– Linearni operatori u euklidskim prostorima –

1. Konjugovani operatori

Neka je E euklidski prostor.

<u>Def:</u> Linearni operator $A^*: E \to E$ nazivamo konjugovanim operatorom operatora $A: E \to E$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$(\forall x, y \in E) \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \qquad (1)$$

<u>Teorema 1:</u> Operator $A^*: E \to E$ je konjugovani operator operatora A tj. važi (1) ako i samo ako za svaku bazu $e = (e_1, \dots, e_n)$ prostora E važi:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}) \quad \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle e_j, A^* e_i\rangle \qquad (2).$$

<u>Dokaz:</u> Ako je A^* konjugovani operator operatora A, tada iz (1) sa $x = e_j$, $y = e_i$ slijedi (2).

Dokažimo sad da iz (2) slijedi (1).

Neka je $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Tada je:

$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A e_j$, $A^* y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A^* e_i$. Osim toga,

$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A e_j, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \beta_i \langle Ae_j, e_i\rangle$$

$$\langle x, A^* y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \sum_{i=1}^{n} \beta_i A^* e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \beta_i \langle e_j, A^* e_i\rangle$$

Iz ovih jednakosti i uslova (2) slijedi (1).

Napomena: Neka je $e=(e_1, \dots, e_n)$ baza euklidskog prostora E. Kvadratnu matricu:

$$G = \begin{bmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \dots & \langle e_2,e_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle e_n,e_1\rangle & \langle e_n,e_2\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle \end{bmatrix}$$

nazivamo Gramova matrica vektora $e_1, e_2, \dots, e_n$. Pokazuje se da je $\det G \neq 0$ jer je sistem $e_1, \dots, e_n$ ~~[illegible]~~ linearno nezavisan.

Teorema 2: Operator $A^*: E \to E$ je konjugovani operator operatora A tj. važi (1) akko njihove matrice $A_e = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $A_e^* = [a_{ij}^*]_{n\times n}$ u proizvoljnoj bazi $e=(e_1, \dots, e_n)$ prostora E zadovoljavaju uslov:

$$A_e^* = G^{-1} \cdot A_e^T \cdot G. \quad (3)$$

Dokaz: Dokazaćemo da je uslov (3) ekvivalentan uslovu (2). Jednakost (3) je ekvivalentna jednakosti:

$$G A_e^* = A_e^T \cdot G.$$

Dalje je:

$$G A_e^* = \left[\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k\rangle a_{kj}^*\right]_{n\times n}.$$

Kako je $A_e^T = [b_{ij}]_{n\times n}$, gdje je $b_{ij} = a_{ji}$ slijedi da je:

$$A_e^T G = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \langle e_k, e_j\rangle\right]_{n\times n} = \left[\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, e_j\rangle a_{ki}\right]_{n\times n}.$$

Dakle, uslov (3) je ekvivalentan uslovu:

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle a_{kj}^{*} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, e_j \rangle a_{ki}; \quad i,j=1,..,n \quad (4)$$

Koordinate vektora Ae_i i $A^{*}e_j$ u bazi $e=(e_1,..,e_n)$ su i-ta i j-ta kolona matrice A_e i A^{*}_e.

Prema tome je:

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \quad i \quad A^{*}e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^{*} e_k.$$

Množeći prvu jednakost sa e_j a drugu sa e_i, dobijamo:

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, e_j \rangle a_{ki}; \quad \langle e_i, A^{*}e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle a_{kj}^{*}$$

Sad iz (4) slijedi da je $\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, A^{*}e_j \rangle$ za svako $i,j=1,..,n$, ~~tj.~~ važi uslov (2), ame je teorema dokazana.

<u>Posljedica 1</u>: Operator $A^{*}: E \to E$ je konjugovani operator operatora A tj. važi (1), ako i samo ako njihove matrice A_e i A_e^{*} u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi $e=(e_1,..,e_n)$ prostora E, zadovoljavaju uslov: $A_e^{*} = A_e^{T}$.

Teorema 3: (Egzistencija konjugovanog operatora)

Za svaki operator $A: E \to E$, definisan na euklidskom prostoru E, postoji tačno jedan konjugovani operator A^*.

Dokaz: Neka je A_e matrica operatora A u ortonormiranoj bazi $e = (e_1, .., e_n)$ prostora A. Za matrica A_e^T postoji tačno jedan linearni operator $B: E \to E$ čija je matrica u bazi $e = (e_1, .., e_n)$ matrica $B_e = A_e^T$. Iz posljedice 1, slijedi da je $B = A^*$.

Napomena 2: Svojstva konjugovanih operatora navedena u narednoj teoremi slijede iz odgovarajućih svojstava operacije transponovanja na skupu matrica.

Teorema 4: Ako su $A, B: E \to E$ linearni operatori i $\alpha \in R$, tada je:

a) $(A^*)^* = A$ b) $(A+B)^* = A^* + B^*$ c) $O^* = O$

d) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$ e) $(AB)^* = B^* A^*$.

Dokaz: (e) Neka je $e = (e_1, .., e_n)$ ortonormirana baza prostora E, A_e i B_e matrice operatora A i B u toj bazi. Tada su A_e^T i B_e^T matrice konjugovanih operatora A^* i B^*. Matrica operatora AB u bazi e je matrica $A_e B_e$ (ranije dokazano). Iz posljedice 1 slijedi da je $(A_e B_e)^T$ matrica operatora $(AB)^*$ u bazi e. Matrica proizvoda B^*A^* u bazi e je matrica $B_e^T A_e^T$. Kako je $(A_e B_e)^T = B_e^T A_e^T$ to znači da je $(AB)^* = B^*A^*$.

Napomena 3: Neka je V vektorski prostor nad poljem R i $L \subseteq V$ potprostor prostora V, i neka je $A: V \to V$ linearni operator. U opštem slučaju skup $A(L) = \{Ax \mid x \in L\}$ nije podskup od L. Međutim, ako je $A(L) \subseteq L$ (tj. $x \in L \Rightarrow Ax \in L$), onda se za L kaže da je **invarijantni potprostor** operatora A.

Teorema 5: Ako je potprostor L euklidskog prostora E invarijantan u odnosu na operator A, onda je ortogonalni komplement $L^\perp$ invarijantni potprostor konjugovanog operatora A^*.

Dokaz: Treba dokazati da za proizvoljno $y \in L^\perp$ važi $A^*y \in L^\perp$.

Neka je $y \in L^\perp$ i neka je $x \in L$. Potprostor L je invarijantan u odnosu na operator A, pa $Ax \in L$. Iz $y \in L^\perp$ i $Ax \in L$ slijedi $\langle Ax, y\rangle = 0$. Kako je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ to je $\langle x, A^*y\rangle = 0$. Dakle, $(\forall x \in L)\ \langle x, A^*y\rangle = 0$ pa $A^*y \in L^\perp$.