- Linearni operatori -

Neka su $(U, +_1, \cdot_1)$ i $(V, +_2, \cdot_2)$ vektorski prostori nad istim poljem P.

<u>DEF 1:</u> Preslikavanje $A: U \to V$ nazivamo linearnim operatorom, ako su ispunjeni ovi uslovi:

$$(\forall x, y \in U)\ A(x +_1 y) = Ax +_2 Ay \quad (1)$$

$$(\forall \alpha \in P)(\forall x \in U)\ A(\alpha \cdot_1 x) = \alpha \cdot_2 Ax \quad (2)$$

Ako je $U = V$, tada se govori o linearnom operatoru $A: V \to V$ definisanom na vektorskom prostoru V.

<u>Napomena 1:</u> Radi jednostavnijeg pisanja, operacije u vektorskom prostoru U i V, ubuduće označavamo istim simbolom. Takođe, umjesto "linearni operator" pisaćemo samo "operator".

Lako je dokazati da su uslovi (1) i (2) ekvivalentni sledećem uslovu:

$$(\forall x, y \in U)(\forall \alpha, \beta \in P)\ A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay. \quad (3)$$

Na osnovu (3) matematičkom indukcijom se može dokazati da za proizvoljne vektore $x_1, \dots, x_k \in U$ i proizvoljne skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in P$ važi: $A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_k Ax_k$

tj. $$A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Ax_i. \quad (4).$$

Lema 1: Ako je $A: U \to V$ linearni operator, O_u i O_v ~~nekakvi~~ nula vektori u vektorskim prostorima U i V, tada je $A(O_u) = O_v$.

Dokaz: Kako je $O_u = 0 \cdot O_u$, to na osnovu (2)

$$A(O_u) = A(0 \cdot O_u) = 0 \cdot A(O_u) = O_v.$$

Def 2: Za operatore $A, B: U \to V$ kažemo da su jednaki i pišemo $A = B$, ako je:

$$(\forall x \in U)\ Ax = Bx$$

U narednoj teoremi dokazujemo da je linearni operator jednoznačno određen slikama vektora baze.

Teorema 1: Ako je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza prostora U i ako je za operatore $A, B: U \to V$ zadovoljen uslov: $\quad Ae_i = Be_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ tada je $A = B$.

Dokaz: Za proizvoljni vektor $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ važi:

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Be_i =$$

$$= B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = Bx.$$

Na osnovu definicije jednakosti dva operatora, slijedi da je $A = B$.

Primjer 1: Očigledno je da je preslikavanje $O: U \to V$, $Ox = O_v$ (gdje je O_v nula vektor prostora V), linearni operator. Operator O nazivamo nula operatorom.

Primjer 2: Preslikavanje $E : V \to V$, $Ex = x, x \in V$ je takođe linearni operator. Operator E zove se jedinični operator na prostoru V.

Primjer 3: Neka je π ravan i $V_2 = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \pi\}$. Dokazati da je preslikavanje $A : V_2 \to V_2$, $A(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ}$ gdje je Q tačka, simetrična tački P u odnosu na osu Ox, linearni operator na prostoru V_2.

R/ Neka je $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ pravougli koordinatni sistem u ravni π. Vektor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ se preslikava u vektor $A(\overrightarrow{OP}) = x\vec{i} - y\vec{j}$. Neka su:

$$\alpha, \beta \in R, \quad \overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \ \overrightarrow{OP_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \in V_2.$$

Tada je: $A(\alpha\overrightarrow{OP_1} + \beta\overrightarrow{OP_2}) = (\alpha x_1 + \beta x_2)\vec{i} - (\alpha y_1 + \beta y_2)\vec{j} =$
$= \alpha(x_1\vec{i} - y_1\vec{j}) + \beta(x_2\vec{i} - y_2\vec{j}) = \alpha A(\overrightarrow{OP_1}) + \beta A(\overrightarrow{OP_2})$.

Primjer 4: Pokazati da su sledeća preslikavanja linearni operatori:

a) $A : R^3 \to R^3$, $AX = (x_3, x_2, x_1)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$

b) $A : P_3[x] \to P_3[x]$, $Af(x) = f'(x)$

c) $\phi : M_{m\times n} \to M_{n\times m}$, $\phi(A) = A^T$, $A \in M_{m\times n}$.

R/ a) Uzmimo vektore $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ i skalare $\alpha, \beta \in R$. Tada je:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \text{ pa je:}$$

$$A(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1) =$$
$$= \alpha(x_3, x_2, x_1) + \beta(y_3, y_2, y_1) = \alpha AX + \beta Ay.$$

4

b) $A(\alpha f(x) + \beta g(x)) = (\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha A f(x) + \beta A g(x)$.

c) Neka su A, B proizvoljne matrice formata $m \times n$ i $\alpha, \beta \in R$. Tada je:

$$\phi(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha \phi(A) + \beta \phi(B).$$

— Rang i defekt linearnog operatora —

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem P i $A: U \to V$ linearni operator.

