Вјежбе (6 недјеља)

Деф Кажемо да је на реалном векторском простору E дефинисана фја скаларног производа, $<\ ,\ >: E\times E \to R$ ако важи:

1) $<x,x>\geq 0$, $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$
2) $<x,y>=<y,x>$
3) $<\lambda x, y> = \lambda <x,y>$
4) $<x+y,z> = <x,z>+<y,z>$

за све $x,y,z\in E$, $\forall \lambda\in R$.

Реалан векторски простор на коме је дефинисан скаларни производ је Еуклидски простор.

1 Доказати да се на векторском простору R^2 над R, скаларни производ може дефинисати на сљедећи начин:

$$x=(\alpha_1,\alpha_2),\ y=(\beta_1,\beta_2),\ x,y\in R^2$$

$$<x,y> = 2\alpha_1\beta_1+5\alpha_2\beta_2$$

Рјешење:

Ако је $x=(\alpha_1,\alpha_2), y=(\beta_1,\beta_2)$,

1) $<x,x> = 2\alpha_1\cdot\alpha_1+5\alpha_2\alpha_2 = 2\alpha_1^2+5\alpha_2^2\geq 0$

Дакле, $<x,x>\geq 0$, $\forall x$.

Докажимо $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$

Нека је $x=(0,0)$. Тада $<x,x> = 2\cdot 0^2+5\cdot 0^2=0$.

Обрнуто, нека је $<x,x>=0$, тј $2\alpha_1^2+5\alpha_2^2=0$. Пошто $\underbrace{2\alpha_1^2}_{\geq 0}+\underbrace{5\alpha_2^2}_{\geq 0}\geq 0$, једнакост је могућа само ако $2\alpha_1^2=0$, $5\alpha_2^2=0$, тј $\alpha_1=\alpha_2=0$.
Дакле, $x=0$.

2) $<x,y> = 2\alpha_1\beta_1+5\alpha_2\beta_2 = 2\beta_1\cdot\alpha_1+5\beta_2\cdot\alpha_2 = <y,x>$

3) Нека је $\lambda\in R$ произвољно,

$$<\lambda x,y> = <(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)> = 2(\lambda\alpha_1)\cdot\beta_1+5(\lambda\alpha_2)\beta_2 = \lambda(2\alpha_1\beta_1+5\alpha_2\beta_2) = \lambda<x,y>$$

4) Нека је $z=(\gamma_1,\gamma_2)\in R^2$

$$<x+y,z> = <(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2),(\gamma_1,\gamma_2)> = 2(\alpha_1+\beta_1)\gamma_1+5(\alpha_2+\beta_2)\gamma_2 =$$

$= 2\alpha_1\gamma_1 + 2\beta_1\gamma_1 + 5\alpha_2\gamma_2 + 5\beta_2\gamma_2 =$

$= (2\alpha_1\gamma_1 + 5\alpha_2\gamma_2) + (2\beta_1\gamma_1 + 5\beta_2\gamma_2) =$

$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$

Пошто својства 1-4 важе за произвољне векторе $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ и произвољно $\lambda \in \mathbb{R}$, закључујемо да је задатим пресликавањем дефинисан скаларни производ.

② Нека су $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ произвољни вектори у $\mathbb{R}^3$. Доказати да се скаларни производ на $\mathbb{R}^3$ може дефинисати на сљедећи начин:

$$\langle x, y\rangle = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

Рјешење:

1) $\langle x, x\rangle = 10\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3^2$

$= 10\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 =$

$= \alpha_1^2 + 9\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 =$

$(\alpha_1^2) + (3\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 \geq 0.$

Докажимо $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Нека је $x = (0,0,0)$. Тада $\langle x, x\rangle = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0.$

Обрнуто, нека је $\langle x, x\rangle = \underset{\geq 0}{\alpha_1^2} + \underset{\geq 0}{(3\alpha_1 + \alpha_2)^2} + \underset{\geq 0}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2} = 0$. Ово је могуће само ако:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= 0 \\ (3\alpha_1 + \alpha_2)^2 &= 0 \\ (\alpha_2 + \alpha_3)^2 &= 0 \end{aligned}, \text{ тј. } \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Дакле, $x = 0$.

