

KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

vježbe 2017/18

SLUČAJNE PROMJENLJIVE

- 1. Definicija, diskretne i kontinualne promjenljive**
- 2. Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive**
- 3. Gustina (raspodjele) vjerovatnoće**
- 4. Matematičko očekivanje, varijansa, koeficijent varijacije**

V3

Zadatak 1.

Cilj se gađa sa 4 metka. Neka je X slučajna promjenljiva koja označava broj pogodaka i ako je u svakom gađanju vjerovatnoća pogotka cilja 0,5 naći:

- raspodjelu vjerovatnoća slučajne promjenljive X
- funkciju raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X
- matematičko očekivanje, modu i medijanu,
- varijansu i koeficijent varijacije

RJEŠENJE

- Broj pogodaka može biti: 0, 1, 2, 3 ili 4, pa je $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ - skup vrijednosti slučajne promjenljive X (konačan niz brojeva)
- Uređena r -torka elemenata (4 gađanja), n -članog skupa S (0 =promasaj, 1 =pogodak}, ali tako da se elementi mogu i ponavljati (r može biti i veće od n) zove se **varijacija s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata**.

Vsa ponavljanjem $m_n^{(r)} = n^r = 2^4 = 16$ mogućih ishoda

- Raspodjela vjerovatnoća slučajne promjenljive X data u tabeli (suma vjerovatnoca mora biti 1!),

Broj pogodaka (x_k)	0	1	2	3	4
Vjerovatnoća	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

- funkcija raspodjele vjerovatnoće

$$F(X) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq 0 \\ \frac{1}{16} & \text{za } 0 < x \leq 1 \\ \frac{5}{16} & \text{za } 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{16} & \text{za } 2 < x \leq 3 \\ \frac{15}{16} & \text{za } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{za } x > 4 \end{cases}$$

Zadatak 1.

nastavak

c) matematičko očekivanje, modu i medijanu,

d) varijansu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije

RJEŠENJE

c) matematičko očekivanje:

$$\mu = M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

- **medijana Me** je vrijednost slučajne promjenljive X za koju vjerojatnoća da slučajna promjenljiva uzme vrijednost manju od Me iznosi 0,5, odnosno $P(X < x) = 0,5$, odnosno ona koja (s obzirom na diskretnu prirodu slučajne promjenljive) zadovoljava uslov, da postoji x_k tako:

$$P(X < x_k) \leq 1/2 \leq P(X \leq x_k), \quad x_k = \text{Me}$$

Prema kumulativnoj funkciji raspodjele vjerovatnoće $F(X)$ koju smo definisali u prethodnom dijelu zadatka je za:

$$P(X < 2) = 5/16 < 0,5, \text{ a za za } P(X < 3) = 11/16 > 0,5, \text{ pa je medijana } \text{Me} = 2$$

- **moda (Mo)** je najvjerovatnija vrijednost slučajne promjenljive X, odnosno $p_i = \max, \text{ Mo} = 2, P(X = \text{Mo}) = 6/16$

b) **varijansa $V(X)$ ili σ_x^2 , odnosno disperzija $D(X)$** je matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promjenljive X od matematičkog očekivanja $M(X)$, od

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k, \text{ za diskretnu promjenljivu}$$

$$V(X) = M[X - 2]^2 = (0 - 2)^2 \cdot 1/16 + (1 - 2)^2 \cdot 4/16 + (2 - 2)^2 \cdot 6/16 + (3 - 2)^2 \cdot 4/16 + (4 - 2)^2 \cdot 1/16$$

$$= 4/16 + 4/16 + 0/16 + 4/16 + 4/16 = 1$$

- **standardno odstupanje (standardna devijacija) $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$**
- **koeficijent varijacije** je relativna mjera rasturanja $k_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{1}{2} = 0,5$

Zadatak 2.

