# Karakteristični polinom. Sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori linearnog operatora.

Ovdje razmatramo vektorske prostore nad poljem kompleksnih brojeva.

<u>Def 1:</u> Neka je $e=(e_1,\dots,e_n)$ baza vektorskog prostora $V$ nad poljem $\mathbb{C}$, $A_e=[a_{ij}]_{n\times n}$ matrica operatora $A: V\to V$ u toj bazi. Polinom

$$k(\lambda)=k_e(\lambda)=\det(A_e-\lambda E_n)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

stepena $n$, nazivamo karakterističnim polinomom, a jednačinu $k(\lambda)=\det(A_e-\lambda E_n)=0$ karakterističnom jednačinom operatora $A$.

<u>Teorema 1:</u> Karakteristični polinom $A: V\to V$ ne zavisi od izbora baze prostora $V$ tj. ako su $e=(e_1,\dots,e_n)$ i $f=(f_1,\dots,f_n)$ baze prostora $V$, tada je $k_e(\lambda)=k_f(\lambda)$.

<u>Dokaz:</u> Neka je $P_{e\to f}$ matrica prelaza sa baze $e$ na bazu $f$, $A_e$ i $A_f$ matrice operatora $A$ u tim bazama.

Na osnovu teoreme (prethodno predavanje) imamo da je: $A_f = P_{e\to f}^{-1} A_e P_{e\to f}$.

Tada je:

$$A_f - \lambda E_n = P_{e\to f}^{-1} A_e P_{e\to f} - P_{e\to f}^{-1} \lambda E_n P_{e\to f} =$$

$$= P_{e\to f}^{-1} (A_e - \lambda E_n) P_{e\to f}. \quad (1)$$

Kako je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanti tih matrica, to iz (1) dobijamo:

$$K_f(\lambda) = \det(A_f - \lambda E_n) = \det\left(P_{e\to f}^{-1}(A_e - \lambda E_n) P_{e\to f}\right) =$$

$$= \det P_{e\to f}^{-1} \det(A_e - \lambda E_n) \det P_{e\to f} =$$

$$= \det\left(P_{e\to f}^{-1} \cdot P_{e\to f}\right) \cdot \det(A_e - \lambda E_n) = K_e(\lambda).$$

Teorema 2: (osnovna teorema algebre) → bez dokaza

Za svaki polinom $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$ stepena $n$, sa koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$, jednačina $f(\lambda) = 0$ ima $n$-rješenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ među kojima može biti i jednakih.

Def 2: Rješenja karakteristične jednačine:

$$k(\lambda) = \det(A_e - \lambda E_n) = 0$$

nazivamo sopstvenim vrijednostima operatora $A$.

Napomena 1: Na osnovu Teoreme 2 slijedi da operator $A: V \to V$ definisan na $n$-dimenzionalnom vektorskom prostoru $V$ nad poljem $C$ ima ~~n-sopstv~~ ~~nih~~ sopstvenih vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ među kojima može biti i jednakih.

Teorema 3: Broj $\lambda_0 \in C$ je sopstvena vrijednost operatora $A: V \to V$ ako i samo ako postoji nenulti vektor $x_0 \in V$, takav da je:

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0 \quad \text{tj.} \quad (A - \lambda_0 E)x_0 = 0$$

gdje je $E$ jedinični operator.

Dokaz: Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza prostora $V$ i $A_e$ matrica operatora $A: V \to V$ u toj bazi. Na osnovu formule (prethodno predavanje), za svaki vektor

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

važi
$$(A - \lambda_0 E)x = e(A_e - \lambda_0 E_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

U dokazu ćemo koristiti činjenicu da homogeni sistem linearnih jednačina ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je determinanta tog sistema jednaka nuli.

$(\Rightarrow)$: Neka je $\lambda_0$ sopstvena vrijednost operatora $A$ tj. $\det(A - \lambda_0 E_n) = 0$.

