Вјежбе (недјеља бр. 9)

Матрица линеарног оператора

Нека су X и Y векторски простори над пољем K. Нека је $A: X \to Y$ линеаран оператор, $\{e_1, e_2 \dots e_m\}$ база простора X, а $\{f_1, f_2 \dots f_n\}$ база простора Y. Нека је:

$$
\begin{aligned}
Ae_1 &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} \cdot f_2 + \dots + \alpha_{n1} \cdot f_n \\
Ae_2 &= \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} \cdot f_2 + \dots + \alpha_{n2} \cdot f_n \\
&\vdots \\
Ae_m &= \alpha_{1m} f_1 + \alpha_{2m} f_2 + \dots + \alpha_{nm} \cdot f_n
\end{aligned}
$$

Нека је $x \in X$ произвољан вектор, тада: $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m$

$$y = Ax = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \dots + \eta_n f_n$$

$$
\begin{aligned}
y = A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m) &= \lambda_1 A e_1 + \dots + \lambda_m A e_m = \\
&= \lambda_1 (\alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \dots + \alpha_{n1} f_n) + \lambda_2 (\alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \dots + \alpha_{n2} f_n) + \\
&\quad \dots \lambda_m (\alpha_{1m} f_1 + \alpha_{2m} f_2 + \dots + \alpha_{nm} f_n) = \\
&= (\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{12} + \dots + \lambda_m \alpha_{1m}) f_1 + (\lambda_1 \alpha_{21} + \lambda_2 \alpha_{22} + \dots + \lambda_m \cdot \alpha_{2m}) f_2 + \\
&\quad \dots + (\lambda_1 \alpha_{n1} + \lambda_2 \cdot \alpha_{n2} + \dots + \lambda_m \cdot \lambda_{nm}) f_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= \alpha_{11} \lambda_1 + \alpha_{12} \lambda_2 + \dots + \lambda_m \alpha_{1m} \\
\eta_2 &= \alpha_{21} \lambda_1 + \alpha_{22} \lambda_2 + \dots + \lambda_m \cdot \alpha_{2m} \\
&\vdots \\
\eta_n &= \alpha_{n1} \lambda_1 + \alpha_{n2} \lambda_2 + \dots \alpha_{nm} \cdot \lambda_m
\end{aligned}
$$

Матрица оператора A у односу на базе $\{e_1, \dots e_m\}$ и $\{f_1, f_2 \dots f_n\}$ је матрица

$$
A_{ef} = \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2m} \\
\vdots & & & \vdots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nm}
\end{pmatrix}
$$

$$[x]_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \qquad [y]_f = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$[y]_f = A_{fe} \cdot [x]_e$$

① Одредити матрицу оператора у односу на стандардну базу простора.

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, \; -x_1 + x_3)$$

Рјешење:

$$A: R^3 \to R^2$$

База у R^3: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ База у R^2: $f_1 = (1,0)$, $f_2 = (0,1)$

$$Ae_1 = A(1,0,0) = (1,-1) = 1f_1 - 1f_2$$
$$Ae_2 = A(0,1,0) = (2,0) = 2f_1 + 0f_2$$
$$Ae_3 = A(0,0,1) = (-3,1) = -3f_1 + 1 \cdot f_2$$

$A_{ef} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрица оператора у односу на базе $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\{f_1, f_2\}$.

② Оператор $A: V \to V$ који дјелује у тродимензионалном простору векторе a_1, a_2, a_3 преводи у b_1, b_2, b_3.

$a_1 = (5,3,1)$ $b_1 = (-2,1,0)$

$a_2 = (1,-3,-2)$ $b_2 = (-1,3,0)$

$a_3 = (1,2,1)$ $b_3 = (2,-3,0)$

Наћи матрицу оператора у односу на базу a_1, a_2, a_3.

Рјешење:

$$b_1 = Aa_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$
$$b_2 = Aa_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$$
$$b_3 = Aa_3 = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 \cdot a_3$$

Сада,

$(-2,1,0)=\alpha_1(5,3,1)+\alpha_2(1,-3,-2)+\alpha_3(1,2,1)$

$$\begin{aligned} -2 &= 5\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ +1 &= 3\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1&=-5 \\ \alpha_2&=6 \\ \alpha_3&=17 \end{aligned}$$

$(-1,3,0)=\beta_1(5,3,1)+\beta_2(1,-3,-2)+\beta_3(1,2,1)$

$\beta_1=-10$

$\beta_2=13$

$\beta_3=36$

$(2,-3,0)=\gamma_1(5,3,1)+\gamma_2(1,-3,-2)+\gamma_3(1,2,1)$

$\gamma_1=11$

$\gamma_2=-14$

$\gamma_3=-39$

Матрица оператора A у односу на $\{a_1,a_2,a_3\}$

$$A_a=\begin{pmatrix}-5 & -10 & 11\\ 6 & 13 & -14\\ 17 & 36 & -39\end{pmatrix}$$

Г Ако су координате вектора x, $x=(x_1,x_2,x_3)$ у бази (a_1,a_2,a_3)

$$A_a\cdot[x]_a=\begin{pmatrix}-5 & -10 & 11\\ 6 & 13 & -14\\ 17 & 36 & -39\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5x_1-10x_2+11x_3\\ 6x_1+13x_2-14x_3\\ 17x_1+36x_2-39x_3\end{pmatrix}$$

