

①

Вјежба (недјеља др. 7)

Def Вектори x, y Еуклидесовог простора E су ортогонални кад
 $\langle x, y \rangle = 0 \quad (x \perp y)$

Def За систем вектора $e_1, e_2, \dots, e_n$ кажемо да је ортогоналан
ако је $e_i \perp e_j, \forall i \neq j$. Систем вектор је ортонормиран ако
је ортогоналан и $\|e_i\| = 1, \forall i = 1, \dots, n$.

Def Вектор x је ортогоналан на векторски простор L
ако је ортогоналан на сваки вектор $y \in L$.

① Примјенивши Грам-Шмитов поступак ортогонализације на
слидећи систем вектора.

$$x_1 = (1, -2, 2)$$

$$x_2 = (1, 0, -1)$$

$$x_3 = (5, -3, 7)$$

Решење:

Векторе изражимо у облику:

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 + \alpha_{21} \cdot v_1$$

$$v_3 = x_3 + \alpha_{31} \cdot v_1 + \alpha_{32} \cdot v_2, \text{ тако да:}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \langle v_1, v_3 \rangle = 0, \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

$$v_1 = (1, -2, 2)$$

Из $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ добијемо:

$$\langle x_1, x_2 + \alpha_{21} v_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle + \alpha_{21} \langle x_1, v_1 \rangle = 0$$

$$\alpha_{21} = - \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, v_1 \rangle}$$

$$\boxed{\alpha_{21} = - \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, v_1 \rangle}}$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, x_3 + \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2 \rangle = 0$$

$$\langle v_1, x_3 \rangle + \alpha_{31} \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_{32} \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

"0"

Одговор, $\alpha_{31} = - \frac{\langle b_1, x_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$

$$\langle b_1, b_3 \rangle = 0$$

$$\langle b_1, x_3 + \alpha_{31} b_1 + \alpha_{32} b_2 \rangle = 0$$

$$\langle b_1, x_3 \rangle + \alpha_{31} \underbrace{\langle b_1, b_1 \rangle}_0 + \alpha_{32} \langle b_1, b_2 \rangle = 0$$

$$\alpha_{32} = - \frac{\langle b_1, x_3 \rangle}{\langle b_1, b_2 \rangle}$$

$$\alpha_{21} = - \frac{(1, -2, 2) \cdot (-1, 0, -1)}{(1, -2, 2)(1, -2, 2)} = - \frac{-1 + 0 - 2}{1 + 4 + 4} = + \frac{3}{9} = + \frac{1}{3}$$

$$b_2 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3} \cdot (1, -2, 2) = (-1, 0, -1) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} b_3 &= (5, -3, -7) - \frac{(1, -2, 2) \cdot (5, -3, -7)}{(1, -2, 2)(1, -2, 2)} (1, -2, 2) - \frac{(5, -3, -7) \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= (5, -3, -7) - \frac{5 + 6 - 14}{9} (1, -2, 2) - \frac{-\frac{10}{3} + \frac{6}{3} + \frac{7}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$= (5, -3, -7) + \frac{1}{3} (1, -2, 2) - \frac{1}{1} \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(5, -3, -7) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = (5, -3, -7) + (1, 0, 1) = \underline{(6, -3, -6)}$$

② Докажи, следователно систем до ортонормиране базу у $\mathbb{R}^4$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Решавање:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$$

$$\|x_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|x_2\| = \sqrt{\langle x_2, x_2 \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

Систем x_1, x_2 је ортонормиран (ортонормалан и нормиран). ②

Сваки ортонормалан систем је линеарно независан и може се допунити до базе. Пошто је $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, додајемо два вектора.

Потражимо вектор y_3 , тј. $y_3 \perp x_1, y_3 \perp x_2$.

$$y_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} \langle y_3, x_1 \rangle &= 0 \\ \langle y_3, x_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_3 &= 2x_4 & x_1 - x_2 &= 0 \\ x_3 &= x_4 & x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Опште рјешење:

$$\{(x_1, x_1, x_3, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

За $x_1 = x_3 = 1$ добијемо вектор $y_3 = (1, 1, 1, 1)$. (они се бирају произвољно)

Нормирајмо вектор y_3 .

$$x_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{(1, 1, 1, 1)}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Потражимо вектор y_4 , тј.

$$\langle y_4, x_1 \rangle = 0, \langle y_4, x_2 \rangle = 0, \langle y_4, x_3 \rangle = 0$$

Нека $y_4 = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$.

