Вјежбе (недјеља бр. 8)

Линеарни оператори

Деф Нека су X, Y - векторски простор над пољем K. За пресликавање $A: X \to Y$ кажемо да је линеарни оператор, ако:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$(\forall x \in X)(\forall \alpha \in F) \quad A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot A(x)$$

или:

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F) \quad A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$$

① Нека је $V = L_1 \dotplus L_2$. Доказати да су следећи оператори линеарни.

а) $P: V \to V \quad Px = x_1, \; x_1 \in L_1$

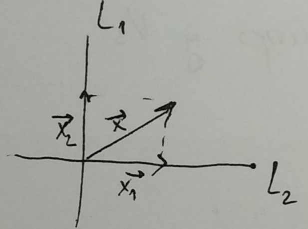
б) $R: V \to V \quad Rx = x_1 - x_2, \; x_1 \in L_1, \; x_2 \in L_2$

P - оператор пројекције простора V на L_1 паралелно L_2.

R - оператор рефлексије у односу на L_1 паралелно L_2.

Рјешење:

ⓐ



Нека су $x, y \in V$. Пошто је $V = L_1 \dotplus L_2$,

$x = x_1 + x_2, \; x_1 \in L_1, \; x_2 \in L_2$

$y = y_1 + y_2, \; y_1 \in L_1, \; y_2 \in L_2$

$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

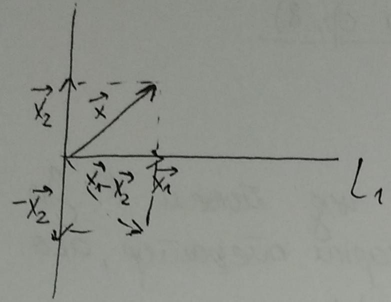
$$P(x+y) = P(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = P(\underbrace{x_1 + y_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2 + y_2}_{\in L_2}) = x_1 + y_1 = Px + Py$$

$\alpha \cdot x = \alpha(x_1 + x_2)$

$$P(\alpha \cdot x) = P(\underbrace{\alpha x_1}_{\in L_1} + \underbrace{\alpha x_2}_{\in L_2}) = \alpha x_1 = \alpha \cdot Px$$

P - јесте линеаран оператор

б)



$x, y \in V$

$x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$

$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

$$R(x+y) = R(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = R(\underbrace{(x_1+y_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(x_2+y_2)}_{\in L_2}) = (x_1+y_1) - (x_2+y_2) =$$

$$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = Rx + Ry$$

$$R(\alpha \cdot x) = R(\underbrace{\alpha x_1}_{\in L_1} + \underbrace{\alpha x_2}_{\in L_2}) = \alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) = \alpha \cdot Rx$$

② Испитати која су од следећих пресликавања $A: V_3 \to V_3$ линеарни оператори.

а) $A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \neq 0$ - фиксирани вектор у V_3

б) $A\vec{x} = [\vec{a}, \vec{x}, \vec{b}]$

в) $A\vec{x} = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \cdot \vec{x}$

Решење:

а) $\vec{x}, \vec{y} \in V_3$

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{a} = (\langle \alpha\vec{x}, \vec{a} \rangle + \langle \beta\vec{y}, \vec{a} \rangle) \cdot \vec{a} =$$

$$= \langle \alpha\vec{x}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{a} + \langle \beta\vec{y}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{a} = \alpha \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{a} + \beta \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{a} =$$

$$= \alpha \cdot A\vec{x} + \beta A\vec{y}.$$

б) Нека је $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормирана база, а

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

координате вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у тој бази.

Нека је $x=(x_1,x_2,x_3)\in V_3$

$$A\vec{x}=[\vec{a},\vec{x},\vec{b}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$A\vec{y}=[\vec{a},\vec{y},\vec{b}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\ \alpha x_2+\beta y_2,\ \alpha x_3+\beta y_3)$$

$$A(\alpha x+\beta\cdot y)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha x_1+\beta y_1 & \alpha x_2+\beta y_2 & \alpha x_3+\beta y_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\beta\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=$$

$$\alpha\cdot Ax+\beta Ay$$

4. $\vec{x},\vec{y}\in V_3$

$$A(\vec{x}+\vec{y})=\langle\vec{a},\vec{x}+\vec{y}\rangle\cdot(\vec{x}+\vec{y})=$$

