- Operacije sa operatorima -

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem P. Sa $\mathcal{L}(U,V)$ označavamo skup svih linearnih operatora $A: U \to V$. Na skupu $\mathcal{L}(U,V)$ definisaćemo operacije: $+ \to$ sabiranje linearnih operatora i $\cdot \to$ množenje linearnih operatora brojem $\lambda \in P$.

Def 1: (1) Zbirom operatora $A, B \in \mathcal{L}(U,V)$ u oznaci $A+B$, nazivamo preslikavanje $A+B: U \to V$ definisano na sledeći način: $(A+B)x = Ax + Bx$, $x \in U$.

(2) Proizvodom operatora $A \in \mathcal{L}(U,V)$ i broja $\lambda \in P$, u oznaci λA, nazivamo preslikavanje $\lambda A: U \to V$ definisano na sledeći način:

$$(\lambda A)x = \lambda Ax, \quad x \in U.$$

Teorema 1: a) Zbir $A+B$ operatora $A, B \in \mathcal{L}(U,V)$ je linearni operator tj. $A, B \in \mathcal{L}(U,V) \Rightarrow A+B \in \mathcal{L}(U,V)$

(b) Proizvod λA operatora $A \in \mathcal{L}(U,V)$ i broja $\lambda \in P$ je linearni operator tj. $A \in \mathcal{L}(U,V) \wedge \lambda \in P \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{L}(U,V)$

Dokaz:

(a) Za proizvoljno $x, y \in U$ i $\alpha, \beta \in P$ važi:

$$(A+B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) =$$
$$= \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By = \alpha(Ax + Bx) + \beta(Ay + By) =$$
$$= \alpha(A+B)x + \beta(A+B)y.$$

(b) $(\lambda A)(\alpha x+\beta y)=\lambda A(\alpha x+\beta y)=\lambda(\alpha Ax+\beta Ay)=$
$=\alpha(\lambda A)x+\beta(\lambda A)y$.

Teorema 2: $(\mathcal{L}(U,V),+,\cdot)$ je vektorski prostor nad poljem P. (ovdje je $+$ sabiranje operatora a $\cdot$ množenje operatora brojem).

Dokaz: Neutralni element za sabiranje je nula operator tj. $O+A=A+O=A$ za svako $A\in\mathcal{L}(U,V)$. Operator $-A=(-1)A$ je suprotni element elementa A: $A+(-A)=(-A)+A=O$.
Iz $((A+B)+C)x=(A+B)x+Cx=(Ax+Bx)+Cx=$
$=Ax+(Bx+Cx)=Ax+(B+C)x=(A+(B+C))x$
za svako $x\in U$, slijedi da je $(A+B)+C=A+(B+C)$.
Na isti način se dokazuje jednakost $A+B=B+A$.
Slično se dokazuju ostala svojstva vektorskog prostora.

Neka su U, V i W vektorski prostori nad poljem P. Tada za proizvoljna preslikavanja $A: U\to V$ i $B: V\to W$ možemo definisati kompoziciju ili proizvod BA kao preslikavanje $BA: U\to W$ koje elementu $x\in U$ dodjeljuje element $B(Ax)\in W$:

$$BA: U\to W;\ (BA)x=B(Ax).$$

Teorema 3: Ako su $A: U \to V$ i $B: V \to W$ linearni operatori, tada je i proizvod $BA: U \to W$ linearni operator tj.:

$$A \in \mathcal{L}(U,V) \wedge B \in \mathcal{L}(V,W) \Rightarrow BA \in \mathcal{L}(U,W).$$

Dokaz:

$$(BA)(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) =$$
$$= B(\alpha Ax) + B(\beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) =$$
$$= \alpha (BA)x + \beta (BA)y.$$

Neka je $A: U \to V$ bijektivni operator. Tada se može definisati inverzno preslikavanje:

$$A^{-1}: V \to U;\ A^{-1}y = x,\ y \in V \Leftrightarrow y = Ax$$

Na osnovu definicije inverznog preslikavanja, imamo da je: $AA^{-1}y = y,\ y \in V$ i $A^{-1}Ax = x,\ x \in U$ odnosno $AA^{-1} = E_V$ i $A^{-1}A = E_U$, gdje su E_U i E_V jedinični operatori na prostorima U i V.

Teorema 4: Inverzno preslikavanje $A^{-1}: V \to U$ bijektivnog linearnog operatora $A: U \to V$ je linearni operator.

Dokaz: Neka su $y_1, y_2 \in V$ i $\alpha, \beta \in P$.

Neka je $x_1 = A^{-1}y_1$ i $x_2 = A^{-1}y_2$ odnosno $y_1 = Ax_1$ i $y_2 = Ax_2$.

Tada je: $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2)$.

Odavde slijedi da je:

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2 .$$