UNIVERZITET CRNE GORE Stud.god. 2017/18
GRAĐEVINSKI FAKULTET U PODGORICI
Specijalističke studije: MENADŽMENT U GRAĐEVINARSTVU
Predmet: **Kvantitativne metode u građevinskom menadžmentu**

PODSJETNIK sa formulama za prvi kolokvijum

ELEMENTI KOMBINATORIKE

BEZ PONAVLJANJA

broj permutacija od n elemenata	$P(n) = n!$
broj varijacija $r-$tog razreda od n elemenata	$V_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$
broj kombinacija $r-$tog razreda od n elemenata	$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

S PONAVLJANJEM

br. permutacija s pon. od n el.	$\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$
br. varijacija s pon. $r-$tog raz. od n el.	$\overline{V}_n^{(r)} = n^r$
br. kombinacija s pon. $r-$tog raz. od n el.	$\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$

IZBOR - s vraćanjem

IZBOR: r-čl. uzorka iz n-čl. skupa različitih elemenata	
nije važan poredak	$\overline{C}_n^{(r)}$
važan poredak	$\overline{V}_n^{(r)}$

IZBOR - bez vraćanja

IZBOR: r-čl. uzoraka iz n-čl. skupa različitih elemenata	
nije važan poredak	$C_n^{(r)}$
važan poredak	$V_n^{(r)}$

VJEROVATNOĆA UNIJE DOGAĐAJA

- **u slučaju isključivih događaja**: Ako su događaji A1, A2, ..., An takvi da su ma koja dva uzajamno isključiva, tj. AiAj = Φ, za i j, i,j=1,2,...,n, tada na osnovu aksiome 3 vjerovatnoća njihove unije (zbira) je jednaka zbiru vjerovatnoća tih događaja:

$$P(A1+A2+A3+...+An)=P(A1)+P(A2)+P(A3)+...+P(An)$$

- **u slučaju da događaji nijesu isključivi:** Neka su A i B bilo koji događaji iz S takvi da je A∩ B≠Φ , tada je

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)- P(AB).$$

- za tri događaja je:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)- P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

USLOVNA VJEROVATNOĆA

- Ako je P(B)>0, onda je uslovna vjerovatnoća događaja A, pod uslovom da se realizovao događaj B, jednaka

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- kod nezavisnih događaja je : P(A|B)=P(A) i P(B|A)=P(B), pa kad se to zamijeni u formulu uslovne vjerovatnoće

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A), \quad \text{slijedi: } P(AB)=P(A)\text{x } P(B)$$

BAJESOVA TEOREMA

Bayesovu formulu koristimo kad želimo naći istinitu hipotezu iz skupa od n postavljenih hipoteza Hi; i = 1,2...n; ako znamo da se dogodio događaj A. Za svako i računamo P(Hi|A). Ispravnom se smatra ona hipoteza Hi0 za koju je P(Hi0|A)≈1
Ako su:

- H1;H2.....Hn međusobno nesaglasni (isključivi) događaji i
- P(Hi) > 0 (i = 1,2..n) i
- H1 + H2 + + Hn = S, tada je

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A|H_k)}$$

FUNKCIJA RASPODJELE VJEROVATNOĆE ZA DISKRETNU SLUČAJNU PROMJENLJIVU

- **ZAKON raspodjele vjerovatnoće diskretne slučajne promjenljive** je pravilo po kojem se svakoj vrijednosti $\mathbf{x_k}$ slučajne promjenljive **X** dodjeljuje odgovarajuća vjerovatnoća $\mathbf{p_k = P(X = x_k)}$, a može se zapisati:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_k), & x = x_k \in S(X) \\ 0, & x \neq x_k \in S(X) \end{cases}$$

- **FUNKCIJA (ili kumulativni zakon) raspodjele vjerovatnoće** se označava sa **F(x)** i predstavlja funkciju, odnosno pravilo po kojem se može obračunati vjerovatnoća da slučajna promjenljiva **X** uzme vrijednost manju od vrijednosti **x** (tekuća promjenljiva), odnosno **P(X<x)**