$$=(\langle\vec{a},\vec{x}\rangle+\langle\vec{a},\vec{y}\rangle)\cdot(\vec{x}+\vec{y})=$$

$$\langle\vec{a},\vec{x}\rangle\cdot\vec{x}+\langle\vec{a},\vec{x}\rangle\cdot\vec{y}+\langle\vec{a},\vec{y}\rangle\cdot\vec{x}+\langle\vec{a},\vec{y}\rangle\cdot\vec{y}$$

$$=A\vec{x}+A\vec{y}+\langle\vec{a},\vec{x}\rangle\cdot\vec{y}+\langle\vec{a},\vec{y}\rangle\cdot\vec{x}$$

$$A(\vec{x}+\vec{y})\neq A\vec{x}+A\vec{y}.$$

Није линеаран оператор

(*) Ако је $A: U\to V$ линеаран оператор онда $A(O_U)=O_V$.

3. Која од следећих пресликавања $A: R^n\to R^n$ су линеарни оператори?

а) $Ax=(x_3,x_2,x_1)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$

б) $Ax=(x_3,x_1,x_1-1)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$

ц) $Ax=(x_1,x_1-x_2)$, $x=(x_1,x_2)\in R^2$

д) $Ax=(x_1,x_2,x_3^2)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$

Рјешење:

(б) $AO = A(0,0,0) = (0,0,0-1) \neq O_{R^3}$. Није линеаран оператор.

(ч) $A(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2)$

$$A(x+y) = A(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1, (x_1+y_1)-(x_2+y_2)) =$$

$x = (x_1, x_2)$

$y = (y_1, y_2)$

$$= (x_1+y_1, (x_1-x_2)+(y_1-y_2)) =$$

$$= (x_1, x_1-x_2)+(y_1, y_1-y_2) = Ax+Ay$$

$\alpha \in R$

$$A(\alpha x) = A(\alpha(x_1, x_2)) = A(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_1 - \alpha x_2) = \alpha(x_1, x_1-x_2) = A\alpha x$$

Јесте линеаран оператор.

остали (домаћи).

(4) Која од следећих пресликавања $A: P_n \to P_n$ су линеарни оператори.

а) $Af(t) = f(t+1)$

б) $Af(t) = f(t+1) - p(t)$, $p(t)$ - ненулти полином

Рјешење:

а) $A(\alpha f + \gamma g)(t) = (\alpha f + \gamma g)(t+1) = (\alpha f)(t+1) + (\gamma g)(t+1) =$

$= \alpha f(t+1) + \gamma g(t+1) = \alpha \cdot Af(t) + \gamma Ag(t)$

(б) $A0 = 0 - p(t) \neq 0 \Rightarrow$ није линеаран оператор

$0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots 0 \cdot t^n = f(t)$

$0 \cdot 1 + 0(t+1) + \dots + 0(t+1)^n = f(t+1)$

(5) Нека је $A: V_1 \to V_2$ линеаран оператор. Доказати да ако је W потпростор од V_1, онда је $A(W)$ потпростор од V_2.

Рјешење:

а) $W \subseteq V_1$

Ако су $x, y \in W$ онда $x+y \in W$

Ако је $\alpha \in K$, $x \in W$ онда $\alpha \cdot x \in W$

Нека су $x, y \in A(W)$. Тада $\exists u, v \in W$, тд. $A(u) = x$, $A(v) = y$

$$x + y = A(u) + A(v) = \underbrace{A(u+v)}_{\in W} \in A(W)$$

$\alpha \in F$, $x \in A(W)$, тада $\exists u \in W$, $A(u) = x$

$$\alpha \cdot x = \alpha A(u) = \underbrace{A(\alpha u)}_{\in W} \in A(W).$$

Закључујемо да је $A(W)$ потпростор од V_2.

<u>Језгро и слика оператора</u>

$A: X \to Y$ линеарак оператор

$\operatorname{Ker} A = \{x \in X : Ax = 0\}$

$\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in X\}$

6. Дато је пресликавање $A: R^3 \to R^3$ дефинисано са:

$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 + x_2)$. Доказати да је A линеаран оператор и одредити његово језгро и слику.

