno polje koje ima gradijent. Tada je

$$f(x, y, z) = f(f_1(q^1, q^2, q^3), f_2(q^1, q^2, q^3), f_3(q^1, q^2, q^3)).$$

Imamo da je

$$grad\, f = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q^1} \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q^2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q^3} \cdot \vec{e}_3.$$

Specijalno, u cilindričkom sistemu koordinata, važi

$$grad\, f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z.$$

Navedimo nekoliko primjera.

Primjer 1. Ako je polje sferno-simetrično, tj. ako $f(M) = f(|\vec{r}|)$ zavisi samo od dužine vektora položaja $\vec{r}$, tada je

$$grad\, f = f'(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Tako, na primjer, ako je $f =| \vec{r} |^3$, onda je $grad\, f = 3 \mid \vec{r} \mid r$.

Primjer 2. Skalarno polje koje je u cilindričkom sistemu koordinata zadato sa $f = \frac{1}{\rho}$ ima gradijent $grad\, f = grad\, \frac{1}{\rho} = \frac{-1}{\rho^2} \cdot \vec{e}_\rho$.

Definicija 3. *Glatka kriva $\gamma \subseteq D$ je vektorska linija vektorskog polja $\vec{A} : \Delta \to V^3$ ako je za svaku tačku $M \in \gamma$ tangentni vektor krive γ u tački M kolinearan sa vektorom $\vec{A}(M)$.*

Na primjer, kod vektorskog polja brzina stacionarnog proticanja tečnosti, vektorske linije su trajektorije kretanja čestica tečnosti.

Ako je kriva γ zadata sa $(\alpha, \beta) \ni t \to \vec{\varphi}(t)$, onda za svako $t \in (\alpha, \beta)$ vektor $\vec{\varphi}'(t)$ kolinearan sa $\vec{A}(\varphi(t))$. Odavde slijedi da za određivanje vektorskih linija polja $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ potrebno riješiti sistem diferencijabilnih jednačina

$$\frac{dx}{A_1(x, y, z)} = \frac{dy}{A_2(x, y, z)} = \frac{dz}{A_3(x, y, z)}.$$

Ako je $M \in D$ tačka u kojoj je $\vec{A} \neq 0$ i ako polje $\vec{A} \in C^1(D)$, onda postoji tačno jedna vektorska linija koja prolazi kroz tačku M. U krivolinijskom sistemu koordinata (q^1, q^2, q^3) sistem diferencijalnih jednačina iz kojih se određuju vektroske linije glasi

$$\frac{H_1 dq^1}{A_1(q^1, q^2, q^3} = \frac{H_2 dq^2}{A_2(q^1, q^2, q^3} = \frac{H_3 dq^3}{A_1(q^1, q^2, q^3}.$$

Specijalno, u cilindričkim i sfernim koordinatama ove jednačine imaju oblik

$$\frac{d\rho}{A_\rho(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho d\varphi}{A_\varphi(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{A_z(\rho, \varphi, z)},$$

$$\frac{d\rho}{A_\rho(\rho, \varphi, \theta)} = \frac{\rho \sin\theta d\varphi}{A_\varphi(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho d\theta}{A_\theta(\rho, \varphi, z)}.$$

Primjer 1. Odredićemo vektorske linije magnetnog polja obrazovanog tokom struje jačine I kroz beskonačno dugački pravolinijski provodnik. Odredimo prethodno magnetno polje $\vec{H}$. Neka se Oz osa poklapa sa provodnikom. Element provodnika dz oko tačke $P(0, 0, s)$, po Bio-Savarovom zakonu stvara u tački $M(x, y, z)$ magnetno polje

$$d\vec{H} = \frac{I}{|\vec{r}_1|^3} dz\vec{k} \times \vec{r}_1$$

gdje je $r_1 = P\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z - s)\vec{k}$. Integraleći po z-osi, dobijamo da je magnetno polje jednako

$$\vec{H} = \vec{H}(M) = I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{k} \times \vec{r}_1 dz.$$

Kako je $\vec{k} \times \vec{r}_1 = y\vec{i} + x\vec{j}$, računajući odgovarajući integral, dobijamo da je

$$\vec{H} = \vec{H}(M) = I \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-s)^2}} ds = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Vektorske linije polja se dobijaju tako što se riješi sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{(x^2 + y^2)dx}{-2Iy} = \frac{(x^2 + y^2)dy}{2Ix} = \frac{dz}{0}.$$

Odavde dobijamo rješenja $x^2 + y^2 = c_1, z = c_2$. Vektorske linije su kružnice sa centrima na z-osi, koje leže u ravnima koje su paralelne xy-ravni.

Zadatak. Dokazati da je rad vektorskog polja duž bilo koje vektorske linije različit od nule.

Slično formulama za gradijent, koristeći teoremu o izvodu složene funkcije, izvodi se i formula za divergenciju vektorksog polja

$$\vec{A}(q^1, q^2, q^3) = A_1(q^1, q^2, q^3\vec{e}_1 + A_2(q^1, q^2, q^3)\vec{e}_2 + A_3(q^1, q^2, q^3)\vec{e}_3$$

u krivolinjskom sistemu koordinata. Imamo da je

$$div\, A = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}(\partial_1(A_1 H_2 H_3) + \partial_2(A_2 H_3 H_1) + \partial_1(A_3 H_1 H_2).$$

Specijalno, u cilindričkom (ρ, φ, z) i sfernom (ρ, φ, θ) sistemu koordinata divergencija vektorskog polja

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = A_1(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + A_1(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + A_3(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z,$$

odnosno

$$\vec{A}(\rho, \varphi, \theta) = A_1(\rho, \varphi, \theta)\vec{e}_\rho + A_2(\rho, \varphi, \theta)\vec{e}_\varphi + A_3(\rho, \varphi, \theta)\vec{e}_\theta,$$

se računa po formulama

$$div\, A(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\partial_1(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\partial_1 A_2 + \partial_3 A_3$$

odnosno

$$div\, A(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\rho^2}\partial_1(\rho^2 A_1) + \frac{1}{\rho \sin\theta}\partial_1 A_2 + \frac{1}{\rho \sin\theta}\partial_3(\sin\theta A_3).$$

Zadatak. Izračunati divergenciju vektorskog polja a) $\vec{A} = \rho^2 \rho$ u cilindričkom sistemu koordinata, b) $\vec{A} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^4}$ u sfernom sistemu koordinata.

Rotor vektorskog polja

$$\vec{A}(q^1, q^2, q^3) = A_1(q^1, q^2, q^3\vec{e}_1 + A_2(q^1, q^2, q^3)\vec{e}_2 + A_3(q^1, q^2, q^3)\vec{e}_3$$

u krivolinjskom sistemu koordinata (q^1, q^2, q^3) se računa po formulama

$$rot\, \vec{A} = \frac{1}{H_2 H_3}(\partial_2(A_3 H_3) - \partial_3(A_2 H_2))\vec{e}_1 + \frac{1}{H_3 H_1}(\partial_3(A_1 H_1) - \partial_1(A_3 H_3))\vec{e}_2$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}(\partial_1(A_1H_1)-\partial_2(A_3H_3))\vec{e}_3.$$

Gornju formulu je pogodno pisati u obliku determinante

$$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1 & H_2\vec{e}_2 & H_3\vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1H_1 & A_2H_2 & A_3H_3 \end{vmatrix}$$

Sada se lako mogu napisti formule za rotor vektorskog polja u cilindričkim i sfernim koordinatama. To prepuštamo čitaocu.

