- Euklidski prostor -

Skalarni proizvod koji smo definisali u okviru vektorske algebre je funkcija koja svakom uređenom paru vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ pridružuje realan broj koji označavamo sa $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ili $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Vidjeli smo da se pomoću skalarnog proizvoda može izraziti dužina vektora, ugao između dva vektora, ispitati ortogonalnost vektora itd. Pokazali smo da skalarni proizvod ima sledeća svojstva:

1) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ i $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

2) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

3) $\langle \alpha \vec{a}, \vec{b} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

4) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Na proizvoljnom vektorskom prostoru možemo definisati funkciju sa ovim svojstvima a zatim pomoću nje definišemo normu vektora. i pojam ortogonalnosti vektora.

Def 1: Neka je V vektorski prostor nad poljem realnih brojeva R.

Preslikavanje $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to R$ koje svakom uređenom paru $(x, y) \in V \times V$ pridružuje realan broj $\langle x, y \rangle$, nazivamo skalarni proizvod na prostoru V ukoliko su za svako $x, y, z \in V$ i svako $\alpha \in R$ ispunjeni sledeći uslovi:

1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, pri čemu $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Def 2: Realan vektorski prostor na kome je definisan skalarni proizvod nazivamo euklidski prostor i označavamo sa E.

Koristeći svojstva 1) – 4) iz def. 1, lako se dokazuju sledeća svojstva skalarnog proizvoda.

1) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ 3) $\langle 0, x \rangle = 0$
4) $\langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle$
5) $\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \beta_j \langle x_i, y_j \rangle$

<u>Teorema 1</u>: Na svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru može se definisati skalarni proizvod na beskonačno mnogo načina.

<u>Dokaz</u>: Neka je V vektorski prostor dimenzije n i neka je $e_1, \dots, e_n$ baza prostora V.
Neka su $\xi_1 > 0, \dots, \xi_n > 0$ proizvoljno odabrani realni brojevi.
Vektorima $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ iz prostora V, dodijelimo realan broj $\langle x, y \rangle$ po sledećem pravilu:

$$(*): \quad \langle x, y \rangle = \xi_1 \alpha_1 \beta_1 + \xi_2 \alpha_2 \beta_2 + \dots + \xi_n \alpha_n \beta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i \beta_i$$

Dokazaćemo da je formulom $(*)$ definisan skalarni proizvod na prostoru V tj. da su ispunjeni uslovi 1) – 4) iz def 1.

1) $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i^2 \geq 0$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \beta_i \alpha_i = \langle y, x \rangle$

3) $\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\alpha \alpha_i) \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha (\xi_i \alpha_i \beta_i) =$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i \beta_i = \alpha \langle x, y \rangle.$$

4) Za vektore $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$

i $z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$ važi:

$$\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\alpha_i + \beta_i)\gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \beta_i \gamma_i =$$

$$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

Jasno je da za različite izbore skalara $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \dots, \xi_n > 0$ dobijamo različite formule (*) od kojih svaka definiše skalarni proizvod.

<u>Primjer 1:</u> Standardni skalarni proizvod u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Sistem $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ obrazuje bazu u prostoru $\mathbb{R}^n$. Ako vektorima $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = (\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ pridružimo broj:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

onda je po prethodnoj teoremi ovom formulom definisan skalarni proizvod na $\mathbb{R}$

Def3: Neka je E euklidski prostor i $x \in E$.
Nenegativan realan broj $\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ naziva se norma vektora x i označava sa $\|x\|$.
Za vektor $x \in E$ čija je norma jednaka 1 kaže se da je normiran.

Primijetimo da se u proizvoljnom euklid-skom prostoru norma vektora računa upravo onako kako se u prostoru običnih vektora računa intenzitet vektora pomoću skalarnog proizvoda.

Teorema2: (Koši-Švarcova nejednakost)
Za bilo koja dva vektora x, y iz euklidskog prostora E važi:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle. \quad (***)$$

Pri tome $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Dokaz: 1) Ako su vektori x, y linearno zavisni tada je $x = \lambda y$ ili $y = \mu x$ za neko $\lambda, \mu \in R$, pa je u prvom slučaju:

$$|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle \lambda y, y\rangle|^2 = \lambda^2 \langle y, y\rangle^2 = \langle \lambda y, \lambda y\rangle \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

dok je u drugom slučaju:

$$|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle x, \mu x\rangle|^2 = \mu^2 \langle x, x\rangle^2 = \langle x, x\rangle \langle \mu x, \mu x\rangle = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

2) Ako su vektori x i y linearno nezavisni tada za proizvoljno $\lambda \in R$ važi $x - \lambda y \neq 0$ pa je prema svojstvima skalarnog proizvoda:

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle > 0$$

tj. $\langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle > 0$. $(**)$

Kako je sistem x, y linearno nezavisan to je $y \neq 0$ pa je $\langle y, y \rangle > 0$.

Ako specijalno uzmemo $\lambda = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ tada iz $(**)$ dobijamo:

$$\langle x, x \rangle - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle > 0$$

odnosno $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 > 0$.

Iz 1) i 2) zaključujemo da nejednakost $(***)$ važi u svakom slučaju pri čemu stroga nejednakost važi akko su x, y linearno nezavisni vektori ~~dok~~ jednakost važi akko su x, y linearno zavisni.

Primijetimo da je nejednakost $(***)$ ekvivalentna ~~ne~~jednakosti:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|. \quad (!)$$

Teorema 3: Neka je E euklidski prostor.
Tada za proizvoljno $x, y \in E$ i $\lambda \in R$ važi:

1) $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dokaz:

1) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$ i $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \, \|x\|$
3) Kako je:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq$$
$$\underset{(!)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

to je $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Primijetimo da iz (!) slijedi da za proizvoljne nenulte vektore x, y iz euklidskog prostora E važi:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

pa postoji broj $\varphi \in [0, \pi]$ takav da je:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Broj φ nazivamo uglom između vektora x i y.