2) $\langle x, y\rangle = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3 =$

$= 10\beta_1\alpha_1 + 3\beta_1\alpha_2 + 3\beta_2\alpha_1 + 2\beta_2\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 = \langle y, x\rangle$

3) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle =$

$= 10(\lambda\alpha_1)\beta_1 + 3(\lambda\alpha_1)\beta_2 + 3(\lambda\alpha_2)\beta_1 + 2(\lambda\alpha_2)\beta_2 + (\lambda\alpha_2)\beta_3 + (\lambda\alpha_3)\beta_2 + (\lambda\alpha_3)\beta_3$

$= \lambda\langle x, y\rangle$

4) Нека је $z = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$

$\langle x + y, z\rangle = \langle ((\alpha_1 + \beta_1), (\alpha_2 + \beta_2), (\alpha_3 + \beta_3)), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\rangle$

$= 10(\alpha_1+\beta_1)\gamma_1 + 3(\alpha_1+\beta_1)\gamma_2 + 3(\alpha_2+\beta_2)\gamma_1 + 2(\alpha_2+\beta_2)\gamma_2 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_3 + (\alpha_3+\beta_3)\gamma_2$ ②
$+ (\alpha_3+\beta_3)\cdot\gamma_3.$ $(*)$

Коришћењем дистрибутивности и комутативности, лако се добија да је израз $(*)$ једнак $\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

③ Нека је $\langle x, y\rangle = a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_1\beta_2 + b\alpha_2\beta_1 + c\alpha_2\beta_2$. Доказати да дата формула дефинише скаларни производ $\Leftrightarrow$ $a>0, ac>b^2$.

Решење:

$(\Longrightarrow)$ Претпоставимо да је датом формулом задат скаларни производ. Тада је $\langle x,x\rangle > 0$ за свако $x \neq (0,0)$.

Ако је $x=(1,0)$, $\langle x,x\rangle = a\cdot 1 + b\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 = a > 0$.

Такође, за $x=(\alpha,1)$, $\langle x,x\rangle > 0$, тј

$$a\alpha^2 + b\cdot\alpha + b\cdot\alpha + c\cdot 1 = a\alpha^2 + 2b\alpha + c > 0.$$

Пошто неједнакост важи $\forall\alpha$, одавде је $(a>0)$ $D<0$, тј

$$(2b)^2 - 4\cdot a\cdot c < 0$$
$$4b^2 - 4ac < 0$$
$$b^2 < ac$$

Дакле, $a>0$, $b^2<ac$ што је и требало доказати.

$(\Longleftarrow)$ Обрнуто, нека је $a>0$, $ac>b^2$. Покажимо да је датом формулом задат скаларни производ.

1) Покажимо $\langle x,x\rangle \geq 0$ и $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.

$$\langle x,x\rangle = a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_2^2 =$$
$$a\left(\alpha_1^2 + \frac{2b}{a}\alpha_1\alpha_2 + \frac{c}{a}\alpha_2^2\right) =$$
$$= a\left(\left(\alpha_1 + \frac{b}{a}\alpha_2\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\alpha_2^2 + \frac{c}{a}\alpha_2^2\right)$$
$$= \underset{>0}{a}\Bigg(\underbrace{\left(\alpha_1 + \frac{b}{a}\alpha_2\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\alpha_2^2(ac-b^2)}{a^2}}_{\geq 0 \text{ јер } ac>b^2}\Bigg)$$

Дакле, $\langle x,x\rangle \geq 0$.

За $x=(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$ важи да је $\langle x,x\rangle = a\,0 + 2b\cdot 0 + c\cdot 0 = 0$.