Na kraju, napisaćemi i formule za Laplasov operator u krivolinjskim a zatim specijalno u cilindričkim i sfernim koordinattama :

$$\Delta f=div(grad\,f)=\frac{1}{H_1H_2H_3}(\partial_1(\frac{H_2H_3}{H_1}\cdot\partial_1 f)+(\partial_2(\frac{H_3H_1}{H_2}\cdot\partial_2 f)+(\partial_3(\frac{H_1H_2}{H_3}\cdot\partial_3 f).$$

$$\Delta f(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\partial_1(\rho\partial_1 f)+\frac{1}{\rho^2}\partial^2 22f+\partial^2_{33},$$

$$\Delta f(\rho,\varphi,\theta)\frac{1}{\rho^2}\partial_1(\rho^2\partial_1 f)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\partial^2_{21}f+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\partial_3(\sin\theta\partial_3 f)$$

Potencijalno vektorsko polje

Definicija 1. *Vektorsko polje $\vec{A}:D\to V^3$ je potencijalno ako postoji skalarno polje $f:D\to R$ tako da je $\vec{A}=grad\,f$.*

Ako je $\vec{A}=grad\,f$, onda kažemo da je f potencijal polja $\vec{A}$.

Interes za posebno izučavanje potencijalnih polja leži u tome što su potencijalna polja relativno jednostavna vektorska polja - ona se zadaju posredstvom samo jednog skalrnog polja, odnosno posredstvom samo jedne funkcije, dok se vektorsko polje u opštem slučaju zadaje tako što se zadaju tri funkcije. S druge strane, mnoga polja važna u primjeni teorije polja u fizici su potencijalna.

Prirodno je postaviti pitanje: Kako se (najjednoostavnije) može utvrditi da li je polje potencijalno.

Direktno iz definicije potencijalnog polja slijedi da važi teorema.

Teorema 1. *Polje $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}:D\to V^3$ je potencijalno onda postoji funkcija $\varphi:D\to R$ tako da je njen potpuni diferencijal:*

$$d\varphi(x,y,z)=A_1(x,y,z)dx+A_2(x,y,z)dy+A_3(x,y,z)dz.$$

Na osnovu formule $rot\,grad\,A=0$ koja je izvedena u prethodnom paragrafu slijedi da važi

Teorema 2. *Ako je polje $\vec{A}:D\to V^3$ potencijalno onda je $rot\,A=0$.*

Dokazaćemo još jedno tvrđenje u kojem se formulišu kriterijumi potencijalnosti polja.

Teorema 3. *Neka je $\vec{A}:D\to V^3$ vektorsko polje neprekidno-diferencijabilno u oblasti $D\subseteq R^3$. Polje $\vec{A}$ je potencijalno ako i samo ako je ispunjen jedan od sledeća dva uslova :*

i) Cirkulacija polja $\vec{A}$ po bilo kojoj zatvorenoj dio po dio glatkoj krivoj $\gamma \subseteq D$ jednaka je nuli;

ii) Za svake dvije dio po dio glatke krive $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq D$ koje imaju zajednički početak i kraj važi

$$\int_{\gamma_1^+} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Dokaz. U i) se naravno radi o orjentisanim krivim linijama γ_1 i γ_2, pri čemu je orjentacija određena zadavanjem početne i krajnje tačke. Sa o) označimo tvrđenje : Polje A je potencijalno. Tada je dovoljno dokazati sledeće implikacije: $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow i)$.

1) Neka je ispunjen uslov i) i neka su γ_1 i γ_2 dvije dio po dio glatke krive koje imaju zajednički početak i kraj. Neka i treća kriva γ_3 ima zajednički početak i kraj sa ovim krivim linijama i neka γ nema drugih zajedničkih tačaka niti sa γ_1 niti sa γ_2. Tada je $\gamma_1^+\gamma_3^-$ zatvorena dio po dio glatka zatvorena kriva. Slijedi da je

$$0 = \oint_{\gamma_1^+\gamma_3^-} \vec{A}d\vec{s} = \int_{\gamma_1^+} \vec{A}d\vec{s} + \int_{\gamma_3^-} \vec{A}d\vec{s} = \int_{\gamma_1^+} \vec{A}d\vec{s} - \int_{\gamma_3^-} \vec{A}d\vec{s},$$

odakle slijedi da je $\int_{\gamma_1^+} \vec{A}d\vec{s} = \int_{\gamma_3^+} \vec{A}d\vec{s}$. Slično se dokazuje da je $\int_{\gamma_2^+} \vec{A}d\vec{s} = \int_{\gamma_3^+} \vec{A}d\vec{s}$, odakle slijedi $\int_{\gamma_1^+} \vec{A}d\vec{s} = \int_{\gamma_2^+} \vec{A}d\vec{s}$. Dokazano je, dakle, da iz i) slijedi ii).

2) Neka je ispunjen uslov i) i neka je $M_0 \in D$ fiksirana tačka. Integral $\int_{M_0M} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ ne zavisi od izbora krive $\gamma \subseteq D$ (to je uslov ii) koja spaja tačke M_0 i M, pa možemo posmatrati skalarno polje $D \ni M \to f(M) = \int_{M_0M} \vec{A} \cdot d\vec{s}$. Dokažimo da je $grad\, f(M) = \vec{A}(M)$. Za tačku $h = (h^1, h^2, h^3)$ i vektor $\vec{h} = h^1\vec{i} + h^2\vec{j} + h^3\vec{k}$ važi:

$$f(M+h) - f(M) = \int_{MM+h} \vec{A}d\vec{s} = \int_0^1 \vec{A}(M+th)\vec{h}t =$$

$$= \int_0^1 [\vec{A}(M+th) - \vec{A}(M)]\vec{h}dt + \int_0^1 \vec{A}(M) \cdot \vec{h}dt = \vec{A}(M) \cdot \vec{h} + \alpha(h),$$

gdje

$$\frac{|\alpha(h)|}{|h|} = \frac{\int_0^1 [\vec{A}(M+th) - \vec{A}(M)] \cdot \vec{h}dt}{|h|} \leq \int_0^1 |[\vec{A}(M+th) - \vec{A}(M)]|dt =$$

$$= |[\vec{A}(M+\xi h) - \vec{A}(M)]| \to 0 \text{ kada } h \to 0..$$

Slijedi da je polje $\vec{A}$ potencijalno i da je f potencijal tog polja.