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

- Kod diskretne promjenljive se ova funkcija može zapisati i kao:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leq x_1 \\ p_1, & \text{za } x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & \text{za } x_2 < x \leq x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, & \text{za } x_{n-1} < x \leq x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ 1, \text{ za } x > x_n \end{cases}$$

FUNKCIJA RASPODJELE VJEROVATNOĆE ZA NEPREKIDNU SLUČAJNU PROMJENLJIVU

- Funkcija raspodjele vjerovatnoće se može definisati za neprekidnu promjenljivu $F(X) = P(X < x)$
- gustina vjerovatnoće f(x)=F'(x)

PARAMETRI ILI BROJNE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMJENLJIVIH

- **matematičko očekivanje M(X) ili μ**,

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots . + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \quad \text{za diskretnu slučajnu promjenljivu}$$

- za neprekidnu slučajnu promjenljivu: koja je definisana gustinom vjerovatnoće f(x):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

- **medijana Me**:

$$F(Me)=P(X<Me)=0,5$$

- **moda Mo:**
  - za diskretnu slučajnu promjenljivu: pi=max
  - za neprekidnu slučajnu promjenljivu f(x)=max
- **srednje apsolutno odstupanje** slučajne promjenljive **X** u odnosu na broj **a** *

$$\theta_z = M|X - a| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - a| \cdot p_k \text{, za diskretnu promjenljivu}$$

$$\theta_z = M|X - a| = \int_{-\infty}^{\infty} |x - a| f(x) dx \text{, za neprekidnu promjenljivu}$$

- **varijansa V(X) ili σ_x^2 , odnosno disperzija D(X)**

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k \text{, za diskretnu promjenljivu}$$

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx \text{, za neprekidnu promjenljivu}$$

- **standardno odstupanje (standardna devijacija)**

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

- **koeficijent** varijacije je relativna mjera rasturanja

$$k_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\%$$

BINOMNA RASPODJELA B(N,P)

- **Binomna raspodjela B(n,p)** definiše kolika je vjerovatnoća da će se u **n** nezavisnih eksperimenata događaj A realizovati x puta, a da se neće realizovati n−x puta, pod uslovom da je 0≤x≤n.Vjerovatnoća pojave događaja A u jednom eksperimentu je **p,** a vjerovatnoća pojave događaja Ā je **q=1-p**

$$f(x) = p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

- za proračun p(x) može se koristiti i rekurentna formula:

$$p(x) = \frac{n - x + 1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(x - 1)$$

- Ako n→∞ binomna distribucija teži normalnoj distribuciji (Muavr-laplasova teorema). Binomna raspodjela X~ B(n,p), se može dosta dobro aproksimirati normalnom raspodjelom, u slučaju kada je n veliko, tj. praktično za np>10
- Ako n→∞ i p→0 binomna distribucija teži Puasonovoj raspodjeli praktično se Puasonova raspodjela može koristiti za n≥50, i p≤0,1

Parametri binomne raspodjele

- matematičko očekivanje: $M(X) = n \cdot p$
- disperzija (varijansa): $D(X) = s^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- standardno odstupanje $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

PUASONOVA RASPODJELA $P_O(\Lambda)$

- zakon raspodjele vjerovatnoća

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3 \ldots, \lambda > 0$$

- za proračun se može koristiti rekurentni obrazac

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} \cdot P_\lambda(x - 1)$$

Parametri Puasonove raspodjele

- matematičko očekivanje $M(X) = \lambda$
- disperzija (varijansa): $D(X) = s^2 = \lambda$
- standardno odstupanje $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

NORMALNA (GAUSOVA) RASPODJELA

- Za slučajnu promenljivu X neprekidnog tipa kažemo da ima normalnu raspodjelu sa parametrima μ, i σ, μϵR, σ>0, u oznaci X~ N(μ,σ), ako je njena **gustina raspodjele vjerovatnoća**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

- **Funkcija raspodjele vjerovatnoće**:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Parametri normalne raspodjele

- matematičko očekivanje $M(X) = \mu$
- moda i medijana: $Mo = Me = \mu$
- disperzija (varijansa): $D(X) = \sigma^2$
- standardno odstupanje $\sigma(X) = \sigma$