<u>Рјешење:</u>

Нека су $x, y \in R^3$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$$A(x+y) = A(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) =$$

$$= \big((x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) + x_3 + y_3,\ (x_1+y_1) - (x_3+y_3),\ (x_1+y_1) + (x_2+y_2)\big)$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 + x_2) + (y_1 + 2y_2 + y_3,\ y_1 - y_3,\ y_1 + y_2)$$

$$= Ax + Ay$$

$\alpha \in R$, $x \in R^3$

$$A(\alpha x) = A(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 + 2 \cdot \alpha x_2 + \alpha x_3,\ \alpha x_1 - \alpha x_3,\ \alpha x_1 + \alpha x_2)$$

$$= \alpha (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 + x_2) = \alpha \cdot Ax$$

Језгро, $\operatorname{Ker} A = \{x \in R^3 \mid Ax = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : ((x_1 + 2x_2 + x_3), (x_1 - x_3), (x_1 + x_2)) = (0,0,0)\}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1-x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1-2x_1+x_1=0 \\ x_1=x_3 \Rightarrow x_3=x_1 \\ x_1=-x_2 \Rightarrow x_2=-x_1 \end{array}$$

Рјешење: $\{(x_1,-x_1,x_1), x_1\in R\}$

Дакле, $Ker A=\{(x_1,-x_1,x_1), x_1\in R\}=\{x_1(+1,-1,1), x_1\in R\}=\underline{\mathcal{L}\{(1,-1,1)\}}$,

$Im A=\{Ax, x\in R^3\}=\{(x_1+2x_2+x_3, x_1-x_3, x_1+x_2), x_1,x_2,x_3\in R\}$

$=\{(x_1,x_1,x_1)+(2x_2,0,x_2)+(x_3,-x_3,0), x_1,x_2,x_3\in R\}$

$=\{x_1\underbrace{(1,1,1)}_{f_1}+x_2\underbrace{(2,0,1)}_{f_2}+x_3\underbrace{(1,-1,0)}_{f_3}, x_1,x_2,x_3\in R\}$.

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{Im A=\mathcal{L}(f_1,f_2)}$,

7) Дат је линеаран оператор $T: M_2(R)\to M_2(R)$ задат са:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & -a+b+2c \\ a-c-d & -a+2c+d \end{pmatrix}$$

Наћи језгро и слику оператора.

(домаћи)

8) Нека је $A: P_2[x]\to P_1[x]$ дефинисан са:

$$A(ax^2+bx+c)=(a-3b+c)x+(a+b-c)$$

а) Доказати да је оператор линеаран.

б) Наћи ранг и дефект оператора

<u>Рјешење:</u>

а) $A(ax^2+bx+c+a_1x^2+b_1x+c_1)=A((a+a_1)x^2+(b+b_1)x+c+c_1)$

$=(a+a_1-3(b+b_1)+c+c_1)x+(a+a_1+b+b_1-(c+c_1))=$

$=(a-3b+c)x+(a+b-c)+(a_1-3b_1+c_1)x+(a_1+b_1-c_1)=$

$A(ax^2+bx+c) + A(a_1x^2+b_1x+c_1)$

$A(\alpha(ax^2+bx+c)) = A(\alpha a\cdot x^2+\alpha b\cdot x+\alpha c) =$

$= (\alpha a - 3\alpha b + \alpha c)x + (\alpha a + \alpha b - \alpha c) =$

$\alpha((a-3b+c)x + (a+b-c)) = \alpha\cdot A(ax^2+bx+c).$

8. $\operatorname{Ker} A = \{f \in P_2[X] : Af = 0\} = \{ax^2+bx+c : (a-3b+c)x+a+b-c=0\}$

$\begin{matrix} a-3b+c=0 \\ a+b-c=0 \end{matrix} \Rightarrow 2a-2b=0 \quad \underline{a=b}, \qquad c=a+b \quad \underline{=2a},$

$\operatorname{Ker} A = \{ax^2+ax+2a,\ a\in R\} = \{a(\underbrace{x^2+x+2}_{p_1}),\ a\in R\} = \mathcal{L}(p_1)$

$\dim(\operatorname{Ker} A) = d(A) = 1$ (дефект оператора)

$\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in P_2[x]\} = \{(a-3b+c)x + (a+b-c),\ a,b,c\in R\}$