3) Neka je polje potencijalno i neka je $\gamma \subseteq D$ proizvoljna glatka kriva i $\varphi : [\alpha, \beta] \to R^3$ glatki put. Tada je

$$\int_\varphi \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_\alpha^\beta \vec{A}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) \cdot dt = \int_\alpha^\beta grad\, f(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt =$$

$$\int_\alpha^\beta f'(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt = \int_\alpha^{beta} f(\varphi(t))'dt = (f(\varphi(\beta)) - (f(\varphi(\alpha)) = f(M_2) - f(M_1),$$

gdje je M_2 krajnja aM_1 početna tačka krive γ.

Ako je kriva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$ dio po dio glatka i ako je početak glatkog dijela γ_i tačka M_i a kraj tačka M_{i+1}, onda na osnovu prethodnih razmatranja, imamo

$$\int_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{s} = f(M_2) - f(M_1) + f(M_3) - f(M_2) + \cdots + f(M_k) - f(M_{k-1}) = f(M_k) - f(M_1).$$

Integral $\int_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{s}$ zavisi samo od početka i kraja krive. Teorema je dokazana.

Definicija 2. *Vektorsko polje $\vec{A} : D \to V^3$ je bezvrtložno ako je $rot\, \vec{A}(M) = \vec{0}$ za svaku tačku $M \in D$.*

U teoremi 2 je dokazano da je svako bezvrtložno polje potencijalno. Da obrnuto tvrđenje ne važi pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1. Magnetno polje beskonačnog pravolinijskog provodnika, je bezvrtložno ali nije potencijalno. Zaista, imamo da je $\vec{H} = \frac{2I}{x^2+y^2} \cdot (-y\vec{i} + x\vec{j})$. Jednostavno se izračunava $rot\, \vec{H} = \nabla \times \vec{A} = 0$ u svakoj tački oblasti definisanosti $D = R^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in R\}$. S druge strane cirkulacija po kružnici zadatoj putem $\varphi(t) = (R\cos t, R\sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]\}$ (i svakoj drugoj dio po dio glatkoj zatvorenoj krivoj koja okružuje z-osu iznosi

$$\oint_\varphi \vec{A} d\vec{s} = 2I \int_0^{2\pi} \frac{R^2 dt}{R^2} = 4\pi I.$$

Ako kriva γ obmotava z-osu k puta onda je $\oint_\varphi \vec{H} d\vec{s} = 4k\pi I$. Na osnovu teoreme 3 slijedi da polje $\vec{H}$ nije potencijalno. Cirkulacija vektorskog polja $\vec{H}$ po zatvorenim krivim linijama koje ne okružuju z-osu jednaka nuli. Zaista, na svaku takvu krivu γ može se osloniti površ Σ koja leži u oblasti D u kojoj je polje definisano. Primjenjujući Stoksovu teoremu i koristeći činjenicu da je polje $\vec{H}$ bezvrtložno dobijamo da je $\int_\gamma \vec{H} d\vec{s} = \int\int_\Sigma rot\, \vec{H} d\vec{S} = 0$. Dalje, za svaku tačku $M \in D$ postoji kugla $O(M)$ oko tačke M u kojoj je polje $\vec{H}$ potencijalno. Kažemo da je $\vec{H}$ lokalno potencijalno. U vezi sa ovim pojmom važi slledeća teorema

Teorema 4. *Neka je vektorsko polje $\vec{A} : D \to V^3$ bezvrtložno u oblasti D. Tada je $\vec{A}$ lokalno potencijalno u D a ako je D prostopovezana oblast onda je A potencijalno u D.*

Dokaz. Ako je $M \in D$ i $O(M)$ kugla oko tačke M onda za svaku dio po dio glatku zatvorenu krivu $\gamma \subseteq O(M)$ postoji površ $\Sigma \subseteq O(M)$ koja se oslanja na γ. Na osnovu Stoksove teoreme slijedi da je tada $\int_\gamma \vec{A} d\vec{s} = \int\int_\Sigma rot\, \vec{A} dS = 0$. To znači da je polje $\vec{A}$ potencijalno u $O(M)$, odnosno da je lokalno potencijalno u D. Ako je oblast D prostopovezana onda postupajući na isti način, dobijamo da za svaku zatvorenu krivu γ postoji površ $\Sigma \subseteq D$ koja se oslanja na γ. Na osnovu Stoksove teoreme slijedi da je $\int\int_\Sigma rot\, \vec{A} dS = \int_\gamma \vec{A} d\vec{s} = 0$. Dakle, polje A je potencijalno.

Ako je polje $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ potencijalno i ako je φ njegov potencijal, onda je $\varphi + C$ potencijal polja $\vec{A}$. Ako su φ_1 i φ_2 potencijali polja $\vec{A}$, onda je $grad(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Slijedi da je $\varphi_1 - \varphi_2 = const$. Potencijal polja se nalazi tako što se fiksira tačka $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ i zatim se vrijednost potencijala u tački $M = (x, y, z) \in D$ računa po formuli

$$f(M) = \int_{M_0 M} \vec{A} d\vec{s}.$$

Kako je polje $\vec{A}$ potencijalno, to je svejedno kako se bira kriva koja spaja tačke M_0 i M. Međutim, prirodno je, i najjednostavnije za račun da se kriva k bude izlomljena linija: $k = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M$, gdje je duž M_0M_1 paralena $x-$osi, M_1M_2 paralelna $y-$osi, M_2M paralelno z-osi a(" + " označava nastavljanje duži). Dakle, tada je

$$f(M) = \int_{M_0M_1} \vec{A}d\vec{s} + \int_{M_1M_2} \vec{A}d\vec{s} \int_{M_2M} \vec{A}d\vec{s} =$$

$$\int_{x_0}^{x} A_1(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} A_2(x,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} A_2(x,y,z)dy$$

Primjer 2. Električno polje $\vec{E}$ koje formira naelektrisanje q smješteno u koordinatnom početku O, dato je formulom $\vec{E}(M) = \frac{\gamma q \vec{r}}{r^3}$, gdje je $\vec{r} = O\vec{M}$ radijus-vektor tačke M. Oblast $D = R^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ je prostopovezana. Pokazaćemo da je polje potencijalno. Račun ćemo sprovesti koristeći sferni sistem koordinata (ρ, φ, θ). U tom koordinatnom sistemu je $\vec{E} = \frac{\gamma q}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho$. Projekcije polja $\vec{E}$ na koordinatne ose, iznose $E_1 = E_\rho = \frac{\gamma q}{\rho^2}, E_2 = E_\varphi = 0, E_3 = E_\theta = 0$. Koristeći formule za računanje rotora u sfernim koordinatama dobijamo da je $rot\,\vec{E} = 0$ za $\rho \neq 0$. Polje je bezvrtložno, oblast je prostopovezana, dakle polje je potencijalno . Odredimo potencijal polja $\vec{E}$. Fiksirajmo tačku M_0 i neka je M tačka iz D. Tada integraleći po duži koja spaja tačke M_0 i M, dobijamo da je potencijal f polja $\vec{E}$ jednak

$$f = \gamma q \int_{\rho}^{\rho} \frac{dr}{r^2} = \frac{\gamma q}{r} + c.$$

Dakle, $\vec{E} = grad\,\frac{\gamma q}{r}$. Ako je sistem jedinica izabran tako da je $\gamma = 1$, onda se dobija formula $\vec{E} = grad\,\frac{q}{r}$.