Novčić se baca do pojave grba, a sa X označimo broj bacanja novčića (uključujući i bacanje kada se pojavio grb). Naći za slučajnu promjenljivu X

- a) zakon raspodjele vjerovatnoća
- b) matematičko očekivanje

RJEŠENJE

Prostor elementarnih događaja je beskonačan, ali prebrojiv skupom prirodnih brojeva, pa slučajna promjenljiva $X \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Vjerovatnoća pojave grba u svakom bacanju, jednaka je vjerovatnoći pojave pisma i iznosi 0,5.

Pojava pisma i grba su nezavisni događaji, jer je $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(X=1) = 1/2$ (u prvom bacanju se pojavio grb)

$P(X=2) = (1-1/2)1/2 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ (u drugom se pojavio grb, a u prvom se nije pojavio grb)

$P(X=3) = (1-1/2)(1-1/2)1/2 = (1-1/2-1/2+1/4)1/2 = 1/8, \dots$ (u trećem se pojavio grb, a u prvom i drugom se nije pojavio grb)

a) zakon raspodjele vjerovatnoće:

$$P(X = x) = \frac{1}{2^x} \quad x=1, 2, 3, \dots, \text{ pri čemu mora biti i}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

suma beskonacnog geometrijskog reda oblika $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = a/(1-r)$

Posmatrajmo geometrijski red: $S = 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$

dva uzastopna člana reda (naredni/posmatrani) $= 2/3$.

Ako sa $2/3$ pomnožimo cijeli red ovim brojem, onda re postaje: $2/3 * S = 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$, razlikuje se od prvog samo što mu nedostaje prvi član

Oduzimanjem ova dva reda poništavaju se svi članovi osim prvog: $S - 2/3 * S = 1$, odnosno $S(1 - 2/3) = 1$, pa je suma ovog reda $S = 1/(1 - 2/3)$

Uopstavajuci, mozemo reci da je suma beskonacnog geometrijskog reda oblika

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = a/(1-r)$$

vise na https://bs.wikipedia.org/wiki/Geometrijski_red

Zadatak 2. nastavak

b) matematičko očekivanje

RJEŠENJE

Prostor elementarnih događaja je beskonačan, ali prebrojiv skupom prirodnih brojeva, pa slučajna promjenljiva $X \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Vjerovatnoća pojave grba u svakom bacanju, jednaka je vjerovatnoći pojave pisma i iznosi 0,5.

Pojava pisma i grba su nezavisni događaji, jer je $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(X=1) = 1/2$ (u prvom bacanju se pojavio grb)

$P(X=2) = (1-1/2)1/2 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ (u drugom se pojavio grb, a u prvom se nije pojavio grb)

$P(X=3) = (1-1/2)(1-1/2)1/2 = (1-1/2 \cdot 1/2)1/2 = 1/8 \dots$ (u trećem se pojavio grb, a u prvom i drugom se nije pojavio grb)

b) matematičko očekivanje:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}}$$

uporedimo ga sa geometrijskim redom koji konvergira i čija je suma $1/(1-a)$: $S_1 = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1}{(1-a)}$

Posmatrajmo red koji se dobija njegovim diferenciranjem (i lijevu i desnu stranu diferenciramo)

$$S_2 = 0 + 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 1/(1-a)^2$$

Od reda S_2 oduzmimo red S_1 : $0 + 1 - 1 + 2a - a + 3a^2 - a^2 + 4a^3 - a^3 + \dots = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1-a)} = \frac{1-a+a}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}$

ako uvedemo smjenu $a = 1/2$, dobijamo red koji odgovara našem redu za proračun matematičkog očekivanja, pa je :

$$M(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Posmatrajmo geometrijski red: $S = 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$

dva uzastopna člana reda (naredni/posmatrani) $= 2/3$.