Обрнуто, ако је $\langle x,x\rangle = 0$, тада је $\left(\alpha_1 + \frac{b}{a}\alpha_2\right)^2 = 0$ и $\frac{\alpha_2^2(ac-b^2)}{a^2} = 0$.

Одавде,

$$\alpha_1 + \frac{b}{a}\alpha_2 = 0$$

Пошто је $ac-b^2>0$, $\frac{\alpha_2^2}{a^2}(ac-b^2)=0$, за $\alpha_2^2=0$, тј. $\alpha_2=0$,

$\alpha_1 + \frac{b}{a}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$

Дакле, $(\alpha_1, \alpha_2)=(0,0)$.

Својства 2), 3), 4) се лако доказују и задовољена су ~~свој~~ за произвољне бројеве a, b и c.

4 Дато је $A\in M_n(R)$. Дефинишемо пресликавање са

$$\langle x,y\rangle = (Ax)^T Ay$$

а) Дискутовати за какве матрице A је задато пресликавање скаларни производ.

б) Дискутовати за какве матрице A, за задати производ важи: $\langle x,y\rangle = x^T\cdot y$.

Рјешење:

Нека је A произвољна матрица реда $n\times n$, тј.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}$$

$$\langle x,x\rangle = (Ax)^T Ax = x^T A^T A\, x = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n\end{pmatrix} = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \geq 0, \ \forall x\in R^n$$

$$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 0 \Leftrightarrow c_i = 0,\ i=\overline{1,n}$$

$$c_i=0,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

Добијамо:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \iff x = 0 \text{ ако је } \det(A) \neq 0$$

② $<x,y> = (Ax)^T Ay = (c_1\, c_2 \dots c_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = (\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} = (Ay)^T Ax = <y,x>$

③ $<\alpha x, y> = \alpha <x,y>,\ x, y \in R^n,\ \alpha \in R$

$<\alpha x, y> = (A\alpha x)^T Ay = \alpha \cdot (Ax)^T Ay = \alpha <x,y>$

④ $<x, y+z> = (Ax)^T A(y+z) = (Ax)^T (Ay + Az) =$

$(Ax)^T Ay + (Ax)^T Az = <x,y> + <x,z>$

Дакле, ако је $\det A \neq 0$, ово је пресликавање скаларни производ.

⑥ Да би важило $<x,y> = x^T y$,

$(Ax)^T Ay = x^T y$

$x^T A^T A y = x^T y$. Одавде, $A^T A = E$.

Једнакост важи ако је A матрица која задовољава $A^T A = E$, тј. за ортогоналне матрице.

Деф Пресликавање $\| \, \|: E \to R^+$ које задовољава својства:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in R$, $x \in E$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

назива се норма вектора.

<u>Теорема (неједнакост Коши-Буњаковски)</u> За произвољне векторе $x, y \in E$, E-Еуклидски простор, важи неједнакост:

$$|<x,y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

⑤ Доказати неједнакости:

ⓐ $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right), \quad \alpha_i, z_i \in R$

ⓑ $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} z_i^2\right), \ \lambda_i \in R^+, \alpha_i, z_i \in R$

Рјешење:

За векторе $x = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ $y = (z_1, z_2 \ldots z_n)$, $\alpha_i, z_i \in R$, $i = \overline{1,n}$ примјенимо неједнакост Коши-Буњаковски.

$\langle x, y \rangle = \alpha_1 z_1 + \ldots \alpha_n z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ (стандардно дефинисан скаларни производ у R^n)

$\langle x, x \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$

$\langle y, y \rangle = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$

Из $|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ добијамо:

$$\left(\sum \alpha_i z_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)$$

ⓑ Нека су $x = (\sqrt{\lambda_1}\alpha_1, \sqrt{\lambda_2}\alpha_2 \ldots \sqrt{\lambda_n}\alpha_n)$, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} z_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} z_2 \ldots \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} z_n\right)$
$\alpha_i, z_i \in R$, $\lambda_i \in R^+$, $i = \overline{1,n}$

Примјеном неједнакости Коши-Буњаковски, добијамо:

$$\left(\sum \alpha_i z_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot z_i^2\right)$$

што је требало доказати.

⑥ Нека је V векторски простор реалних матрица реда 2×3 са скаларним производом: $\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$. За задате матрице $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ наћи $\langle A, B \rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$

Рјешење:

$$\langle A, B \rangle = tr(B^T A) = tr\left(\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}}\right) = tr\begin{pmatrix} 33 & & \\ & 41 & \\ & & 45 \end{pmatrix} = 33 + 41 + 45 = 119$$

⑥

$$\langle A,A\rangle = tr(A^TA) = tr\left(\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 117 & & \\ & 89 & \\ & & 65\end{pmatrix} = 117+89+65=271$$

Због $\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{271}$

Слично се налази $\|B\|$.

⑦ Доказати:

а) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

б) $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$

Рјешење:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle +$$
$$+ \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \qquad (1)$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u-v\rangle - \langle v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$
$$= \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \qquad (2)$$

Сабирањем (1) и (2),

$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2+2\|v\|^2$, па смо тиме доказали а).

Одузимањем (1) и (2),

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$, одакле је

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

⑧ У простору R^3 са стандардним скаларним производом дати су вектори: $a=(1,2,3)$, $b=(2,0,-1)$. Наћи најкраћи вектор облика $c = a+\alpha\cdot b$.

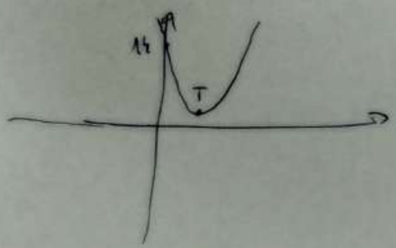
Рјешење:

$$c = a+\alpha\cdot b = (1,2,3)+\alpha(2,0,-1) = (1+2\alpha, 2, 3-\alpha)$$

Тражимо вектор c са најмањом нормом.

$$\|c\|^2 = (1+2\alpha)^2+2^2+(3-\alpha)^2 = 1+4\alpha+4\alpha^2+4+9-6\alpha+\alpha^2 = 5\alpha^2-2\alpha+14$$

Најмања вриједност $\|c\|^2$ даје најмању вриједност $\|c\|$, па тражимо вриједност α за коју је $\|c\|^2$ минимално.



$$f(\alpha)=5\alpha^2-2\alpha+14$$
$$a=5>0$$
$$D=4-5\cdot 4\cdot 14<0$$

$$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

Најмању вриједност достиже у $-\frac{b}{2a}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

За $\alpha=\frac{1}{5}$ је $c=\left(1+\frac{2}{5}, 2, 3-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{7}{5}, 2, \frac{14}{5}\right)$, и то је тражени најкраћи вектор.

9 Користећи неједнакости Коши-Буњаковски описати рјешења једначине.

$$(x-2y+3z)^2-14(x^2+y^2+z^2)=0$$

Рјешење:

Примијенимо неједнакост на векторе (x,y,z) и $(1,-2,3)$.
Важи:

$$|\langle (x,y,z),(1,-2,3)\rangle| \leq \|(x,y,z)\|\,\|(1,-2,3)\|, \text{ тј.}$$

$$|\langle (x,y,z),(1,-2,3)\rangle|^2 \leq \|(x,y,z)\|^2\,\|(1,-2,3)\|^2$$

$$(x-2y+3z)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)(1+4+9).$$

Коши-Буњаковски неједнакост постаје једнакост $\Leftrightarrow$ су вектори линеарно зависни, тј. ако важи:
$(x,y,z)=\alpha(1,-2,3)$.

Дакле, $x=\alpha$
$y=-2\alpha$
$z=3\alpha$.

Скуп рјешења: $\{(\alpha,-2\alpha,3\alpha), \alpha\in R\}$