Zadatak. U cilindričkom sistemu koordinata zadato je polje $\vec{A} = 2\rho z \sin\varphi \cdot \vec{e}_\rho + \rho z \cos\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \rho^2 \sin\varphi \cdot \vec{e}_z$. Dokazati da je polje $\vec{A}$ potencijalno i odrediti njegov potencijal.

Zadatak. Neka je $\vec{F}$ neprekidno vektorsko polje u R^2 ili R^3, svejedno) i Γ prosta zatvorena kriva. Dokazati da za svako $x \in \Gamma$ postoji $y \in \Gamma$ i put γ iz x u y tako da je rad polja $\vec{F}$ po putu γ jednak nuli.

Solenoidno vektorsko polje

Definicija 1. *Vektorsko polje $\vec{A} : D \to V^3$ je solenoidno u oblasti D ako je u svakoj tački $M \in D, div\,\vec{A}(M) = 0$.*

Iz fizičkog značenja divergencije slijedi da ako je polje A solenoidno, onda u oblasti D ne postoji niti izvor niti ponor polja $\vec{A}$. Zbog toga se za polje $\vec{A}$ koje zadovoljava uslov $div\,\vec{A} = 0$ kaže da je bezizvorno.

Teorema 1. *Neka je $\vec{A} : D \to V^3$ vektorsko polje diferencijabilno u oblasti D. Polje $\vec{A}$ je solenoidno ako je ispunjen jedan od sledeća dva ekvivalentna uslova*

i) Protok vektorskog polja $\vec{A}$ kroz svaku dio po dio glatku zatvorenu površ Σ jednak je nuli ;

i) Za svake dvije dio po dio glatke površi $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq D$ koje se oslanjaju na istu dio po dio glatku zatvorenu krivu γ važi

$$\int\int_{\Sigma_1^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

gdje znak " + " *označava da su površi* Σ_1 *i* Σ_2 *orjentisane saglasno sa izabranom orjentacijom krive* γ.

Ako je oblast D *prosto-povezana i ako je polje* $\vec{A}$ *solenoidno onda su ispunjeni uslovi i) i ii).*

Dokaz. Dokažimo da su uslovi i) i ii) ekvivalentni. Neka je ispunjen uslov i) i neka su $\Sigma_1 \subseteq D$ i $\Sigma_2 \subseteq D$ površi oslonjene na dio po dio glatku krivu $\gamma \subseteq D$ orjentisane saglasno orjentaciji krive γ. Neka je $\Sigma_3^+ \subseteq D$ nova površ oslonjena na γ i orjentisana saglasno orjentaciji te krive, pri čemu Σ_3 niti sa Σ_1 nita sa Σ_2 nema drugih zajedničkih tačaka osim tačaka krive γ. Tada je $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ zatvorena dio po dio glatka površ i važi

$$0 = \int\int_{\Sigma+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_3^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \int\int_{\Sigma_1^-} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_3^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} - \int\int_{\Sigma_1^+} \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

odnosno

$$\int\int_{\Sigma_3^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_1^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Slično se dokazuje da je

$$\int\int_{\Sigma_3^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

odakle slijedi tvrđenje ii).

Neka je sada ispunjen uslov i). Ako je $\Sigma \subseteq D$ zatvorena dio po dio glatka površ, onda postoji dio po dio glatka zatvorena kriva γ koja dijeli površ Σ na dvije površi, Σ_1 i Σ_2, koje se oslanjaju na krivu γ. Iz jednakosti

$$\int\int_{\Sigma_1^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

slijedi da je

$$0 = \int\int_{\Sigma_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} - \int\int_{\Sigma_1^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \int\int_{\Sigma_1^1} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{\Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

što znači da je ispunjen uslov i).

Neposredno iz definicije divergencije dobijamo da iz uslova i) slijedi da je polje $\vec{A}$ solenoidno. Kako iz uslova ii) slijedi i), to je dokazan prvi dio teoreme.

Ako je oblast $D \subseteq R^3$ jednostruko-povezana i ako je $\Sigma \subseteq D$ dio po dio glatka zatvorena površ koja obuhvata tijelo V, onda, na osnovu formule Gaus-Ostrogradskog, slijedi da je protok vektorskog polja kroz površ $\int\int_{\Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_V div\, \vec{A} dV = 0$.

Za višestruko povezane oblasti protok solenoidnog polja kroz zatvorenu površ može biti različit od nule. U vezi sa ovim pitanjima je i sledeći primjer.

Primjer 1. Električno polje $\vec{E} = \frac{\gamma q \cdot \vec{r}}{r^3}$ iz jednog od primjera iz prethodnih paragrafa je solenoidno u oblasti $D = R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (divergencija se lako računa prelazeći na sferni sistem koordinata i dobija se da je $div\, \vec{E} = 0$). Međutim, protok polja $\vec{E}$ kroz sferu S sa centrom u koordinatnom početku iznosi

$$\int\int_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int\int_{S^+} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int\int_{S^+} \vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} dS = 4\gamma\pi q.$$

Pretpostavimo sada da je Γ dio po dio glatka zatvorena kriva i ako kroz svaku tačku te krive postavimo vektorske linije. Skup svih takvih linija je površ $\Sigma(\Gamma)$ koja se naziva vektorska cijev (tuba). Bilo koja druga linija koja ne prolazi kroz krivu Γ ili u cjelosti leži u vektorskoj cijevi ili su u cjelosti van nje.

Definicija 2. *Intenzitet vektorske cijevi Σ polja A je protok tog polja kroz poprečni presjek te cijevi.*

Teorema 2. *Ako je $D \subseteq R^3$ jednostruko-povezana oblast i ako je $\vec{A} : D \to V^3$ solenoidno polje, onda je intenzitet vektorske cijevi konstantan duž cijevi.*

Dokaz. Neka su S_1 i S_2 poprečni presjeci cijevi Σ. Protok polja $\vec{A}$ kroz spoljašnju stranu zatvorene površi $\Sigma^+ + S_1^+ S_2^+$jednak je nuli. Slijedi da je

$$\int\int_{\Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \int\int_{\S_1^-} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \int\int_{S_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Vektorske linije sa površi Σ su kolinearne sa poljem $\vec{A}$, pa je $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ na Σ. Slijedi da je

$$\int\int_{\S_1^-} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_2^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Teorema je dokazana.

Ako je $\vec{A}$ polje brzina stacionarnog tečenja bez izvora i ponora, onda gornje svojstvo označava da je protok za jedinicu vremena kroz presjeke vektorske cijevi jednako za sve presjeke.

Dalje, ako je $\vec{A} : D \to V^3$ netrivijalno solenoidno polje, onda vektorske linije ne mogu počinjati niti završavati unutar polja. Te linije su ili zatvorene ili završavaju na granici polja ili imaju beskonačne petlje. Zaista, ako bi se neka cijev završavala u jednoj tački M, onda bi iz zakona konstantnosti intenziteta vektorskog polja slijedi da je taj intenzitet jednak nuli. To je nemoguće, jer je polje $\vec{A} \neq 0$. Ako se pretpostavi da se vektorska cijev završava unutar oblasti D i to konačnim presjekom S, onda će u tačkama tog presjeka polje biti prekidno, što je suprotno pretpostavci.