Добијемо систем:

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0 \\ -z_1 + z_2 + z_3 - z_4 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{J+ \\ J-1}} \Rightarrow \begin{aligned} z_3 &= z_4 \\ z_1 + z_4 &= 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 - z_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z_1 &= -z_4 \\ z_3 &= z_4 \\ -z_4 - z_2 + z_4 - z_4 &= 0 \\ z_2 &= -z_4 \end{aligned}$$

Опште рјешење:

$$\{(-z_4, -z_4, z_4, z_4), z_4 \in \mathbb{R}\}$$

За $z_4 = 1$, $y_4 = (-1, -1, 1, 1)$.

Нормирајмо y_4 .

$$x_4 = \frac{y_4}{\|y_4\|} = \frac{(-1, -1, 1, 1)}{\sqrt{4}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Систем вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) је ортонормиран систем у $\mathbb{R}^4$.

③ Дати је векторски простор L простора $M_{2 \times 2}(R)$ дефинисан са:

$$L = \left\{ A \in M_2(R) : AX - XA = 0, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ако је стандардни скаларни производ за матрице дати са:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B), \text{ наћи ортонормирану базу у } L.$$

Решење:

Нађимо базу у L .

$$A \in L, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, AX = XA$$

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zb & a \\ zd & c \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ za & zb \end{pmatrix}$$

$$\text{Из } AX = XA, \begin{pmatrix} zb & a \\ zd & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ za & zb \end{pmatrix}, \text{ тада}$$

$$c = zb; d = a; zd = za; c = zb$$

Одакле,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ zb & a \end{pmatrix}, a, b \in R \right\} = \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}}_{E_2}, a, b \in R \right\}$$

$$= L(E_1, E_2)$$

Покажемо да су E_1, E_2 Л.Н (лако проверити), то је $\{E_1, E_2\}$ база у L , тада $\dim L = 2$

Нађимо: $\langle E_1, E_2 \rangle$

$$\langle E_1, E_2 \rangle = \text{tr}(E_1^T E_2) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Дакле, дат је ортогоналан.

Нормирајмо векторе.

$$U_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|}, U_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|}$$

$$\|E_1\| = \sqrt{\langle E_1, E_1 \rangle}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \text{tr}(E_1^T E_1) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\|E_1\| = \sqrt{2}$$

$$U_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\langle E_2, E_2 \rangle = \text{tr}(E_2^T E_2) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\|E_2\| = \sqrt{5}$$

$$U_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

Напомена: За је $\langle E_1, E_2 \rangle \neq 0$, предало је примјерни Грам-Шмитов процес као ортогонализацију.

④ Доказати да су вектори x и y Еуклидовски простора ортогонални $\Leftrightarrow \|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Решење:

($\Leftarrow$) Претпоставимо да $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$. Одакле,

$$\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2, \text{ иј.}$$

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq \langle x, x \rangle$$

$$\langle \cancel{x}, \cancel{x} \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle \geq \langle \cancel{x}, \cancel{x} \rangle$$

$$\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

$$\lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle y, x \rangle \geq 0 \quad (*).$$

За $\lambda = 0, 0 \geq 0$.

Претпоставимо да је $\lambda \neq 0$. Пошто (*) важи $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, онда:

$$(2\langle y, x \rangle)^2 - 4\langle y, y \rangle \cdot 0 \leq 0 \quad (\Delta^2 - 4ac \leq 0)$$

$$4\langle y, x \rangle^2 \leq 0 \quad |:4$$

$$\langle y, x \rangle^2 \leq 0$$

Ово је могуће само ако $\langle y, x \rangle = 0$, иј $y \perp x$
 $\Rightarrow$ Нека су x и y ортогонални, иј $\langle x, y \rangle = 0$.

Тада,

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_0 + \lambda^2 \langle y, y \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle + \underbrace{\lambda^2}_{\geq 0} \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\geq 0} \geq \langle x, x \rangle$$

Одавде, $\sqrt{\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle} \geq \sqrt{\langle x, x \rangle}$, иј:

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \quad \forall \lambda$$

Деф $A \subseteq V, A \neq \emptyset$,

$$A^\perp = \{x \in V \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}$$

— ортогонални комплемент

Деф За суму потпростора $L_1 + L_2 + \dots + L_k$ кажемо да је ортогонална ако је $L_i \perp L_j, \forall i, j = 1, \dots, k, i \neq j$.