$= \{d\cdot x + e\cdot 1,\ d,e\in R\} = \mathcal{L}\{1,x\}$

$\dim(\operatorname{Im} A) = r(A) = 2.$

9. Нека је A линеарно пресликавање векторског простора V, $A^2 = A \Leftrightarrow V = \operatorname{Ker} A + W$, $W = \{x \mid A(x) = x\}$

Рјешење:

Нека је $A^2 = A$, $W = \{x \mid A(x) = x\}$

W је потпростор, јер:

$x, y \in W,\ \alpha, \beta \in K$

$\alpha\cdot x + \beta\cdot y = \alpha\cdot A(x) + \beta A(y) = A(\underbrace{\alpha x + \beta y}_{\in}) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$

($\Rightarrow$) Нека је $x\in V$ и $A(x) = y$. Посматрајмо:

$z = x - y$

$A(z) = A(x-y) = A(x) - A(A(x)) = A(x) - A^2(x) = 0 \Rightarrow$

$\underline{z \in \operatorname{Ker} A}$,

$A(y) = A^2(x) = A(x) = y, \ y \in W$

Дакле, сваки вектор $x \in V$ може се записати:

$$x = y + z, \ y \in W, \ z \in \operatorname{Ker} A \qquad (1)$$

Да ли је $\operatorname{Ker} A \cap W = \{0\}$?

Нека је $x \in \operatorname{Ker} A$. Тада, $Ax = 0$. Ако је $x \in W$, онда $A(x) = x$

$$Ax = x = 0$$

Одавде, $\operatorname{Ker} A \cap W = \{0\}$. (2)

Из (1) и (2) је $V = \operatorname{Ker} A \dotplus W$

($\Leftarrow$) Нека је $V = \operatorname{Ker} A \dotplus W$, $x = y + z$, $y \in \operatorname{Ker} A$, $z \in W$.

Пошто $y \in \operatorname{Ker} A$, $Ay = 0$

-||- $z \in W$, $A(z) = z$.

Сада,
$$Ax = A(y+z) = Ay + Az = 0 + z$$
$$A^2 x = A(Ax) = A(z) = z \quad \Rightarrow A^2(x) = A(x), \ \forall x$$

Одавде је $A^2 = A$.

(10) Нека је $T: R^2 \to R^3$ линеарно пресликавање и нека:

$T(1,2) = (3,-1,5)$

$T(0,1) = (2,1,-1)$

Наћи $T(a,b)$.

<u>Рјешење:</u>

$$T(1,2) = T(e_1 + 2e_2) = T(e_1) + 2T(e_2) = 3f_1 - f_2 + 5f_3$$
$$T(0,1) = T(0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2) = T(e_2) = 2f_1 + f_2 - f_3$$

Одавде,
$$T(e_1) = 3f_1 - f_2 + 5f_3 - 2(2f_1 + f_2 - f_3) =$$
$$= \underbrace{-f_1 - 3f_2 + 7f_3}_{},$$

$$T(e_2) = 2f_1 + f_2 - f_3$$

$T(a,b) = T(ae_1 + be_2) = aT(e_1) + bT(e_2) =$
$= a(-f_1 - 3f_2 + 7f_3) + b(2f_1 + f_2 - f_3) =$
$= (-a+2b)f_1 + (-3a+b)f_2 + (7a-b)f_3$

$T(a,b) = (-a+2b, -3a+b, 7a-b)$

(11) Наћи L^{-1}, $L: R^3 \to R^3$, $L(x,y,z) = (x+y-2z, x+2y+z, 2x+2y-3z)$.

Рјешење:

Тражимо инверзни оператор за L

$L(x,y,z) = (a,b,c)$, гдје је: $a = x+y-2z$
$b = x+2y+z$
$c = 2x+2y-3z$.

$L^{-1} \circ L = I$

$L^{-1}(L(x,y,z)) = I(x,y,z) = (x,y,z)$

$L^{-1}(a,b,c) = (x,y,z)$

$$\left.\begin{array}{l} a = x+y-2z \\ b = x+2y+z \\ c = 2x+2y-3z \end{array}\right)^{(-2)\ (-2)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2a+b = -x+5z \\ -2a+c = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5z+2a-b \\ = -10a+5c+2a-b = -8a-b+5c, \end{array}$$

$y = a - x + 2z =$
$= 5a+b-3c,$

$L^{-1}(a,b,c) = (-8a-b+5c, 5a+b-3c, -2a+c)$