Primjer 2. Neka su unutar sfere S raspoređena naelektrisanja $q_1, \ldots, q_k$. Njihovi položaji su određeni vektorima položaja $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$. Električno polje $\vec{E}$ zadato je tada formulom

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Protok ovog polja kroz sferu S orjentisanu pomoću spoljnih normala (i kroz bilo koju drugu dio po dio glatku zatvorenu površ koja obuhvata sva naelektrisanja) iznosi

$$\Pi = \int\int_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_{i=1}^{k} q_i.$$

Ako sada pretpostavimo da je naelektrisanje raspoređno po oblasti Ω ograničenoj zatvorenom površi Σ sa zapreminskom gustinom zadatom funkcijom $\Omega \ni M \to \rho(M)$, onda zamjenjujući S sa Σ i praveći granični prelaz, iz gornje formule dobijamo jednakost

$$\int\int_{\Sigma^+} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int\int\int_{\Omega} \rho dV.$$

Ako obje strane podijelimo sa $\mu(\Omega)$ pustimo da $\Sigma \to M \in \Omega$, dobićemo poznatu Gausovu teoremu:

$$div\, E(M) = 4\pi\rho(M).$$

Slična relacija važi, naravno, i za gravitaciono polje.

Definicija 3. *Vektorsko polje $W : D \to V^3$ je vektorski potencijal vektorskog polja $\vec{A} : D \to V^3$ ako je $\vec{A}(M) = rot\, W(M)$ u svakoj tački $M \in D$.*

Neka je $\vec{W}$ vektorski potencijal vektorskog polja $\vec{A}$. Ako je f skalarno polje koje ima gradijent, onda je i $\vec{W} + grad\, f$ vektorski potencijal polja $\vec{A}$. Zaista, imamo da je $rot(\vec{W} + grad\, f) = rot\, W + rot(grad\, f) = rot\, W = \vec{A}$. Ako je oblast D prosto-povezana onda važi i obrnuto tvrđenje: Ako su $\vec{W}$ i $\vec{W}_1$ vektorski potencijali polja $\vec{A} : D \to V^3$, onda je $rot(\vec{W} - \vec{W}_1) = 0$, odakle slijedi da je polje $\vec{W} - \vec{W}_1$ potencijalno, odnosno da je $\vec{W} - \vec{W}_1 = grad\, f$ za neko skalarno polje f.

Teorema 3. *Neprekidno-diferencijabilno polje $\vec{A} : D \to V^3$ je solenoidno ako i samo ako ima vektorski potencijal.*

Dokaz. Ako je $\vec{W}$ vektorski potencijal polja $\vec{A}$, onda je $\vec{A} = rot\, \vec{W}$, pa je $div\, \vec{A} = div(rot\, \vec{W}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$. Obrnuto, neka je polje $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ solenoidno. Tada tvrđenje slijedi iz rešivosti uslova $\vec{A} = rot\, \vec{W} = rot(W_1\vec{i} + W_2\vec{j} + W_3\vec{k})$, odnosno iz rešivosti sistema diferencijalnih jednačina

$$A_1 = \partial_2 W_3 - \partial_3 W_2,\ A_2 = \partial_3 W_1 - \partial_1 W_3, A_3 = \partial_1 W_2 - \partial_2 W_1$$

po W_1, W_2 i W_3.

Primjer 3. Neka je $\vec{\omega}$ konstantan vektor i $\vec{A}$ polje zadato formulom $\vec{A} = r(\vec{\omega} \times \vec{r})$. Koristeći svojstva operatora ∇ dobijamo da je

$$div\, \vec{A} = \nabla \cdot (r(\vec{\omega} \times \vec{r})) = (\nabla r)(\vec{\omega} \times \vec{r}) + r\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$grad\, r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + r[\vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{\omega}) - \omega(\nabla \times \vec{r})] =$$

$$\frac{\vec{r}}{r}(om\vec{e}ga \times \vec{r}) + r[\vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{\omega}) - \omega(\nabla \times \vec{r})] = 0.$$

Dakle, $div\, \vec{A} = 0$, što znači da je polje solenoidno. Odredimo (jedan) vektorski potencijal polja $\vec{A}$. Imamo da je $\vec{A} = r\omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$. Jednačine iz kojih se određuju komponente vektorskog potencijala glase

$$\partial_2 W_3 - \partial_3 W_2 = -r\omega y,\ \partial_3 W_1 - \partial_1 W_3 = r\omega x,\ \partial_1 W_2 - \partial_2 W_1 = 0.$$

Vektorski potencijal se određuje jednoznačno sa tačnošću do $grad\, f$. Možemo pretpostaviti da je $W_2 = 0$. Tada dobijamo da je $\partial_2 W_1 = 0$, odnosno da je $W_1 = \varphi(x, z)$. Dalje, iz prve jednačine slijedi da je $\partial_2 W_3 = -r\omega y$, odnosno

$$W_3 = \omega \int y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dy + f(x, z) = -\frac{\omega r^3}{3} + f(x, z).$$

Postavaljajući dobijeno u drugu jednačinu imamo

$$\partial_1 W_3 = -\omega x r + \partial_1 f, \partial_3 W_1 = \partial_2 \varphi.$$

Funkcije f i φ moraju zadovoljavati uslov $\partial_2\varphi - \partial_1 f = 0$. Postavljajući $f = \varphi = 0$, dobićemo jedan od vektorskih potencijala polja $\vec{A} : \vec{W} = -\frac{r^3\vec{\omega}}{3}$.

Laplasovo vektorsko polje

Operatori gradijenta, rotora i divergencije su diferencijalni operatori prvog reda. Pri tome su $grad\, f$ i $rot\, \vec{A}$ vektorska polja a $div\, A$ je skalarno polje. Tako možemo praviti diferencijalne operatore drugog reda

$$div(grad\, f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f, rot(grad\, f) = \nabla \times (\nabla f) = 0,$$

$$div\, rot\, f = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, rot(rot\, f) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A},$$

$$grad(div\, \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \Delta\vec{A}.$$

U gornjim formulama smo skalarni kvadrat operatora ∇, kao i u paragrafu 6 označili sa Δ. To je Laplasov operator ili Laplasijan i on se može primjenjivati kako na skalarno tako i na vektorsko polje. Formule za računanje Laplasijana skalarnog polja u Dekartovim i krivolinijskim koordinatama izvedene su u §5. Laplasijan vektorskog polja $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ jednak je

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_1\vec{i} + \Delta A_2\vec{j} + \Delta A_3\vec{k}.$$

Grinove formule

U teoriji polja se neki specijalni slučajevi formule Gaus-Ostrogradskog zovu Grinove formule. Neka su, dakle, f i φ skalarna polja i $\vec{A} = f\, grad\, \varphi$ vektorsko polje. Divergencija polja $\vec{A}$ jednaka je

$$div\, \vec{A} = \nabla(f\, grad\, \varphi) = \nabla \cdot (f\nabla\varphi) = \nabla f \cdot \Delta\varphi + f\nabla^2\varphi = grad\, f \cdot grad\, \varphi + f\Delta\varphi.$$

Dalje skalarni proizvod možemo napisati u obliku

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = f\, grad\, \varphi \cdot \vec{n} = f \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}.$$

Formula Gaus-Ostrogradskog za polje $\vec{A}$ može biti napisana u obliku

$$\int\int_\Sigma f \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} dS = \int\int\int_\Omega (grad\, f \cdot grad\, \varphi + f\Delta\varphi) dV.$$

Ovo je prva Grinova formula.