Ako sa $2/3$ pomnožimo cijeli red ovim brojem, onda re postaje: $2/3 \cdot S = 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$, razlikuje se od prvog samo što mu nedostaje prvi član

Oduzimanjem ova dva reda poništavaju se svi članovi osim prvog: $S - 2/3 \cdot S = 1$, odnosno $S(1 - 2/3) = 1$, pa je suma ovog reda $S = 1/(1 - 2/3)$

Uopstavajuci, mozemo reci da je suma beskonacnog geometrijskog reda oblika $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = a/(1-r)$

vise na https://bs.wikipedia.org/wiki/Geometrijski_red

Zadatak 3.

iz partije od 100 proizvoda od kojih su 10% škart, izabran je na slučajan način uzorak od 5 proizvoda. Ako sa X označimo broj škartova u uzorku, naći :

- a) **zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X**
 b) **matematičko očekivanje slučajne promjenljive X ,**
 c) **varijansu i standardno odstupanje slučajne promjenljive X**

RJEŠENJE

- Eksperiment je izbor $r=5$ elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima $n=100$ elemenata, elementarni događaj je grupa od 5 proizvoda – nije važan redosled, pa se radi o podskupu od 5 proizvoda, a ne o uređenoj 5-orci (broj kombinacija bez ponavljanja). Ovakvih se podskupova na slučajan način može izabrati:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{100!}{5!95!} = 75287520$$

- Broj škartova može biti: 0, 1, 2, 3, 4 ili 5, pa je $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ - skup vrijednosti slučajne promjenljive X (konačan niz brojeva).
- Događaj A: „uzorak ima k neispravnih proizvoda“ (onda u uzorku ima i $r-k=5-k$ ispravnih)
- ukupno ispravnih proizvoda ima $100 \cdot 90\% = 90$, a ukupno neispravnih ima 10. U uzorku ovih k neispravnih potiče od neispravnih proizvoda, a oni se mogu izabrati od 10 neispravnih na $\binom{10}{k}$ načina (broj kombinacija bez ponavljanja)
- ispravni proizvodi u uzorku potiču od ukupno 90 ispravnih proizvoda. Ova grupa od $(5-k)$ ispravna proizvoda se može odabrati na $\binom{90}{5-k}$ načina.
- Dakle ukupno se k neispravnih i $5-k$ ispravnih proizvoda mogu izabrati na $\binom{10}{k} \cdot \binom{90}{5-k}$ načina.

a) zakon raspodjele vjerovatnoće

- Po klasičnoj definiciji je vjerovatnoća da se desi događaj A, odnosno da slučajna promjenljiva X uzme vrijednost x_k , je :

$$P(X = x_k) = \frac{\binom{10}{k} \cdot \binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}},$$

odnosno $p_0=0,583$, $p_1=0,340$, $p_2=0,070$, $p_3=0,007$, $p_4=0$, $p_5=0$

Zadatak 3.

nastavak

b) matematičko očekivanje slučajne promjenljive X,

c) varijansu i

d) standardno odstupanje slučajne promjenljive X

e) koeficijent varijacije

RJEŠENJE

c) matematičko očekivanje:

$$\mu = M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = 0 \cdot 0,583 + 1 \cdot 0,340 + 2 \cdot 0,070 + 3 \cdot 0,007 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0,501$$

b) varijansa $V(X)$ ili σ_x^2 , odnosno disperzija $D(X)$ je matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promjenljive X od matematičkog očekivanja $M(X)$, od

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k, \text{ za diskretnu promjenljivu}$$

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = (0 - 0,501)^2 \cdot 0,583 + (1 - 0,501)^2 \cdot 0,340 + (2 - 0,501)^2 \cdot 0,070 + (3 - 0,501)^2 \cdot 0,007 + (4 - 0,501)^2 \cdot 0 + (5 - 0,501)^2 \cdot 0 = 0,1463 + 0,0847 + 0,1573 + 0,0437 = 0,432$$

c) standardno odstupanje (standardna devijacija) $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,432} = 0,6573$

d) koeficijent varijacije:

$$k_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{0,6573}{0,501} = 1,3119$$

Zadatak 4.