Ознака: $L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$

Теорема. Ортогонална сума потпростора је директна.

Теорема Неко је L потпростор Еуклидовског простора V .

Тада:

$$V = L \oplus L^\perp$$

$$\forall x \in V, x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$$

$$y = \text{pr}_L^x, z = \text{ort}_{L^\perp}^x$$

⑤ Доказати:

а) $(L^\perp)^\perp = L$

б) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_2^\perp \subseteq L_1^\perp$

Решење:

$$(L^\perp)^\perp = \{x \in V \mid \langle x, w \rangle = 0, \forall w \in L^\perp\}$$

$$L^\perp = \{x \in V \mid \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in L\}$$

Доклажимо да $(L^\perp)^\perp \subseteq L$ и $L \subseteq (L^\perp)^\perp$.

Нека је $x \in (L^\perp)^\perp$. Тада:

$$x = v + w, v \in L, w \in L^\perp, \text{ та:}$$

$$\langle x, w \rangle = \langle v + w, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = \|w\|^2.$$

Пошто $x \in (L^\perp)^\perp, w \in L^\perp$ то $\langle x, w \rangle = 0$, та је одавде $\|w\|^2 = 0$, тј $\|w\| = 0$, та $w = 0$. Дакле, $x = v$, та је $x \in L$.
Дакле, $(L^\perp)^\perp \subseteq L$. (1)

Обрнуто, нека $x \in L$. Тада:

$$x = u + v, u \in L^\perp, v \in (L^\perp)^\perp.$$

$$\langle x, u \rangle = \langle u + v, u \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle = \|u\|^2.$$

Пошто $x \in L, u \in L^\perp$ $\langle x, u \rangle = 0$, та одавде $\|u\|^2 = 0$, тј $u = 0$.
Заврчујемо да је $x = v$, та $x \in (L^\perp)^\perp$.

Дакле, $L \subseteq (L^\perp)^\perp$ (2).

Из (1) и (2), $L = (L^\perp)^\perp$.

① Нека је $x \in L_1$. Тада $x \in L_2$ (због $L_1 \subseteq L_2$). Доклажимо $L_2^\perp \subseteq L_1^\perp$.

Узмимо $y \in L_2^\perp$, произвољно. Тада $(\forall z \in L_2) \langle y, z \rangle = 0$. Због $L_1 \subseteq L_2$,
 $(\forall z \in L_1) \langle y, z \rangle = 0$, што имплицира $y \in L_1^\perp$. Дакле, $L_2^\perp \subseteq L_1^\perp$.

⑥ Наћи $L^\perp$ за подпростор L генерисан векторима.

$$x_1 = (1, 3, 0, 2)$$

$$x_2 = (3, 7, -1, 2)$$

$$x_3 = (2, 4, -1, 0)$$

Дј Нађимо базу и димензију у L .

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{J^{-3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{J^{(-1)}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Угадајте, $B_L = \{x_1, x_2\}$, $\dim L = 2$.

Питајмо $L^\perp$ у $\mathbb{R}^4$ и.г. $\mathbb{R}^4 = L \oplus L^\perp$. Ортогонално ани је и директна, па $\mathbb{R}^4 = L \oplus L^\perp$, па $\dim L^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim L = 2$.
 $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$

Питајмо $x_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, и.г.

$$\langle x_3, x_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_3, x_2 \rangle = 0$$

(Ако је вектор ортогоалан на две базе векторе ~~и~~ ортогоалан је на све векторе овог векторског простора)

$$x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0$$

$$-2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$2x_4 = -x_1 - 3x_2$$

$$x_4 = \frac{-x_1 - 3x_2}{2}$$

Опште решење:

$$\left\{ (x_1, x_2, 2x_1 + 4x_2, \frac{-x_1 - 3x_2}{2}) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ x \left(x_1, 0, 2x_1, -\frac{x_1}{2} \right) + y \left(0, x_2, 4x_2, -\frac{3x_2}{2} \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ (2x, 0, 4x, -x) + (0, 2y, 8y, -3y) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x(2, 0, 4, -1) + y(0, 2, 8, -3) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$L \left\{ \underset{y_1}{(2, 0, 4, -1)}, \underset{y_2}{(0, 2, 8, -3)} \right\}$$

Гдежи $\mathbb{R}^4 = L \oplus K$ и $L \perp K$, па
 $\mathbb{R}^4 = L \oplus K$

$$K = L^\perp = L \left\{ (2, 0, 4, -1), (0, 2, 8, -3) \right\}.$$

⑦ У простору $\mathbb{R}[t]$ скаларни производ је дефинисан са:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$$

$$\text{где: } \langle f, g \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Како ортогоналну базу простора свих полинома за које је $f(1) = 0$.