Ako funkcije f i φ zamijene mjesta dobićemo

$$\int\int_\Sigma \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial\vec{n}} dS = \int\int\int_\Omega (grad\, f \cdot grad\, \varphi + \varphi\Delta f) dV.$$

Iz poslednje dvije formule dobijamo drugu Grinovu formulu

$$\int\int_\Sigma (f \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} dS - \int\int_\Sigma \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial\vec{n}} dS = \int\int\int_\Omega (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f) dV.$$

Iz prve Grinove formule, postavljajući $\varphi = f$, dobijamo treću Grinovu formulu

$$\int\int_{\Sigma} f \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \int \in \int_{\Omega} [(grad\, f)^2 + f\Delta\varphi] dV.$$

Grinove formule se mogu izvesti i za funkcije dvije promjenljive. Ako je $\vec{\tau}$ jedinični vektor tangente, $\vec{n}$ jedinični vektor normale, a α ugao između x-ose i tangente $\vec{\tau}$, onda je $\vec{\tau} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}, \vec{n} = \sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha j$. Primjenjujući Grinovu foormulu na integral $\oint_{\gamma} A \cdot \vec{n} ds$ dobijamo

$$\oint_{\gamma} A \cdot \vec{n} ds = \oint_{\gamma} -A_1 dy + A_2 dx = \int\int (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2) dxdy.$$

Ako specijalno postavimo $\vec{A} = f\, grad\, \varphi$, dobićemo prvu Grinovu formulu za ravna polja:

$$\oint_{\gamma} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} ds = \int\int_{D} (grad\, f \cdot grad\, \varphi + f\Delta\varphi) dxdy.$$

Druga i treća formula se dobijaju kao i u slučaju polja u trodimenzionalnom prostoru i glase

$$\oint_{\gamma} (f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}) ds = \int\int_{D} (f \cdot \nabla\varphi - \varphi\Delta f) dxdy,$$

$$\int\int_{\Sigma} (f \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \int\int_{D} [(grad\, f)^2 + f\Delta f] dxdy.$$

Harmonijske funkcije i integralna reprezentacija funkcija

Definicija 1. *Vektorsko polje $\vec{A} : D \to V^3$ je Laplasovo ako je ono potencijalno i solenoidno.*

U prosto povezanoj oblasti $D \subseteq R^3$ polje $\vec{A} : D \to V^3$ je Laplasovo ako i samo ako je $div\, \vec{A} = 0$ i $rot\, \vec{A} = 0$.

Ako je polje $\vec{A}$ Laplasovo, onda, zbog potencijalnosti, postoji skalarno polje *(*funkcija*)* $f : D \to R$ tako da je $\vec{A} = grad\, f$. Funkcija f je potencijal polja $\vec{A}$. Zbog slenoidnosti polja $\vec{A}$ imamo da je $div\, \vec{A} = div(grad\, f) = \Delta f = 0$. Dakle, potencijal f Laplasovog polja $\vec{A}$ zadovoljava uslov

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0.$$

Jednačina koju smo napisali se naziva Laplasova jednačina. Za funkciju koja u oblasti D ima neprekidne izvode do drugog reda i koja je rešenje Laplasove jednačine kažemo da je harmonijska funkcija u D.

Prvi primjer harminjske funkcije koji ćemo ovdje navesti je funk $f(x, y, z) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}, (x, y, z) \in R^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$. Da bismo to dokazali pogodno je koristiti sferni sistem koordinata i formule za Laplasijan u tom sistemu. Tako imamo da je $f(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\rho}$, pa je (vidjeti formule iz §6)

$$\Delta\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\partial_1(\rho^2\partial_1(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{\rho^2}\partial_1(\rho^2\frac{-1}{\rho^2}) = \frac{1}{\rho^2}\partial_1(-1) = 0.$$

U ravni, harmonijska je i funkcija koja se u polarnom sistemu koordinata zadaje formulom $f(\rho) = \ln\frac{1}{\rho}$. Zaista, imamo da je

$$\Delta \ln\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\partial_1(\rho\partial_1(\ln\frac{1}{\rho})) = \frac{1}{\rho^2}\partial_1(-1) = 0.$$

Primjer Laplasovog polja je električno polje $\vec{E} = \frac{\gamma q}{r^3}\cdot\vec{r}, (r \neq 0)$. Naime, ranije je bilo dokazano da je ovo polje potencijalno i da mu je potencijal jednak $\frac{\gamma q}{r}$ a to je harmonijska funkcija.

Izvedimo formulu po kojoj se vrijednost funkcije u tački M računa pomoću trostrukog i površinskih integrala te funkcije.

Teorema 1. *Ako je funkcija $f : \overline{\Omega} \to R$ neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodima do drugog reda u oblasti $\overline{\Omega} \subseteq R^3$ koja je ograničena dio po dio glatkom zatvorenom površi Σ, onda je u tački $P \in \Omega$*

$$f(P) = \frac{1}{4\pi}(\int\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{df}{d\vec{n}}dS - \int\int_{\Sigma} f\cdot\frac{d}{d\vec{n}}\frac{1}{r}dS - \int\int\int_{\Omega}\frac{1}{\rho}\Delta f dxdydz),$$

gdje je sa r označeno rastojanje između fiksirane tačke P i tačke M.

Dokaz. Neka je $G = K(P,\epsilon)$ kugla sa centrom u P i poluprečnikom ε. Funkcija $\frac{1}{r}$ je harmonijska u $\Omega\backslash G$. Primjenjujući drugu Grinovu formulu na funkcije f i $\varphi = \frac{1}{r}$ u oblasti $\Omega\backslash G$, dobijamo

$$\int\int_{\Sigma\cup\partial G^-}\left(f\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\frac{1}{r}) - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\right)dS = -\int\int\int\int_{\Omega\backslash G}\frac{1}{r}\Delta d dV. \qquad (*)$$

Normala na unutrašnju stranu sfere je usmjerena po radijusu ka centru sfere, pa je

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\frac{1}{r}) = -\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r^2}.$$

Dalje, primjenjući teoremu o srednjoj vrijednosti imamo

$$I_1 = \int\int_{\partial G^-} f\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\frac{1}{r})dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\int_{\partial G^-} f dS = \frac{1}{\varepsilon^2}f(M_1)4\pi\varepsilon^2 = f(M_1)4\pi,$$

$$I_2 = \int\int_{\partial G^-}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dS = -\frac{1}{\varepsilon}\int\int_{\partial G^-}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dS = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}f(M_2)4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}f(M_2).$$