Def 3: Podskup $\operatorname{Ker} A = \{x \in U \mid Ax = 0_V\}$ vektorskog prostora U, nazivamo jezgrom operatora A.

Podskup $\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in U\}$ vektorskog prostora V, naziva se slika operatora A.

Teorema 2: (1) Jezgro $\operatorname{Ker} A$ je potprostor prostora U.

(2) Slika $\operatorname{Im} A$ operatora A je potprostor prostora V.

Dokaz: (1) Neka su $x, y \in \operatorname{Ker} A$ tj. $Ax = 0_V$ i $Ay = 0_V$.

Tada za proizvoljne skalare $\alpha, \beta \in P$ važi:

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \cdot 0_V + \beta \cdot 0_V = 0_V$,

što znači da $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A$. Tako smo dokazali da je $\operatorname{Ker} A$ potprostor prostora V.

(2) Uzmimo proizvoljne vektore $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$.
Tada postoje vektori $x_1, x_2 \in U$ takvi da je
$y_1 = Ax_1$ i $y_2 = Ax_2$, i pri tome je:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \operatorname{Im} A,$$

što znači da je $\operatorname{Im} A$ potprostor prostora V.

Def 4: Broj $d_A = \dim \operatorname{Ker} A$ naziva se defekt a broj $r_A = \dim \operatorname{Im}(A)$, naziva se rang operatora $A : U \to V$.

Teorema 3: Ako je $A : U \to V$ linearni operator, tada je: $\dim U = r_A + d_A$.

Dokaz: Neka je $r = r_A = \dim \operatorname{Im} A$, $d = d_A = \dim \operatorname{Ker} A$ i $e_1, \dots, e_d$ baza jezgra $\operatorname{Ker} A$. Linearno nezavisni sistem $e_1, \dots, e_d$ dopunimo do baze $e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n$ prostora U. Uočimo da je $L = \mathcal{L}(e_{d+1}, \dots, e_n)$ direktni komplement jezgra, pa je $\operatorname{Ker} A \cap L = \{0\} \to (*)$
Dokažimo da sistem $Ae_{d+1}, \dots, Ae_n$ obrazuje bazu slike $\operatorname{Im} A$. Iz jednakosti:

$$\beta_{d+1} A e_{d+1} + \dots + \beta_n A e_n = 0$$

slijedi da je $A(\beta_{d+1} e_{d+1} + \dots + \beta_n e_n) = 0$, što znači da $\beta_{d+1} e_{d+1} + \dots + \beta_n e_n \in \operatorname{Ker} A$. To znači da $\beta_{d+1} e_{d+1} + \dots + \beta_n e_n \in \operatorname{Ker} A \cap L$.

pa na osnovu $(*)$ dobijamo da je:

$$\beta_{d+1} e_{d+1} + \dots + \beta_n e_n = 0.$$

Kako je sistem $e_{d+1}, \dots, e_n$ linearno nezavisan ⑥
to je $\beta_{d+1} = \dots = \beta_n = 0$.
Dakle, sistem $Ae_{d+1}, \dots, Ae_n$ je linearno nezavisan.
Ostaje da dokažemo da je $\operatorname{Im} A = \mathcal{L}(Ae_{d+1}, \dots, Ae_n)$
Očigledno je $\mathcal{L}(Ae_{d+1}, \dots, Ae_n) \subseteq \operatorname{Im} A$.
Za svaki vektor $y \in \operatorname{Im} A$, postoji vektor

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d + \alpha_{d+1} e_{d+1} + \dots + \alpha_n e_n$$

takav da je:

$$y = Ax = \alpha_1 Ae_1 + \dots + \alpha_d Ae_d + \alpha_{d+1} Ae_{d+1} + \dots + \alpha_n Ae_n.$$

Kako je $e_1, \dots, e_d \in \operatorname{Ker} A$, tj. $Ae_1 = \dots = Ae_d = 0$,
iz poslednje jednakosti slijedi da je:

$$y = \alpha_{d+1} Ae_{d+1} + \dots + \alpha_n Ae_n \in \mathcal{L}(Ae_{d+1}, \dots, Ae_n).$$

Tako smo dokazali inkluziju $\operatorname{Im} A \subseteq \mathcal{L}(Ae_{d+1}, \dots, Ae_n)$.
Dakle, $\operatorname{Im} A = \mathcal{L}(Ae_{d+1}, \dots, Ae_n)$ pa je:

$$r_A = \dim \operatorname{Im} A = \dim \mathcal{L}(Ae_{d+1}, \dots, Ae_n) = n - d = n - d_A$$

odnosno $n = \dim U = r_A + d_A$.