Tada homogeni sistem linearnih jednačina:

$$(A_e - \lambda_0 E_n)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

ima netrivijalno rješenje $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$.
Uočimo vektor $x_0 = \xi_1^0 e_1 + \dots + \xi_n^0 e_n$.
Na osnovu (2) i (3) za taj vektor važi:

$$(A - \lambda_0 E)x_0 = 0 \quad \text{tj.} \quad Ax_0 = \lambda_0 x_0.$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za broj $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ postoji nenulti vektor $x_0 \in V$ tako da je $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Dokažimo da je $\lambda_0$ sopstvena vrijednost operatora $A$. Vektor $x_0$ predstavimo u obliku $x_0 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$.
Pri tome je $\mu_i \neq 0$ za bar jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Kako je $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ tj. $(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$, na osnovu (2) dobijamo da je:

$$0 = \underline{e \cdot 0} = (A - \lambda_0 E)x_0 = \underline{e(A_e - \lambda_0 E_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}}.$$

pa je $(A_e - \lambda_0 E_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = 0.$

To znači da homogeni sistem linearnih jednačina:

$$(A_e - \lambda_0 E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = 0$$

ima netrivijalno rješenje $(\mu_1, \dots, \mu_n)$, što znači da je $\det(A_e - \lambda_0 E_n) = 0$ tj. $K(\lambda_0) = 0$.
Dakle, $\lambda_0$ je sopstvena vrijednost operatora $A$.

Def 3: Ako je $\lambda_0 \in C$ sopstvena vrijednost operatora $A: V \to V$ tada za vektor $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$ sa svojstvom $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ kažemo da je sopstveni vektor operatora $A$ koji odgovara sopstvenoj vrijednosti $\lambda_0$.

(egzistenciju ovog vektora smo dokazali u prethodnoj teoremi).

Sada prethodnu teoremu možemo formulisati na sledeći način:

Teorema 4: Neka je $e = (e_1, .., e_n)$ baza vektorskog prostora $V$ nad poljem $C$, $\lambda_0 \in C$ sopstvena vrijednost operatora $A: V \to V$ i $A_e$ matrica operatora $A$ u bazi $e$. Vektor $x_0 = \xi_1^0 e_1 + \dots + \xi_n^0 e_n \in V$ je sopstveni vektor operatora $A$ koji odgovara sopstvenoj vrijednosti $\lambda_0$ ako i samo ako je $(\xi_1^0, .., \xi_n^0)$ netrivijalno rješenje homogenog sistema linearnih jednačina:

$$(A_e - \lambda_0 E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Napomena 2: Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $R$, $A: V \to V$ linearni operator, $A_e$ matrica tog operatora u nekoj bazi $e = (e_1, .., e_n)$ prostora $V$. Karakteristična jednačina operatora $A$ je $k(\lambda) = 0$ tj.

tj. $\det(A_e - \lambda E_n) = 0$.

Ako postoji realan broj $\lambda_0$ sa svojstvom:

$$k(\lambda_0) = \det(A_e - \lambda_0 E_n) = 0, \quad (*)$$

onda za broj $\lambda_0$ kažemo da je sopstvena vrijednost operatora $A$. U ovom slučaju važe teoreme 3 i 4. Ako jednačina $(*)$ nema realnih rješenja onda kažemo da operator $A$ nema sopstvenih vrijednosti.

Lema 1: Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Ako je $\alpha + i\beta$ rješenje karakteristične jednačine $(*)$ operatora $A: V \to V$, tada postoje vektori $x, y \in V$ koji nisu istovremeno jednaki nuli, tako da je: $Ax = \alpha x - \beta y$, $Ay = \beta x + \alpha y$.

Dokaz: Kako je $\det(A_e - (\alpha + i\beta)E_n) = 0$ to homogeni sistem linearnih jednačina $(A_e - (\alpha + i\beta)E_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$

ima netrivijalno rješenje:

$$\xi_1 = x_1 + i y_1, \ldots, \xi_n = x_n + i y_n$$

pri čemu postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je $x_i \neq 0$ ili $y_i \neq 0$

Tada je: $(A_e - (\alpha + i\beta)E_n)\begin{pmatrix} x_1 + i y_1 \\ \vdots \\ x_n + i y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

pa sređivanjem dobijamo:

$$A_e \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

slijedi da je:

$$eA_e\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\alpha e\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}-\beta e\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_ie_i-\beta\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$$

$$eA_e\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\beta e\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\alpha e\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\beta\sum_{i=1}^{n}x_ie_i+\alpha\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$$

Uočimo vektore:

$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$ i $y=y_1e_1+\dots+y_ne_n$.

Tada važi: $Ax=eA_e\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\alpha x-\beta y$

i $Ay=eA_e\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\beta x+\alpha y$.