Postavljajući dobijene formule u (*) dobijamo

$$f(M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\int\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{df}{d\vec{n}}dS - \int\int_{\Sigma} f\cdot\frac{d}{d\vec{n}}\frac{1}{r}dS - \int\int\int_{\Omega\backslash G}\frac{1}{\rho}\cdot\Delta f dV + 4\pi\varepsilon\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(M_2)\right).$$

Pustimo sada da $\varepsilon \to 0$. Površinski integrali u gornjoj formuli ne zavise od ε, dalje, $4\pi\varepsilon\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(M_2) \to 0$, a nesopstveni integral $\int\int\int_{\Omega}\frac{1}{\rho}\cdot\Delta f dxdydz$ je granična vrijednost integrala $\int\int\int_{\Omega\backslash G}\frac{1}{\rho}\cdot\Delta f dV$ kada $\epsilon \to 0$. Kada sve to uvrstimo u formulu dobijamo tvrđenje teoreme.

Specijalno, ako je f harmonijska funkcija gornja formula glasi

$$f(P) = \frac{1}{4\pi}\left(\int\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{df}{d\vec{n}}dS - \int\int_{\Sigma} f\cdot\frac{d}{d\vec{n}}\frac{1}{r}dS\right)$$

i $f(P)$ je linearna kombinacija površinskih integrala.

Formula analogna formuli iz tvrđenja teoreme 1 važi i za funkcije dvije promjenljive. Naime, važi sledeća teorema

Teorema 2. *Ako je funkcija $f : \overline{\Omega} \to R$ neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodima do drugog reda u oblasti $\bar{\Omega} \subseteq R^2$ koja je ograničena konturom γ, onda je u tački $P \in \Omega$*

$$f(P) = \frac{1}{2\pi}\left(\oint_\gamma \ln\frac{1}{\rho}\cdot\frac{df}{d\vec{n}}ds - \oint_\gamma f\cdot\frac{d}{d\vec{n}}\ln\frac{1}{\rho}ds - \int\int_\Omega \ln\frac{1}{\rho}\cdot\Delta f dxdy\right),$$

gdje je sa r označeno rastojanje između fiksirane tačke P i promjenljive tačke M sa krive gamma

Dokaz se izvodi na sličan našin kao i dokaz prethodne teoreme, korišćenjem druge Grinove formule za dvije promjenljive, pri čemu se se uzima da je $\varphi = \ln\frac{1}{r}$, harmonijska funkcija.

Iz prethodne teoreme slijedi da ako je f harmonijska funkcija, onda je

$$f(P) = \frac{1}{2\pi}(\oint_\gamma \ln\frac{1}{\rho}\cdot\frac{df}{d\vec{n}}ds - \oint_\gamma f\cdot\frac{d}{d\vec{n}}\ln\frac{1}{\rho}ds).$$

Dokažimo nekoliko svojstava harmonijskih funkcija.

Teorema 3. *Ako je funkcija $f : \Omega \to R$ harmonijska u oblasti $\Omega \subseteq R^3$ i ako je Σ dio po dio glatka zatvorena površ koja leži u Ω, onda je*

$$\int\int_\Sigma \frac{df}{d\vec{n}}dS = 0.$$

Dokaz. Tvrđenje se dobija direktno iz druge Grinove formule tako što se postavi $\varphi = 1$.

Teorema 4. (Teorema o srednjoj vrijednost) *Ako je funkcija $f : \Omega \to R$ harmonijska u kugli $\Omega_R \subseteq R^3$ i ako je P centar a Σ_R površ te kugle, onda je*

$$f(P) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Sigma_R} fdS.$$

Dokaz. Na sferi Σ_R je $r = R, \frac{\partial\frac{1}{r})}{\partial\vec{n}} = -\frac{1}{r^2=\frac{1}{R^2}}$. Primjenjujući formulu za vrijednost harmonijske funkcije u unutrašnjoj tački i prethodnu teoremu, dobijamo

$$f(P) = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{R}\cdot\int\int_{\Sigma_R}\frac{df}{d\vec{n}}dS + \frac{1}{R^2}\cdot\int\int_{\Sigma_R} fdS = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Sigma_R} fdS.$$

Teorema 5. *Neka je $\Omega \subseteq R^3$ oblast ograničena dio po dio glatkom zatvorenom površi. Ako je funkcija $f : \bar{\Omega} \to R$ neprekidna u $\bar{\Omega} \subseteq R^3$ i harmonijska u Ω, i ako pri tome nije konstantna, onda ona svoju najveću i najmanju vrijednost dostiže na granici $\partial\Omega$ oblasti Ω.*

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da funkcija f dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost na $\overline{\Omega}$. Dokazaćemo samo dio tvrđenja koji se odnosi na maksimum. Drugi dio se, naravno, izvodi na sličan način. Pretpostavimo da najveću vrijednost funkcija f dostiže u unutrašnjoj tački M_0. Bar za jednu takvu tačku M_0 postoji okolina oko tačke M_0 i tačka M iz te okoline tako da je $f(M) < f(M_0)$. Neka je Σ sfera sa centrom M_0 i poluprečnikom R. Zbog neprekidnosti funkcije f nejednakost $f(M) < f(M_0)$ će biti ispunjena na nekom dijelu sfere $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$. Tada je

$$f(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\int_{\Sigma} f dS = \frac{1}{4\pi R^2} \left(\int\int_{\Sigma_1} f dS + \int\int_{\Sigma \setminus \Sigma_1} f dS \right) <$$

$$\frac{f(M_0)}{4\pi R^2} (\int\int_{\Sigma_1} dS + \int\int_{\Sigma \setminus \Sigma_1} dS = f(M_0).$$

Kontradikcija. Teorema je dokazana.

Direktne posledice prethodne teoreme su sledeća tvrđenja:

Posledica 1. *Ako je funkcija $f : \overline{\Omega} \to R$ neprekidna na $\overline{\Omega} \subseteq R^3$ i harmonijska u Ω, i ako svoju najveću (najmanju) vrijednost dostiže u unutrašnjoj tački skupa Ω, onda je $f \equiv const$ na Ω.*

Posledica 2. *Ako je funkcija $f : \overline{\Omega} \to R$ neprekidna u $\overline{\Omega} \subseteq R^3$ i harmonijska u Ω, i ako na granici $\partial\Omega$ oblasti Ω ima konstantnu vrijednost, onda je $f \equiv const$ na Ω.*

Dokaze ostavljamo čitaocu.

Dirihleov zadatak

Na jednom važnom zadatku iz matematičke fizike ilustrovaćemo neke mogućnosti primjene gornjih formula. To je Dirihleov zadatak:

Naći rešenje Puasonove jednačine:

$$\Delta f = g$$

u oblasti $\Omega \subseteq R^3$ koje na granici Σ oblasti Ω uzima zadane vrijednosti

$$f|_{\Sigma} = \alpha.$$

Pri tome se pretpostavlja da je Σ dio po dio glatka zatvorena površ i da su zadate funkcije $g : \Omega \to R$ i $\alpha : \Sigma \to R$ neprekidne na Ω odnosno na Σ. Pretpostavljamo da zadatak ima rešenje.

