- Matrica prelaza -

U cilju jednostavnijeg zapisivanja nekih formula, ovdje uvodimo pojam vektorske vrste i definišemo množenje takvih vrsta sa skalarom i matricom.

<u>Def 1:</u> Neka je $e_1, \dots, e_m$ sistem vektora iz vektorskog prostora V. Vrstu $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ nazivamo vektorskom vrstom formata $1 \times m$.

<u>Def 2:</u> Proizvodom vektorske vrste $e = (e_1, \dots, e_m)$ i skalara α u oznaci αe nazivamo vektorsku vrstu $\alpha e = (\alpha e_1, \alpha e_2, \dots, \alpha e_m)$.

<u>Def 3:</u> Proizvod vektorske vrste $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ i kolone skalara $K = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ u oznaci eK

je vektor $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Dakle, $eK = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Neka je zadata matrica $A=[a_{ij}]_{m\times n} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ čije su kolone:

$$k_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad k_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu definicije 3 imamo:

$$e k_j = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i .$$

Def 4: Proizvod vektorske vrste $e=(e_1, \dots, e_m)$ i matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ u oznaci eA ili $(e_1, \dots, e_m)A$ je vektorska vrsta $1 \times n$:

$$eA = (e_1, \dots, e_m)A \stackrel{def}{=} (ek_1, ek_2, \dots, ek_n) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} e_i \right).$$

Primjer 1: Može se dokazati da za vektorsku kolonu $e=(e_1, e_2, \dots, e_m)$ i matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ važi: 1) $(eA)B = e(AB)$ 2) $eA(B+C) = eAB + eAC$

<u>Lema 1:</u> (osnovna) Ako je $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ baza prostora V, i $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ tada iz $eA = eB$ slijedi da je $A = B$.

<u>Dokaz:</u> Neka je $eA = eB$ tj.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} e_i \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} b_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{m} b_{i2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} b_{in} e_i \right)$$

Dakle za svako $j \in \{1, \dots, n\}$ važi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} e_i$$

Kako je razlaganje po bazi $e_1, \dots, e_m$ jednoznačno, dobijamo da je:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{za } i = 1, \dots, m \text{ i } j = 1, \dots, n$$

tj. $A = B$.

– Definicija matrice prelaza –

<u>Def:</u> Neka su u n-dimenzionalnom prostoru V zadate dvije baze $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Svaki vektor baze f predstavimo pomoću baze e.

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + \dots + p_{n1} e_n \\ f_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + \dots + p_{n2} e_n \\ &\vdots \\ f_n &= p_{1n} e_1 + p_{2n} e_2 + \dots + p_{nn} e_n. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Kvadratnu matricu reda n:

$$P_{e\to f} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

nazivamo matricom prelaza iz baze e u bazu f. Kolone matrice $P_{e\to f}$ su koordinate vektora $f_1, \dots, f_n$ u bazi e.

Napomena 1 Često ćemo umjesto (*) koristiti matrični zapis:

$$f = e P_{e\to f} \quad \text{tj.} \quad (f_1, .., f_n) = (e_1, .., e_n) P_{e\to f}.$$

<u>Teorema 1:</u> Matrica $P_{e\to f}$ je regularna.

<u>Dokaz:</u> Kolone matrice $P_{e\to f}$ su koordinate vektora $f_1, .., f_n$ u bazi e. Kako je sistem $f_1, .., f_n$ linearno nezavisan to na osnovu ranije dokazane teoreme slijedi da su kolone matrice $P_{e\to f}$ linearno nezavisne pa je $\det P_{e\to f} \neq 0$.

<u>Teorema 2:</u> Ako su $e = (e_1, .., e_n)$, $f = (f_1, .., f_n)$ i $g = (g_1, .., g_n)$ baze vektorskog prostora V, tada je

$$P_{e\to g} = P_{e\to f} \cdot P_{f\to g}$$

Dokaz: Na osnovu napomene 1 imamo:

$$g = eP_{e\to g} \quad (1)$$
$$f = eP_{e\to f} \quad (2)$$
$$g = fP_{f\to g} \quad (3)$$

Slijedi da je $g \overset{(3)}{=} fP_{f\to g} \overset{(2)}{=} (eP_{e\to f})P_{f\to g} \overset{\text{Primjer 1}}{=} e(P_{e\to f}P_{f\to g})$

Sa druge strane, $g \overset{(1)}{=} eP_{e\to g}$ pa slijedi da je:

$$eP_{e\to g} = e(P_{e\to f}P_{f\to g})$$

Na osnovu leme 1 dobijamo:

$$\boxed{P_{e\to g} = P_{e\to f}\cdot P_{f\to g}} \to (**)$$

Teorema 3: Ako su $e=(e_1, e_2, .., e_n)$ i $f=(f_1, f_2, ., f_n)$ baze vektorskog prostora V tada je:

$$P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1}.$$

Dokaz: Ako u teoremi 2 stavimo $g=e$ tada je

$$E = P_{e\to e} = P_{e\to f}\cdot P_{f\to e}$$

Ako u $(**)$ stavimo $e=f$, $g=f$ dobijamo

$$E = P_{f\to f} = P_{f\to e}P_{e\to f}.$$

Dakle, $E = P_{e\to f}\cdot P_{f\to e} = P_{f\to e}\cdot P_{e\to f}$ što znači da je $P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1}$.

<u>Teorema 4:</u> Ako su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ i $\beta_1, \dots, \beta_n$ koordinate vektora $x \in V$ u bazama $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_n)$ vektorskog prostora V tj. $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ i $x = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$ tada je:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P_{e \to f} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

<u>Dokaz:</u>

Iz $f = e P_{e \to f}$ i $x = e \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ i $x = f \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

dobijamo: $e \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = x = f \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = e P_{e \to f} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

Dakle, $e \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = e P_{e \to f} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, pa na osnovu

leme 1 dobijamo: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P_{e \to f} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Primjer: Dati su vektori $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2)$ i $f_3 = (1, 2, 3)$ u standardnoj bazi (e_1, e_2, e_3). a) Dokazati da je $f = (f_1, f_2, f_3)$ baza prostora $\mathbb{R}^3$ i naći $P_{e \to f}$ i $P_{f \to e}$.
b) Naći koordinate vektora $v = (6, 9, 14)$ u bazi f.

R) a) Kako je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ to je dovoljno pokazati da je sistem $f = (f_1, f_2, f_3)$ linearno nezavisan.
Iz $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$ slijedi da je:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \quad \to (*) \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Kako je $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ to sistem $(*)$ ima samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
Dakle, pokazali smo da je $f = (f_1, f_2, f_3)$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Kako je:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ f_2 &= 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 \\ f_3 &= 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \end{aligned}$$

to je matrica prelaza $P_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

~~b)~~ $P_{f\to e} = (P_{e\to f})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8

b) Prema teoremi 4:

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = P_{e\to f} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$ gdje su $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ koordinate vektora v u bazi f.

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = P_{f\to e} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$