Dvije mašine proizvode jednake proizvode. Raspodjela vjerovatnoća škartova, koji se u toku jedne smjene pojave na prvoj, odnosno drugoj mašini su dati u tabeli.

a) Formirati raspodjelu vjerovatnoća broja škartova koji se pojave na obje mašine u toku jedne smjene (slučajna promjenljiva Z)

b) Naći matematičko očekivanje i varijansu za slučajnu promjenljivu Z

Za prvu mašinu					Za drugu mašinu			
Br. skartova (X)	0	1	2	3	Br. skartova (Y)	0	1	2
vjerovatnoće	0,1	0,6	0,2	0,1	vjerovatnoće	0,5	0,3	0,2

RJEŠENJE

a) Z: slučajna promjenljiva koja odgovara broju skartova koji se pojavi na obje mašine, $Z=X+Y$, a ova slučajna promjenljiva Z može da uzme vrijednosti (0, 1, 2, 3, 4, 5)

- ako su promjenljive X i Y nezavisne onda važi:
- $P(Z=0)=P(X=0, Y=0)=P(X=0)*P(Y=0)=0,1*0,5=0,05$
- $P(Z=1)=P(X=0, Y=1)+P(X=1, Y=0)=P(X=0)*P(Y=1)+P(X=1)*P(Y=0)=0,1*0,3+0,6*0,5=0,33$
- $P(Z=2)=P(X=0, Y=2)+P(X=2, Y=0)+P(X=1, Y=1)=P(X=0)*P(Y=2)+P(X=2)*P(Y=0)+P(X=1)*P(Y=1)=0,1*0,2+0,2*0,5+0,6*0,3=0,3$
- $P(Z=3)=P(X=3, Y=0)+P(X=1, Y=2)+P(X=2, Y=1)=P(X=3)*P(Y=0)+P(X=1)*P(Y=2)+P(X=2)*P(Y=1)=0,1*0,5+0,6*0,2+0,2*0,3=0,23$
- $P(Z=4)=P(X=2, Y=2)+P(X=3, Y=1)=P(X=2)*P(Y=2)+P(X=3)*P(Y=1)=0,2*0,2+0,1*0,3=0,07$
- $P(Z=5)=P(X=3, Y=2)=P(X=3)*P(Y=2)=0,1*0,2=0,02$
- X i Y jesu nezavisne i $P(Z)=1$

Za obje mašine ukupno						
Br. skartova (Z)	0	1	2	3	4	5
vjerovatnoće	0,050	0,330	0,300	0,230	0,070	0,020

Zadatak 4.
nastavak

Za prvu mašinu					Za drugu mašinu			
Br. skartova (X)	0	1	2	3	Br. skartova (Y)	0	1	2
vjerovatnoće	0,1	0,6	0,2	0,1	vjerovatnoće	0,5	0,3	0,2

RJEŠENJE

b) matematičko očekivanje; matematičko očekivanje zbira slučajnih promjenljivih X i Y jednako je zbiru njihovih matematičkih očekivanja

$$M(Z)=M(X+Y)= M(X)+M(Y)$$

$$M(X)=0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,3$$

$$M(Y)=0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 = 0,7$$

$$M(Z)=1,3+0,7=2$$

Može se provjeriti i ako se direktno racuna matematicko ocekivanje za promjenljivu Z, na osnovu njene raspodjele vjerovatnoće

c) varijansa zbira slučajnih promjenljivih X i Y jednaka je zbiru njihovih varijansi

$$V(X)=\sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k$$

$$V(X+Y)= V(X)+V(Y)$$

$$V(X)=(0-1,3)^2 \cdot 0,1 + (1-1,3)^2 \cdot 0,6 + (2-1,3)^2 \cdot 0,2 + (3-1,3)^2 \cdot 0,1 = 0,61$$

$$V(Y)=(0-0,7)^2 \cdot 0,5 + (1-0,7)^2 \cdot 0,3 + (2-0,7)^2 \cdot 0,2 = 0,61$$

$$V(Z)=0,61+0,61=1,22$$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pergled, Beo
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- <http://www.e-statistika.rs>
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), <http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf>