Ortogonalnost vektora i ortonormirana baza

Definicija 1: Za dva vektora x, y iz euklidskog prostora E, kažemo da su ortogonalni i pišemo $x \perp y$, ako je $\langle x, y\rangle = 0$.

Primjer 1: Pokazati da za ortogonalne vektore x i y važi jednakost: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Primjer 2: Dokazati da u euklidskom prostoru E važe sledeća tvrđenja:

a) Jedini vektor koji je ortogonalan na sve vektore iz E je nula vektor.

b) Ako je $\langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$ za svako $x \in E$, tada je $a = b$.

c) Ako je vektor $x \in E$ ortogonalan na vektore $y_1, \dots, y_k$ tada je x ortogonalan i na svaku linearnu kombinaciju tih vektora.

Rješenje:

a) Ako je $\langle x, y\rangle = 0$ za svaki vektor $y \in E$, tada je i $\langle x, x\rangle = 0$ pa je $x = 0$.

b) Iz $\langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$ slijedi da je $\langle x, a-b\rangle = 0$, za svako $x \in X$, pa na osnovu a) dobijamo $a = b$.

c) Iz uslova $\langle x, y_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ slijedi da je $\langle x, \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k \rangle =$

$$= \alpha_1 \langle x, y_1 \rangle + \dots + \alpha_k \langle x, y_k \rangle = 0.$$

Def 2: Za sistem vektora $x_1, \dots, x_k$ iz euklidskog prostora E kažemo da je ortogonalan ako je $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ tj. $x_i \perp x_j$ za $i \neq j$.

Teorema 1: Ortogonalni sistem nenultih vektora iz euklidskog prostora E je linearno nezavisan.

Dokaz: Neka je $x_1, \dots, x_k$ ortogonalni sistem vektora tj. $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ za $i \neq j$, pri čemu je $x_i \neq 0$ za svako $i = 1, \dots, k$, i neka je $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$. Množeći ovu jednakost skalarno sa x_i dobijamo da je:

$$\langle \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k, x_i \rangle = 0$$

za svako $i = 1, \dots, k$. Dakle, za $i \in \{1, \dots, k\}$ važi:

$$\alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle + \alpha_2 \langle x_2, x_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle = 0.$$

Kako je $\langle x_j, x_i \rangle = 0$ za $j \neq i$ to ~~je~~ slijedi:

$$\alpha_i \langle x_i, x_i \rangle = 0.$$

Iz $\langle x_i, x_i \rangle \neq 0$ ~~na~~ slijedi $\alpha_i = 0$ za svako $i = 1, 2, \dots, k$.

<u>Def 3:</u> Ako vektori baze $g=(g_1, g_2, \dots, g_n)$ euklid-skog prostora E obrazuju ortogonalni sistem vektora, tada se za g kaže da je ortogonalna baza prostora E.

<u>Teorema 2:</u> U svakom konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru E, postoji ortogonalna baza.

<u>Dokaz:</u> Neka je $\dim E = n$ i neka je $f=(f_1, \dots, f_n)$ proizvoljna baza prostora E.
Neka je $g_1 = f_1$.
Broj α_1 odaberimo tako da element $g_2 = f_2 - \alpha_1 g_1$ bude ortogonalan na vektor g_1. Taj uslov će biti ispunjen ako i samo ako važi:

$$0 = \langle g_2, g_1\rangle = \langle f_2, g_1\rangle - \alpha_1 \langle g_1, g_1\rangle \text{ tj. } \alpha_1 = \frac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle}.$$

Prema tome vektor $g_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1$ je ortogonalan na vektor g_1.

Koristeći vektore g_1, g_2 i zadati vektor f_3, brojeve β_1, β_2 odredimo tako da vektor:

$$g_3 = f_3 - \beta_1 g_1 - \beta_2 g_2$$

bude ortogonalan na vektore g_1 i g_2.

Taj uslov će biti ispunjen ako i samo ako važi:

$$0 = \langle g_3, g_1\rangle = \langle f_3, g_1\rangle - \beta_1 \langle g_1, g_1\rangle$$

$$0 = \langle g_3, g_2\rangle = \langle f_3, g_2\rangle - \beta_2 \langle g_2, g_2\rangle$$

odakle dobijamo da je:

$$\beta_1 = \frac{\langle f_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle}, \quad \beta_2 = \frac{\langle f_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle}$$

Pri tome vektor

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2$$

je ortogonalan na vektore g_1 i g_2.
Na isti način se može dokazati da je vektor:

$$g_i = f_i - \frac{\langle f_i, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_i, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2 - \dots - \frac{\langle f_i, g_{i-1}\rangle}{\langle g_{i-1}, g_{i-1}\rangle} g_{i-1}$$

ortogonalan na vektore $g_1, g_2, \dots, g_{i-1}$, gdje je $i = 2, \dots, n$.
Tako smo konstruisali ortogonalni sistem nenultih vektora $g_1, g_2, \dots, g_n$. Na osnovu Teoreme 1, slijedi da je sistem $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ ortogonalna baza prostora E.

Def 4: Za bazu $e=(e_1,\dots,e_n)$ euklidskog prostora E kažemo da je ortonormirana, ako je:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{za } i=j \\ 0, & \text{za } i\neq j. \end{cases}$$

tj. ako je sistem $e_1,\dots,e_n$ ortogonalan i ako je $\|e_i\|=1$ za $i=1,2,\dots,n$.

Teorema 3: U svakom konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru postoji ortonormirana baza.

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme postoji ortogonalna baza $g=(g_1,\dots,g_n)$ prostora E.
Uočimo sistem vektora:

$$e_1=\frac{g_1}{\|g_1\|},\ e_2=\frac{g_2}{\|g_2\|},\ \dots,\ e_n=\frac{g_n}{\|g_n\|}$$

Taj sistem obrazuje ortonormiranu bazu jer je:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \left\langle \frac{g_i}{\|g_i\|}, \frac{g_j}{\|g_j\|}\right\rangle = \frac{1}{\|g_i\|\cdot\|g_j\|}\langle g_i, g_j\rangle =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{za } i=j \\ 0, & \text{za } i\neq j. \end{cases}$$

Napomena: Postupkom opisanim u prethodne dvije teoreme, polazeći od proizvoljnog linearno nezavisnog sistema $f_1, \dots, f_k$ euklidskog prostora možemo dobiti ortonormirani sistem $e_1, \dots, e_k$ takav da je:

$$\mathcal{L}(f_1, \dots, f_k) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k).$$

Dakle, prvo formiramo ortogonalni sistem:

$$g_1 = f_1$$

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1$$

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1 - \frac{\langle f_3, g_2 \rangle}{\langle g_2, g_2 \rangle} g_2$$

$$\vdots$$

$$g_k = f_k - \frac{\langle f_k, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1 - \frac{\langle f_k, g_2 \rangle}{\langle g_2, g_2 \rangle} g_2 - \dots - \frac{\langle f_k, g_{k-1} \rangle}{\langle g_{k-1}, g_{k-1} \rangle} g_{k-1}$$

a zatim se sistem $g_1, \dots, g_k$ normira:

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}, \ e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, \ \dots, \ e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}$$

~~Teorema 4: Baza $e = (e_1, \dots, e_n)$ euklidskog prostora E je ortonormirana~~

Teorema 4: (1) Baza $e=(e_1,\dots,e_n)$ euklidskog prostora E je ortonormirana ako i samo ako za proizvoljne vektore:

$$x=\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n,\quad y=\beta_1 e_1+\dots+\beta_n e_n$$

iz prostora E, važi:

$$\langle x,y\rangle=\alpha_1\beta_1+\dots+\alpha_n\beta_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i .$$

(2) Ako je $e=(e_1,\dots,e_n)$ ortonormirana baza euklidskog prostora E i $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i$ proizvoljni vektori, tada je:

a) $\alpha_i=\langle x,e_i\rangle,\ i=1,\dots,n.$

b) $\|x\|=\sqrt{\alpha_1^2+\dots+\alpha_n^2}$

c) $$\cos\varphi=\frac{\alpha_1\beta_1+\dots+\alpha_n\beta_n}{\sqrt{\alpha_1^2+\dots+\alpha_n^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\dots+\beta_n^2}}$$

gdje je φ ugao između vektora x i y.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka je $e=(e_1,\dots,e_n)$ ortonormirana baza prostora E. Tada za vektore $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ i $y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i$ važi:

$$\langle x,y\rangle=\Big\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\Big\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\langle e_i,e_j\rangle$$

Kako je $\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$ to je:

$\langle x, y\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

($\Leftarrow$) Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza prostora E takva da za proizvoljno $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ i $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ važi:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \quad (*)$$

Ako formulu $(*)$ primijenimo na vektore

$e_i = 0\cdot e_1 + \dots + 1\cdot e_i + \dots + 0\cdot e_j + \dots + 0\cdot e_n$

$e_j = 0\cdot e_1 + \dots + 0\cdot e_i + \dots + 1\cdot e_j + \dots + 0\cdot e_n$

dobijamo da je $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ za $i\neq j$, dok je $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ za svako $i = 1, \dots, n$.

Dakle, baza $e = (e_1, \dots, e_n)$ je ortonormirana.

(2) a) Trivijalno

b) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \overset{(1)}{=} \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$

c) Kako je $\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ to iz (1) i (2)b) slijedi:

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2}}$$

– Ortogonalni komplement –

<u>Definicija 1:</u> (1) Kažemo da je vektor x iz euklid-skog prostora E ortogonalan na skup $S \subseteq E$ i pišemo $x \perp S$, ako je:

$$(\forall y \in S)\ \langle x, y \rangle = 0.$$

(2) Za dva podskupa $S_1, S_2 \subseteq E$ kažemo da su ortogonalni i pišemo $S_1 \perp S_2$ ako je svaki vektor iz skupa S_1 ortogonalan na svaki vektor iz skupa S_2 tj:

$$(\forall x \in S_1)(\forall y \in S_2)\ \langle x, y \rangle = 0.$$

<u>Def 2:</u> Za sumu $L = L_1 + L_2$ potprostora L_1 i L_2 euklidskog prostora E, kažemo da je ortogonalna suma i pišemo $L = L_1 \oplus L_2$ ako je $L_1 \perp L_2$.

<u>Lema 1:</u> Ortogonalna suma je i direktna suma.

<u>Dokaz:</u> Neka je $L = L_1 \oplus L_2$. Da bi ova suma bila direktna suma dovoljno je dokazati da je $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Neka je $x \in L_1 \cap L_2$ tj. $x \in L_1$ i $x \in L_2$. Kako je $L_1 \perp L_2$ to je $\langle x, x \rangle = 0$ pa je $x = 0$.

Def 3: Ortogonalnim komplementom potprostora L euklidskog prostora E, nazivamo skup $L^{\perp} = \{x \in E \mid (\forall y \in L)\ \langle x, y\rangle = 0\}$.

Teorema 1: Za svaki potprostor L euklidskog prostora E, ortogonalni komplement $L^{\perp}$ je potprostor prostora E.

Dokaz: Neka su x_1, x_2 proizvoljni vektori iz $L^{\perp}$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tada za svako $y \in L$ važi:
$\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0$, pa je:

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle = 0.$$

Slijedi da $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L^{\perp}$ tj. $L^{\perp}$ je potprostor prostora E.

Teorema 2: Ako je L potprostor euklidskog prostora E, tada je $E = L \oplus L^{\perp}$.

Dokaz: Neka je $\dim L = k$ i $e_1, .., e_k$ baza u L.
Sistem $e_1, .., e_k$ dopunimo do ortogonalne baze $e_1, .., e_k, e_{k+1}, .., e_n$ prostora E.
Potprostor $\mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n)$ je direktni komplement potprostora L tj.

$$E = L \dotplus \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n). \text{ (prije dokazano)}$$

Dokazaćemo da je $L^{\perp} = \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n)$.
Svaki vektor $x = \beta_{k+1} e_{k+1} + \dots + \beta_n e_n \in \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n)$ je ortogonalan na svaki vektor $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k \in L$ jer je $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ za $i \neq j$. ~~\[illegible\]~~
Dakle iz $x \in \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n)$ slijedi $x \in L^{\perp}$ pa je $\mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n) \subseteq L^{\perp}$. $\rightarrow (1)$

Neka je sad $z \in L^{\perp}$ i neka je: ~~\[illegible\]~~

$$z = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo skalarno sa e_i gdje je $i \in \{1, 2, .., k\}$ tada je:

$$\langle z, e_i \rangle = \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle.$$

Kako je $z \in L^{\perp}$ dok $e_i \in L$ za $i \in \{1, .., k\}$ to je $\langle z, e_i \rangle = 0$ tj. $\alpha_i \langle e_i, e_i \rangle = 0$ a pošto je $\langle e_i, e_i \rangle \neq 0$ to je $\alpha_i = 0$.
Dakle, za svako $i \in \{1, .., k\}$ važi $\alpha_i = 0$ pa je $z = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n)$.
Otuda, $L^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n) \rightarrow (2)$
Iz (1) i (2) slijedi $L^{\perp} = \mathcal{L}(e_{k+1}, .., e_n)$ tj. $E = L \oplus L^{\perp}$.

Napomena: Iz teoreme 2. slijedi da se svaki vektor $x \in E$ na jedinstven način može predstaviti u obliku $x = y + z$, gdje $y \in L$ i $z \in L^{\perp}$.
Vektor y se naziva ortogonalnom projekcijom vektora x na podprostor L.