Решение: $L = \{f \in P_{\leq n} \mid f(1) = 0\}$

Нека је $f(t) \in L$. Тада $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ и $f(1) = 0$,
тј. $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_n$.

$$\begin{aligned} \text{Сада, } f(t) &= (-a_1 - a_2 - \dots - a_n) + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = \\ &= a_1 \underbrace{(t-1)}_{f_1} + a_2 \underbrace{(t^2-1)}_{f_2} + \dots + a_n \underbrace{(t^n-1)}_{f_n} \end{aligned}$$

Произвожан вектор из L можемо записати преко $f_1, f_2, \dots, f_n$
а пошто су Л.Н. (већ доказано на претих везама), то
они чине базу у L .

Потражимо $L^\perp$, тј. $L \oplus L^\perp = P_{\leq n}$. Пошто је $L^\perp$ ^{суна} директна,
то $\dim L + \dim L^\perp = \dim P_{\leq n}$
 $\dim L^\perp = n+1 - n = 1$.

Нека је $g \in L^\perp$. Тада је он облика: $c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n$, тј. g .

$$\langle g, f_1 \rangle = 0 \Rightarrow -c_0 + c_1 = 0$$

$$\langle g, f_2 \rangle = 0 \Rightarrow -c_0 + c_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\langle g, f_n \rangle = 0 \Rightarrow -c_0 + c_n = 0$$

$$\Rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

$$\text{Одавде, } g(t) = c_0 + c_0 t + c_0 t^2 + \dots + c_0 t^n = c_0 (1 + t + t^2 + \dots + t^n)$$

$$L^\perp = L(g)$$

Напомена:

$$\langle g, f_1 \rangle = ?$$

$$f_1(t) = t - 1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n$$

$$g(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + \dots + c_n \cdot t^n, \text{ та } \langle f_1, g \rangle = -1 \cdot c_0 + 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \dots + 0$$
$$= -c_0 + c_1$$

⑧ Нека је S векторни простор Еуклидовог векторног простора
 V и нека је $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ортонормирана база у S . Ако је

$v \in V$ и $x = \sum_{k=1}^n \langle v, a_k \rangle a_k$ доказати: (5)

a) $v - x \in S^\perp$

б) $\forall y \in S \quad \|v - x\| \leq \|v - y\|$

а) За би доказати $v - x \in S^\perp$ докажимо да је:
 $\langle v - x, a_i \rangle = 0, \forall i \in S$

Горњотачкал на све векторе баз, па је ортогонална и на све векторе из S , тј. онда је из $S^\perp$

$$\begin{aligned} \langle v - x, a_i \rangle &= \langle v, a_i \rangle - \langle x, a_i \rangle = \\ &= \langle v, a_i \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^n \langle v, a_k \rangle a_k, a_i \right\rangle = \\ &= \langle v, a_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_i \rangle \end{aligned}$$

$(a_1, \dots, a_n)$ је ортонормирана база, па $a_i \perp a_j \Rightarrow$ за $i \neq j$,

па је одатне:

$$\begin{aligned} \langle v - x, a_i \rangle &= \langle v, a_i \rangle - \langle v, a_i \rangle \langle a_i, a_i \rangle \\ &= \langle v, a_i \rangle - \langle v, a_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

$\langle v - x, a_i \rangle = 0, \forall i$, па је $v - x \in S^\perp$

б) $\|v - y\| = \|v - x + x - y\|$, важи $v - x \in S^\perp$ (због а), а $x - y \in S$, јер $x, y \in S$.

$$\begin{aligned} \|v - y\|^2 &= \langle (v - x) + (x - y), (v - x) + (x - y) \rangle = \\ &= \|v - x\|^2 + 2 \langle v - x, x - y \rangle + \|x - y\|^2 = \|v - x\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|v - x\|^2 \end{aligned}$$

Одатне, $\|v - y\| \geq \|v - x\|$,

⑤ У векторском простору $\mathbb{R}^4$ со стандардним скаларним произвоном S је подпростор генерисан са:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, 1, 0, 3) \\ a_2 &= (2, 0, 1, 3) \\ a_3 &= (4, 1, 2, 9) \end{aligned}$$

a) Наћи базу у $S^\perp$.

