

- Operacije sa operatorima -

(1)

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem P . Sa $\mathcal{L}(U, V)$ označavamo skup svih linearnih operatora $A: U \rightarrow V$. Na skupu $\mathcal{L}(U, V)$ definišemo operacije: $+$ \rightarrow sabiranje linearnih operatora i \cdot \rightarrow množenje linearnih operatora brojem $\lambda \in P$.

Def 1: (1) Zbirkom operatora $A, B \in \mathcal{L}(U, V)$ u oznaci $A+B$, nazivamo preslikavanje $A+B: U \rightarrow V$ definisano na sledeći način: $(A+B)x = Ax + Bx, x \in U$.

(2) Proizvodom operatora $A \in \mathcal{L}(U, V)$ i broja $\lambda \in P$, u oznaci λA , nazivamo preslikavanje $\lambda A: U \rightarrow V$ definisano na sledeći način:

$$(\lambda A)x = \lambda Ax, x \in U.$$

Teorema 1: a) Zbir $A+B$ operatora $A, B \in \mathcal{L}(U, V)$

je linearni operator tj. $A, B \in \mathcal{L}(U, V) \Rightarrow A+B \in \mathcal{L}(U, V)$

(b) Proizvod λA operatora $A \in \mathcal{L}(U, V)$ i broja $\lambda \in P$

je linearni operator tj. $A \in \mathcal{L}(U, V) \wedge \lambda \in P \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{L}(U, V)$

Dokaz:

(a) Za proizvoljno $x, y \in U$ i $\alpha, \beta \in P$ važi:

$$\begin{aligned} (A+B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \\ &= \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By = \alpha (Ax + Bx) + \beta (Ay + By) = \\ &= \alpha (A+B)x + \beta (A+B)y. \end{aligned}$$

$$(b) (\lambda A)(\alpha x + \beta y) = \lambda A(\alpha x + \beta y) = \lambda(\lambda Ax + \beta Ay) = \lambda(\lambda A)x + \lambda(\beta A)y = \lambda(\lambda A)x + \beta(\lambda A)y.$$

Teorema: $(\mathcal{L}(U, V), +, \cdot)$ je vektorski prostor nad poljem P . (ovdje je $+$ sabiranje operatora a \cdot množenje operatora brojevima).

Dokaz: Neutralni element za sabiranje je nula operator 0 . $0 + A = A + 0 = A$ za svako $A \in \mathcal{L}(U, V)$. Operator $-A = (-1)A$ je suprotni element elementa A : $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

$$\text{Iz } ((A+B)+C)x = (A+B)x + Cx = (Ax+Bx) + Cx = Ax + (Bx + Cx) = Ax + (B+C)x = (A+(B+C))x$$

za svako $x \in U$, slijedi da je $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Na isti način se dokazuje jednakost $A+B = B+A$. Slično se dokazuje ostala svojstva vektorskog prostora.

Neka su U, V i W vektorski prostori nad poljem P . Tada za proizvoljna preslikavanja $A: U \rightarrow V$ i $B: V \rightarrow W$ možemo definirati kompoziciju ili proizvod BA kao preslikavanje $BA: U \rightarrow W$ koje elementu $x \in U$ dodjeljuje element $B(Ax) \in W$:

$$BA: U \rightarrow W; (BA)x = B(Ax).$$

Teorema 3: Ako su $A: U \rightarrow V$ i $B: V \rightarrow W$

(3)

linearni operatori, tada je i proizvod $BA: U \rightarrow W$ linearni operator tj.:

$$A \in \mathcal{L}(U, V) \wedge B \in \mathcal{L}(V, W) \Rightarrow BA \in \mathcal{L}(U, W).$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} (BA)(\alpha x + \beta y) &= B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \\ &= B(\alpha Ax) + B(\beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \\ &= \alpha (BA)x + \beta (BA)y. \end{aligned}$$

Neka je $A: U \rightarrow V$ bijektivni operator. Tada se može definisati inverzno preslikavanje:

$$A^{-1}: V \rightarrow U; \quad A^{-1}y = x, \quad y \in V \Leftrightarrow y = Ax$$

Na osnovu definicije inverznog preslikavanja, imamo da je: $AA^{-1}y = y, y \in V$ i $A^{-1}Ax = x, x \in U$ odnosno $AA^{-1} = E_V$ i $A^{-1}A = E_U$, gdje su E_U i E_V jedinični operatori na prostorima U i V .

Teorema 4: Inverzno preslikavanje $A^{-1}: V \rightarrow U$ bijektivnog linearnog operatora $A: U \rightarrow V$ je linearni operator.

Dokaz: Neka su $y_1, y_2 \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$.

Neka je $x_1 = A^{-1}y_1$ i $x_2 = A^{-1}y_2$ odnosno $y_1 = Ax_1$ i $y_2 = Ax_2$.