Teorema 6. *Rešenje Dirihleovog zadatka je jedinstveno i ono neprekidno zavis od graničnih uslova.*

Dokaz. Još jednom naglašavamo da tvrđenje važi pod prethodno navedenim uslovima, dakle pod pretpostavkom o neprekidnosti zadatih funkcija i pod pretpostavkom da ono postoji. Čitaocu ostavljamo da nađe primjer Dirihleovog zadatka koji nema rešenje.) Pretpostavimo da postoje dva rešenja f_1 i f_2 ovog zadatka. Razlika $f = f_1 - f_2$ je rešenje jednačine $\Delta f = 0$ i pri tome $f|_{\Sigma} = 0$. Funkcija f je dakle harmonijska i ona je na granici jednaka nuli. Na osnovu posljedice 2 teoreme 5 slijedi da je $f \neq 0$. Jedinstvenost je dokazana.

Dokažimo neprekidnu zavisnost rešenja od graničnih uslova. Neka su f_1 i f_2 rešenja koja odgovaraju graničnim uslovima $f_1|_{\Sigma} = \alpha_1$, odnosno $f_2|_{\Sigma} = \alpha_2$ i neka je $|\alpha_1(N) - \alpha_2(N)| < \epsilon$. Funkcija $f = f_1 - f_2$ je rešenje Laplasove jednačine $\Delta f = 0$ uz granični uslov

$f|_\Sigma = \alpha$, gdje je $\alpha(N) = \alpha_(N) - \alpha_2(N), N \in \Sigma$. Funkcija f je harmonijska, pa dakle i najmanju i najveću vrijednost dostiže na granici. Slijedi da je $|f(M)| < \epsilon$, a odavde slijedi tvrđenje teoreme.

Dokazano tvrđenje je jako važno i sa stanovišta numeričkog rešavanja i fizičkog značenja zadatka.

Da bi se riješio postavljeni zadatak koristićemo formulu iz teoreme 1 za vrijednost funkcije u unutrašnjoj tački oblasti. Međutim, tu formulu moramo transformistai tako da se pojavljuju vrijednosti funkije na granici a ne i njihovi izvodi. U drugoj Grinovoj formuli umjesto funkcije φ postavimo harmonijsku funkciju $\Phi(P, M)$. Tada imamo

$$0 = \frac{1}{4\pi}\left[-\int\int_\Sigma f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}dS + \int\int_\Sigma \Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dS - \int\int\int_\Omega \Phi\Delta f dV\right].$$

Odavde i iz teoreme 1 slijedi da je

$$f(P) = \frac{1}{4\pi}\left[\int\int_\Sigma f(\frac{1}{r}+\Phi)\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dS - \int\int_\Sigma f\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\frac{1}{r}+\Phi)dS - \int\int\int_\Omega(\frac{1}{r}+\Phi)\Delta f dV\right].$$

Ako uvedemo novu funkciju $G(P, M) = \frac{1}{r} + \Phi = \frac{1}{r_{MP}} + \Phi(P, M)$, prethodna formula će dobiti oblik

$$f(P) = \frac{1}{4\pi}\left[\int\int_\Sigma fG\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dS - \int\int_\Sigma f\cdot\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS - \int\int\int_\Omega G\Delta f dV\right].$$

Formula važi za bilo koju harmonijsku funkciju, a harmonijska funkcija je jednoznačno određena svojim vrijednostima na granici. Izaberimo Φ tako da je $\Phi(P, M)|_\Sigma = \Phi(P, N) = -\frac{1}{r_{NP}}$. Pri tome uvedena funkcija G na granici uzima vrijednost nula: $G(P, M) = G(P, N) = 0$. Ovdje je P fiksirana tačka, N proizvoljna tačka granice Σ. Definisana funkcija se naziva Grinovom funkcijom za Dirihleov zadatak.

Ako se na neki način odredi Grinova funkcija za Dirihleov zadatak, onda se rješenje zadatka može direktno ispisati:

$$f(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_\Sigma \alpha\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS - -\frac{1}{4\pi}\int\int\int_\Omega G\Delta g dV.$$

Primjetimo da Grinova funkcija zavisi od oblika površi Σ i nije vezana za granične uslove niti za samu jednačinu. Dovoljno je jednom naći Grinovu funkciju za zadatu oblast a onda se može direktno riješiti cijela serija zadataka za različite granične uslove. Napišimo i formulu za rešenje Laplasove jednačine. Imamo da je

$$f(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_\Sigma \alpha\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS.$$

Razmotrimo zadatak određivanja Grinove funkcije za sferu sa centrom u nuli i radijusom R. Ako je P fiksirana a N proizvoljna tačka sa sfere i ρ rastojanje od O do P, onda prvo treba naći harmonijsku funkciju $\Phi(P, M)$, tako da je

$$\Phi|_\Sigma = \Phi(P, N) = -\frac{1}{r_{NP}}.$$

Neka je tačka P' simetrična tački P u odnosu na sferu Σ. Lako se dobija da je $\vec{OP'} = \frac{r^2}{R^2}\vec{OP}$. Funkcija $\Omega \mapsto \frac{1}{r_{P'M}}$ je harmonijska. Ako funkciju $\Phi(P, M)$ biramo tako da je $\Phi(P, M) = \frac{c}{r_{P'M}}$, pri čemu se konstantu c određuje iz graničnih uslova, tada se dobija $r^2 P'N = c^2 r_{PN}^2$ a zatim i $c = -\frac{R}{\rho}$. To znači da je

$$\Phi(P, m) = -\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_{P'M}} \text{ i } G(P, m) = \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_{P'M}}.$$

Odredili smo Grinovu gunkciju za sferu. Da bismo formulu izveli do kraja treba još izračunati $\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}$. Imamo

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_\Sigma = \frac{\partial G}{\partial \vec{r}}|_\Sigma = grad\, G \cdot \frac{\vec{ON}}{R}.$$

Za gradijent funkcije G a zatim i za izvod po normali jednostavno se dobija da je

$$grad\, G(P, N) = \frac{\rho^2 - R^2}{R^2 r_{PN}^2} \text{ i } \frac{tialG}{tial\vec{n}}| = \frac{\rho^2 - R^2}{R} \cdot \frac{1}{r_{PN}^3}.$$

Tako dobijamo da je rešenje Dirihleovog zadatka dato formulom

$$f(P) = \frac{R^2 - r^2}{4R\pi} \int\int_\Sigma \frac{\alpha(N)}{r_{PN}^3} dS - \frac{1}{4\pi} \int\int\int_\Omega (\frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_{P'M}}) g(M) dV.$$

Specijalno, rešenje Laplasove jednačine za sferu je dato površinskim integralom

$$f(P) = \frac{R^2 - r^2}{4R\pi} \int\int_\Sigma \frac{\alpha(N)}{r_{PN}^3} dS$$