Vjerovatnoća da slučajna promjenljiva uzme vrijednost iz intervala (a,b)

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

- Primjenom standardizovane promjenljive $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ i njene funkcije raspodjele vjerovatnoće F(t) gornji se izraz može transformisati

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P(t_1 < T < t_2) = P(T < t_2) - P(T < t_1)$$

Iznalaženje intervala na kome slučajna promjenljiva ima unaprijed zadatu vjerovatnoću

- može se rješavati samo ako se traži interval simetričan u odnosu na matematičko očekivanje **μ** odnosno ako se ovako definiše:

$$P(\mu - a < X < \mu + a) = p$$

- Primjenom standardizovane promjenljive $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ i njene funkcije raspodjele vjerovatnoće F(t) gornji se izraz može transformisati:

$$P\left(\frac{\mu-a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{a}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{a}{\sigma} < T < \frac{a}{\sigma}\right) = p$$

STATISTIČKE TABELE, EMPIRIJSKE RASPODJELE FREKVENCIJA ZA KLASE PODATAKA

N	n
40-60	6-8
60-100	7-10
100-200	8-12
200-500	12-17
> 500	21

- broj grupnih intervala može se izabrati po nekom od sljedećih pravila:

$n = \sqrt{N}$ ili $n = \sqrt[3]{N}$ ili u odnosu na broj N (prema tabeli)

- širina grupnog intervala *j* je *dj=(x*

- sredina grupnog intervala xj=1/2*(uj-1+u j), gdje su u_{j-1} i u_j granice intervala
- aritmetička sredina za interval: $(\overline{x}_j = \frac{1}{f_j}\sum_{i=j}^{j+1} x_i \cdot f_i)$
- apsolutna frekvencija *fj*- broj pojava izmjerene vrijednosti u jednom grupnom intervalu
- relativna frekvencija (statistička vjerovatnoća) *frj=fj /N*

Karakteristike empirijske raspodjele:

- **aritmetička sredina (**$\overline{x}$**, ili** x')
  - na osnovu potpunog skupa N (gdje su x_i uređeni po veličini i prikazane njihove apsolutne frekvencije f_i)

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot f_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} f_i = N$$

- na osnovu grupisanih podataka u n klasa (grupa)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f_j$$

- **medijana** – vrijednost xi za koju je kumulativna relativna frekvencija F(xi) =0,5
  - na osnovu potpunog skupa N, sa uređenim podacima xi i pripadajućim apsolutnim frekvencijama fi, medijana je ona vrijednost xi koja zadovoljava nejednačine

$$\sum_{i=1}^{j} f_i \leq \frac{N}{2} \leq \sum_{i=1}^{j+1} f_i$$

  - na osnovu grupisanih podataka u n grupa (klasa), medijana Me zadovoljava nejednakost:

$$\overline{M_e} = L + d \cdot \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{k} f_i}{f_{k+1}} \ ,$$

  - gdje su
    - L=lijeva granica klase (k+1) u kojoj se nalazi medijana,
    - (k+1) oznaka klase u kojoj se nalazi medijana
- **moda**- (ne mora da postoji, a može ih biti i više):
  - na osnovu potpunog skupa N: $\overline{M_o} = x_j$, tako da $f_j = \max$
  - na osnovu grupisanih podataka u n grupa (klasa):

$$\overline{M_o} = L + d \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_{2_j}}$$

  - gdje su:
    - L=lijeva granica klase (k+1) u kojoj se nalazi moda
    - Δ1- razlika modalne frekvencije i susjedne prethodne
    - Δ2- razlika modalne frekvencije i susjedne naredne
- **raspon=varijacioni interval** $\boldsymbol{R} = x_{max} - x_{min}$
- **srednje apsolutno odstupanje**

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

- **disperzija (varijansa)**

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

- **standardno odstupanje**

$$s = \sigma = +\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2} = +\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^2 - \bar{x}^2}$$

- **koeficijenti varijacije**

$$k_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

TABELA VJEROVATNOČA ZA NORMALNU RASPODJELU

(interval 0<x<3,49)

P(X<x)

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998