координате слике

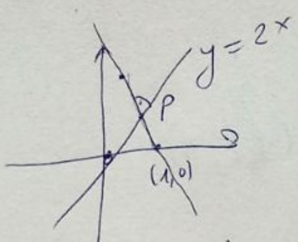
3) Нека је $X=R^2=Y$, $A: X\to Y$ оператор симетрије у односу на праву $y=2x$. Одредити матрицу оператора A у односу на базу:

а) $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$

б) $b_1=(1,2)$, $b_2=(2,-1)$

ц) $a_1=(1,0)$, $a_2=(1,2)$

a)



Нека је l_1 права нормална на праву $y=2x$ и пролази кроз $(1,0)$. Циљ је наћи тачку симетричну тачки $(1,0)$ у односу на l.

$$l_1: y-0=-\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Нађимо пресек l_1 и l.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2x=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{5} \\ \qquad\qquad\quad y=\frac{2}{5} \end{array}$$

$$P\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$$

Тачка симетрично тачки $M(1,0)$ у односу на праву има координате (x_1,y_1) при чему:

$$\frac{1}{5}=\frac{x_1+1}{2} \qquad \frac{2}{5}=\frac{y_1+0}{2}$$
$$x_1=-\frac{3}{5} \qquad y_1=\frac{4}{5}$$

$$Ae_1=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

На исти начин нађемо слику вектора $e_2=(0,1)$.
Тражимо ј-ну праве l_2 која је нормална на l, која пролази кроз $(0,1)$.

$$l_2\cap l=\{P_1\}$$
$$P_1\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$$

M_2- тачка симетрична тачки $(1,0)$ у односу на l.

$$M_2\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right).$$

Дакле, $Ae_2=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

$$Ae_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_2$$

$$Ae_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}e_1 + \frac{3}{5}e_2$$

$$A_e = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

(б) $Ab_1 = b_1 = b_1 + 0 \cdot b_2$

$Ab_2 = (-2, 1) = -b_2 = 0 \cdot b_1 - b_2$

⌈ b_1 лежи на $y = 2x$, па је $Ab_1 = b_1$

$Ab_2 = A(2,-1) = A(2e_1 - e_2) = 2Ae_1 - Ae_2 = 2\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (-2, 1)$

Или: $A(b_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⌋

Сада, $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(в) $Aa_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,2)$

$Aa_2 = a_2 = 0 \cdot a_1 + a_2$

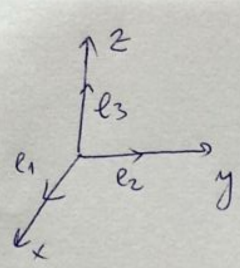
$\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (\alpha_1, 0) + (\alpha_2, 2\alpha_2)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= -\frac{3}{5} \\ 2\alpha_2 &= \frac{4}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Одавде, $A_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$

(4) Нека је A оператор ротације простора R^3 око осе Ox за усмјерени угао φ. Наћи матрицу тог оператора у стандардној бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

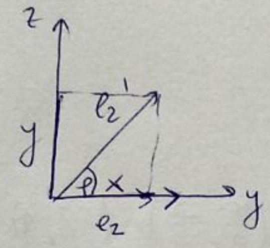
<u>Рјешење:</u>



$Ae_1 = e_1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3$

(на x-оси се налази, па ротација фиксира вектор!)

$Ae_2 = ?$



e_2' је такође јединични вектор (настао ротацијом e_2)

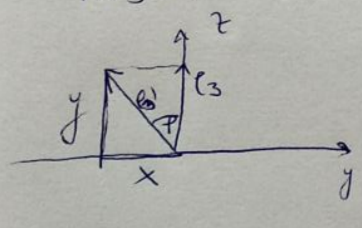
$Ae_2 = e_2' = 0\cdot e_1 + x\cdot e_2 + y\cdot e_3$

$\cos\varphi = \frac{x}{|e_2'|} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{y}{|e_2'|} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\varphi$

Дакле, $Ae_2 = 0e_1 + e_2\cos\varphi + e_3\cdot\sin\varphi$

$Ae_3 = ?$



e_3' настаје ротацијом e_3 за угао φ

$Ae_3 = e_3' = 0\cdot e_1 + (-x)e_2 + ye_3$

$\cos\varphi = \frac{y}{|e_3'|} \Rightarrow y = \cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{x}{|e_3'|} \Rightarrow x = \sin\varphi$

$Ae_3 = e_3' = 0\cdot e_1 - \sin\varphi\cdot e_2 + \cos\varphi\cdot e_3$

Матрица оператора у односу на $\{e_1, e_2, e_3\}$ у R^3 је:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

⑤ Нека је $V=R^3$, $M=\mathcal{L}(e_1,e_2)$ и $N=\mathcal{L}(e_3)$. Наћи матрицу оператора пројектовања на потпростор M паралелно са N.