(4)

$$\text{Tada je: } dy_1 + \beta y_2 = dAx_1 + \beta Ax_2 = A(dx_1 + \beta x_2).$$

Odatve sledi da je:

$$A^{-1}(dy_1 + \beta y_2) = dx_1 + \beta x_2 = dA^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$

- Matrica linearnog operatora -

Neka je $A \in \mathcal{L}(U, V)$.
Neka su U i V vektorski prostori nad poljem P ,

$\dim U = n$, $\dim V = m$ i neka je $M_{m \times n}$ vektorski prostor matrica formata $m \times n$ sa elementima iz polja P . Ako je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza prostora U , i $f = (f_1, \dots, f_m)$ baza prostora V , tada se vektori Ae_1, \dots, Ae_n mogu predstaviti kao linearna kombinacija baze f :

$$\left. \begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ Ae_j &= a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m \\ \vdots \\ Ae_n &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{aligned} \right\} (1)$$

Matricu $A_{ef} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}$

nazivamo matricom linearnog operatora $A: U \rightarrow V$, u bazama e i f . Moćemo do te kolone:

$$k_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, k_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \dots, k_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice A_{ef} sastavljene od koordinata vektora $Ae_1, \dots, Ae_j, \dots, Ae_n$ u bazi f .

Relacije (1) možemo zapisati u obliku:

$$Ae_1 = f \cdot k_1, Ae_2 = f \cdot k_2, \dots, Ae_j = f \cdot k_j, \dots, Ae_n = f \cdot k_n$$

tako da je $(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (f \cdot k_1, f \cdot k_2, \dots, f \cdot k_n)$

$$\text{odnosno } (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = f A_{ef}. \quad (2)$$

(Koristimo oznake uvedene u lekciji "Matrica prelaza")

Koristidemo sledeću lemu koju smo dokazali u lekciji "Matrica prelaza".

Lema 1: Neka je $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ baza prostora V

i $A, B \in M_{m \times n}$ proizvoljne matrice.

Ako je $fA = fB$ tada je $A = B$.

Teorema 1: Neka je A_{ef} matrica operatora

$A: U \rightarrow V$ u bazama $e = (e_1, \dots, e_n)$ i

$f = (f_1, \dots, f_m)$ prostora U i V i neka je

$$x = d_1 e_1 + \dots + d_n e_n; \quad Ax = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m.$$

Tada je:

$$a) \quad Ax = f A_{ef} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad b) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = A_{ef} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Dokaz: a) $Ax = A(d_1 e_1 + \dots + d_n e_n) = d_1 Ae_1 + \dots + d_n Ae_n =$

$$= (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} f A_{ef} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

(3)

$$b) f \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_m f_m =$$

$$= Ax = \underset{(a)}{fAe} f \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dakle, $f \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = fAe f \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pa iz leme 1 slijedi tvrdjenje b).

Teorema 2: (Teorema o jedinstvenosti)

Za svaku matricu $B = [b_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}$ i za proizvoljne baze $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_m)$ prostora U i V , postoji tačno jedan linearni operator $A: U \rightarrow V$ takav da je $Ae f = B$.

Dokaz: Neka je $A: U \rightarrow V$ preslikavanje koje vektoru $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ dodjeljuje vektor

~~$Ax = fB \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$~~ $Ax = fB \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (3)$

Dokažimo da je A linearni operator. Uzmimo vektore $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ i skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$.

Tada je $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) e_i$

Na osnovu (3) dobijamo:

$$A(\lambda x + \mu y) = fB \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 \\ \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n + \mu \beta_n \end{pmatrix} = fB \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix} + fB \begin{pmatrix} \mu \beta_1 \\ \mu \beta_2 \\ \vdots \\ \mu \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda f B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mu f B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Kako je $Ax = f B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $Ay = f B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ slijedi da je:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay,$$

što znači da je A linearni operator.

Dokazujemo da je $Ae_j = B$.

Kako je $e_j = 0 \cdot e_1 + \dots + 1 \cdot e_j + \dots + 0 \cdot e_n$, na osnovu (3) imamo:

$$Ae_j = f B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_n) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} f_1 + b_{2j} f_2 + \dots + b_{mj} f_m.$$

Dakle, j -tu kolonu matrice B čine koordinate vektora Ae_j u bazi f . Kako isto svojstvo ima i matrica Ae_j slijedi da je $Ae_j = B$.

Na kraju dokažimo jedinstvenost operatora A . Neka je $A': U \rightarrow V$ linearni operator sa svojstvom $A'e_j = B$. Tada je $Ae_j = A'e_j$, $j=1, 2, \dots, n$, pa na osnovu Teorema 1 (lekcija "linearni operatori" slijedi da je $A = A'$.

Napomena: Ako fiksiramo baze $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_m)$ u prostorima U i V , tada se može definisati preslikavanje vektorskog prostora $\mathcal{L}(U, V)$ u vektorski prostor matrica $M_{m \times n}$, koje operatoru $A \in \mathcal{L}(U, V)$ dodeljuje njegovu matricu $A_{ef} \in M_{m \times n}$ u bazama e i f :

$$\phi: \mathcal{L}(U, V) \rightarrow M_{m \times n}; \quad \phi(A) = A_{ef}.$$

Na osnovu prethodne teoreme preslikavanje ϕ je bijekcija. Pokazuje se da je preslikavanje ϕ izomorfizam vektorskih prostora $\mathcal{L}(U, V)$ i $M_{m \times n}$.

