Еуклидски простори и ортогонални комплемент

① На линеарном простору V дефинисана су два различита скаларна производа $\langle x,y\rangle_1$ и $\langle x,y\rangle_2$. Доказати да је са $\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle_1 + \langle x,y\rangle_2$ задат скаларни производ на V.

② Нека су $x=(\alpha_1,\alpha_2)$ и $y=(\beta_1,\beta_2)$ произвољни вектори аритметичког простора R^2. Доказати да се скаларни производ на R^2 може задати на следећи начин:

а) $\langle x,y\rangle = 2\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2$

б) $\langle x,y\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2$

③ Наћи ортогонални комплемент у простору полинома степена $\leq k$ за потпростор L,

$$L = \{ f \in P_{\leq k} : 2f(0) - 3f(1) = 0 \}$$

④ Нека је $S = \{ f \in P_{\leq n}[x] : f(1) = 0 \}$. Наћи пројекцију вектора $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ на потпростор S.

⑤ Наћи угао између вектора $x=(2,3,5)$ и потпростора W, где је $W = \{ (x_1,x_2,x_3) \in R^3 : x_2 = x_1 + x_3,\ x_2 = 3 \cdot x_3 \}$.

<u>Теорија:</u>

① Доказати да за било која два вектора x,y из Еуклидског простора E важи:

а) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

б) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

② Доказати да у сваком Еуклидском коначнодимензионалном простору постоји ортонормирана база.