Рјешење:

Стандардна база у R^3, $\{e_1,e_2,e_3\}$

$B_1=\{e_1,e_2\}$ база у M
$B_2=\{e_3\}$ база у N.

Унија база M и N даје базу у R^3, па је њихова сума директна и важи:

$$R^3=M\dot{+}N.$$

Нека је P оператор пројектовања на M паралелно са N.

$x\in R^3$, $x=u+v$, $u\in M$, $v\in N$

$Px=u$

$Pe_1=P(\overset{\in M}{e_1}+\overset{\in N}{0})=e_1=1e_1+0e_2+0e_3$
$Pe_2=P(e_2+0)=e_2=0e_1+1\cdot e_2+0e_3$
$Pe_3=P(0+e_3)=0=0e_1+0e_2+0e_3$

$$P_e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ матрица оператора P у односу на стандардну базу R^3.

⑥ У простору квадратних матрица реда 2 фиксирана је база
$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Наћи у тој бази:

ⓐ матрицу оператора транспоновања матрица
ⓑ -II- -II- $F: X\rightarrow AXB$, A,B - фиксиране матрице

Рјешење:

T - оператор транспоновања

$T(E_1) = E_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4$

$T(E_2) = E_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 1 \cdot E_3 + 0E_4$

$T(E_3) = E_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 1 \cdot E_2 + 0E_3 + 0 \cdot E_4$

$T(E_4) = E_4^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0 \cdot E_3 + 1 \cdot E_4$

Матрица оператора T у односу на базу $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$

$$T_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 домаћи

7 Дат је линеаран оператор $A: R^2 \to R^2$, $A(a,b) = (b,a)$, $a, b \in R$
Наћи у стандардној бази матрице оператора A, A^2, A^{-1}.

Решење:

Матрица $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, јер $A(e_1) = e_2$
$A(e_2) = e_1$.

Матрица од A^2 је: $B = A_e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E$

$A^2(a, b) = A(A(a, b)) = A(b, a) = (a, b)$.

Дакле, $A^2 = A \cdot A = E$. Одавде је $A^{-1} = A$. Дакле, матрица оператора A^{-1} је једнака матрици оператора A, тј.
$A_e^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8 Доказати да је пресликавање $A: P_n \to P_{n-1}$ дефинисано са $Af(t) = \dfrac{f(1+t) - f(1-t)}{2t}$ линеаран оператор. За $n=2$ наћи матрицу тог оператора у базама (e_1, e_2, e_3), $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$ и (f_1, f_2, f_3), где је $f_1 = 1$, $f_2 = t$.

Рјешење:

$$A(\alpha f(t)+\beta g(t)) = \frac{(\alpha f+\beta g)(1+t)-(\alpha f+\beta g)(1-t)}{2t}$$

$$= \frac{\alpha f(1+t)+\beta g(1+t)-\alpha f(1-t)-\beta g(1-t)}{2t}$$

$$= \alpha\left(\frac{f(1+t)-f(1-t)}{2t}\right)+\beta\cdot\left(\frac{g(1+t)-g(1-t)}{2t}\right)=$$

$$= \alpha\cdot Af(t)+\beta Ag(t)$$

$n=2$

$A: P_2 \to P_1$

$e_1(t)=1+0\cdot t+0\cdot t^2$

$$Ae_1(t)=\frac{e_1(t+1)-e_1(1-t)}{2t}=\frac{1-1}{2t}=0=0f_1+0f_2$$

$$Ae_2(t)=\frac{e_2(t+1)-e_2(1-t)}{2t}=\frac{(t+1)-(1-t)}{2t}=\frac{2t}{2t}=1=1f_1+0\cdot f_2$$

$$Ae_3(t)=\frac{e_3(1+t)-e_3(1-t)}{2t}=\frac{(t+1)^2-(1-t)^2}{2t}=\frac{\cancel{t^2}+2t+\cancel{1}-\cancel{1}+2t-\cancel{t^2}}{2t}=2$$

$$=2f_1+0\cdot f_2$$

$$A_{ef}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(*) Нека је T линеаран оператор на R^2 који вектор ротира за угао $\frac{\pi}{3}$ око координатног почетка у позитивном смјеру казаљке на сату, а затим рефлектује у односу на $y=x$. Наћи матрицу оператора у бази $B=\{(1,1),(1,-1)\}$. Одредити координате тачке $T(v)$ у овој бази, гдје је v-произвољан вектор у R^2.

(*) домаћи