~~Teorema 2~~: Razmotrimo sada vezu između matrica operatora $A \in \mathcal{L}(U, V)$ u različitim parovima baza prostora U i V .

Teorema 3: Neka su $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ baze prostora U , $f = (f_1, \dots, f_m)$ i $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ baze prostora V . Neka su $P_{e \rightarrow e'}$ i $P_{f \rightarrow f'}$ matrice prelaza sa baze e na bazu e' , odnosno sa baze f na bazu f' . Tada za matrice A_{ef} i $A_{e'f'}$ operatora $A \in \mathcal{L}(U, V)$ u bazama e i f , odnosno e' i f' , važi jednakost:

$$A_{e'f'} = P_{f \rightarrow f'}^{-1} A_{ef} P_{e \rightarrow e'}$$

(6)

Dokaz: Na osnovu (2) važi:

$$(Ae'_1, \dots, Ae'_n) = f' A_{e'f'} \quad (***)$$

Ako je $P_{e \rightarrow e'} = [p_{ij}]_{m \times n}$, tada je:

$$e'_j = p_{1j} e_1 + \dots + p_{nj} e_n, \quad j=1, 2, \dots, n; \text{ odnosno}$$

$$Ae'_j = p_{1j} Ae_1 + \dots + p_{nj} Ae_n = (Ae_1, \dots, Ae_n) \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Relaciju (*) možemo zapisati u obliku:

$$(Ae'_1, \dots, Ae'_n) = (Ae_1, \dots, Ae_n) P_{e \rightarrow e'}$$

Kako je $(Ae_1, \dots, Ae_n) = f A_{ef}$, to prethodnu

jednakost možemo zapisati u obliku:

~~$(Ae_1, \dots, Ae_n) = f A_{ef}$~~

$$(Ae'_1, \dots, Ae'_n) = f A_{ef} P_{e \rightarrow e'}. \quad (**)$$

Kako je $f' = f P_{f \rightarrow f'}$ to je $f = f' P_{f \rightarrow f'}^{-1}$, pa

zamenom u (**) dobijamo:

$$(Ae'_1, \dots, Ae'_n) = f' P_{f \rightarrow f'}^{-1} A_{ef} P_{e \rightarrow e'}.$$

Iz (***) sledi:

$$f' A_{e'f'} = f' P_{f \rightarrow f'}^{-1} A_{ef} P_{e \rightarrow e'}.$$

Iz leme 1 dobijamo da je:

$$A_{e'f'} = P_{f \rightarrow f'}^{-1} A_{ef} P_{e \rightarrow e'}.$$

Teorema 4: Neka su U, V i W vektorski prostori \oplus nad poljem P , $e = (e_1, \dots, e_n)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ i $g = (g_1, \dots, g_p)$ ovim redom njihove baze, A_{ef} i B_{fg} matrice operatora $A: U \rightarrow V$ i $B: V \rightarrow W$ u bazama e i f , odnosno f i g . Tada za matricu $(BA)_{eg}$ proizvoda $BA: U \rightarrow W$ u bazama e i g važi jednakost:

$$(BA)_{eg} = B_{fg} A_{ef}$$

Dokaz: Jednakost (2) (str. 2) primijenimo na operator BA :

$$((BA)e_1, \dots, (BA)e_n) = g (BA)_{eg} \quad (****)$$

Kolone matrice $A_{ef} = [a_{ij}]_{m \times n}$ su koordinate vektora Ae_j , $j=1, 2, \dots, n$ u bazi f pa je:

$$(BA)e_j = B(Ae_j) = B\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} Bf_i; \quad j=1, \dots, n$$

Ovu relaciju možemo zapisati u matricnom obliku:

$$((BA)e_1, \dots, (BA)e_n) = (Bf_1, \dots, Bf_m) A_{ef}$$

a kako je $(Bf_1, \dots, Bf_m) = g B_{fg}$ to važi:

$$((BA)e_1, \dots, (BA)e_n) = g B_{fg} A_{ef}. \quad \text{Na osnovu } (****),$$

imamo $g (BA)_{eg} = g B_{fg} A_{ef}$ pa je:

$$(BA)_{eg} = B_{fg} A_{ef}.$$

Napomena: Za slučaj kad je $A: V \rightarrow V$ linearni operator, Teoremu 3 i Teoremu 4 formuliramo na sledeći način:

Teorema 6: Ako su A_e i A_f matrice operatora $A: V \rightarrow V$ u bazama $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_n)$ prostora V , tada je:

$$A_f = P_{e \rightarrow f}^{-1} A_e P_{e \rightarrow f}$$

gde je $P_{e \rightarrow f}$ matrica prelaza sa baze e na bazu f .

Teorema 7: Ako su A_e i B_e matrice operatora $A: V \rightarrow V$ i $B: V \rightarrow V$, u bazi $e = (e_1, \dots, e_n)$ prostora V , tada za matricu $(AB)_e$ proizvoda $AB: V \rightarrow V$ ~~u bazi~~ važi jednakost:

$$(AB)_e = A_e B_e.$$