b) Одредити ортогоналну пројекцију $v = (4, -2, -6, 7)$ на S . (оректа)

Упутство: Наћи базу у S , а затим у $S^\perp$.
 $v = x + y, x \in S, y \in S^\perp$

Решење: $x = \text{pr}_S v$

* Лема: $d(x, L) = \|\text{ort}_L x\|$

* Лема: $\angle(x, L) = \angle(x, \text{pr}_L x)$

⑩ Ако је $a \neq 0$ вектор Еуклидовог простора E , а $L = \{x \in E : \langle a, x \rangle = 0\}$ подпростор. Тада је:

$$d(x, L) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}. \text{ Доказати.}$$

Решење:

Пошто је $E = L \oplus L^\perp$, то за сваки $x \in E$, x је могуће записати као:

$$x = y + z, y \in L, z \in L^\perp.$$

Пошто је $z \in L^\perp$, ако је $z = \lambda \cdot a$, та је $x = y + \lambda \cdot a$.

$$\text{Одакле, } \langle x, a \rangle = \langle y + \lambda a, a \rangle = \underbrace{\langle y, a \rangle}_{=0} + \lambda \langle a, a \rangle = \lambda \|a\|^2$$

$$\lambda = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2}$$

Лема

$$\text{Одакле је } d(x, L) = \|\text{ort}_L x\| = \left\| \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a \right\| = \frac{|\langle x, a \rangle| \cdot \|a\|}{\|a\|^2} = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$

11) Наћи утао између вектора $x = (-3, 15, 1, -5)$ и подсвора L , где је $L = \mathcal{L}(y_1, y_2, y_3)$, а

$$y_1 = (2, 3, -4, -6)$$

$$y_2 = (1, 8, -2, -16)$$

$$y_3 = (1, -5, -2, 10)$$

Решење: На основу леме, $\forall x, u = \pm(x, p_{L^\perp} x)$. Заме, треба наћи $y \in L^\perp$, тд $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^\perp$.

Може се показати да је $L = \mathcal{L}(y_1, y_2)$, па је $\dim L = 2$.
Познато $L^\perp$, тд $R^4 = L \oplus L^\perp$. Познати вектори

x_1, x_2 тд:

$$x_1 \perp y_1$$

$$x_2 \perp y_1$$

$$x_1 \perp y_2$$

$$x_2 \perp y_2$$

Изаберимо да је $x_1 \perp x_2$ (ер су ортогонални вектори Л.Н)

Из:

$$\langle x_1, y_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_1, y_2 \rangle = 0$$

добивамо: $x_1 = (2, 2, 1, 1)$. Ово није једино решење.

Нека је $x_2 = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, тд.

$$\langle x_2, y_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_2, y_2 \rangle = 0$$

$$\langle x_2, x_1 \rangle = 0$$

Једно од решења је:

$$x_2 = (-2, 2, -1, 1)$$

Означимо: $K = \mathcal{L}(x_1, x_2)$

$$B_L = \{y_1, y_2\}$$

$$B_K = \{x_1, x_2\}$$

Унија база подсвора L и K је база у R^4 , а $B_L \perp B_K$, тд $L \perp K$, па из:

$$R^4 = L \oplus K$$

$$L \perp K$$

закључујемо

$$R^4 = L \oplus K, \text{ тд } K = L^\perp$$

Заме, $L^\perp = \mathcal{L}(x_1, x_2)$

Найти $\angle(x, L)$.

⑦

$$x = u + v, u \in L, v \in L^\perp \quad \left[u = \text{pr}_L^x, v = \text{ort}_L^x \right]$$

$$x = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

$$(-3, 15, 1, -5) = \alpha_1 (2, 3, -4, -6) + \alpha_2 (1, 8, -2, -16) + \beta_1 (2, 2, 1, 1) + \beta_2 (-2, 2, -1, 1)$$

Решение системы:

$$\alpha_1 = -1$$

$$\alpha_2 = 1$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\beta_2 = 3$$

$$\text{Таким образом, } u = -y_1 + y_2 = (-1, 5, 2, -10)$$

$$\text{pr}_L^x = (-1, 5, 2, -10)$$

$$\cos \angle(x, L) = \cos \angle(x, \text{pr}_L^x) = \frac{\langle x, \text{pr}_L^x \rangle}{\|x\| \|\text{pr}_L^x\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \angle(x, L) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle(x, L) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$