Сопствене вриједности и сопствени вектори

(недјеља бр 12)

$A: X \to X$ оператор, A_e – матрица оператора у бази $(e_1, e_2 \dots e_n)$. Рјешење карактеристичне једначине $P(\lambda) = \det(A_e - \lambda \cdot E) = 0$ је сопствена вриједност оператора A.

Теорема Број $\lambda \in K$ је сопствена вриједност оператора $A: X \to X$ $\Longleftrightarrow \exists x \in X, x \neq 0$ тд $A_e x = \lambda \cdot x$, иј $(A_e - \lambda E) * = 0$

[A_e – матрица оператора A у бази $(e_1, e_2 \dots e_n)$ простора X над пољем K]

Одговарајући вектор који задовољава $Ax = \lambda x$ је сопствени вектор.

* Карактеристични полином $P(\lambda)$ не зависи од избора базе
* Сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вриједностима су Л.Н.
* Број Л.Н сопствених вектора који одговарају вишеструким сопственим вриједностима највише је једнак њиховим вишеструкостима.

① Наћи сопствене вриједности и сопствене векторе матрице оператора A,

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Рјешење:

Посматрајмо случајеве: $a \neq 0$; $a = 0$.

$$P(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & a & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & a & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3$$

$P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow (3-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ (вишеструкост 3)

Нађимо одговарајуће сопствене векторе.

$(A-\lambda E)X=0$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & a & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda=3$, па:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Одавде,

$$a\cdot y=0$$
$$az=0$$
$$0\cdot z=0$$

За $a\neq 0$ важи $y=z=0$, $x\in R$

Рјешење: $L\lambda=\{(x,0,0), x\in R\}=\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$

$x\neq 0$ јер је сопствени вектор ненулти.

За $a=0$ је $y\in R$, $z\in R$

$L\lambda=\{(x,y,z), x,y,z\in R, x^2+y^2+z^2\neq 0\}=$

$\{(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z), x,y,z\in R\}=$

$\mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

три линеарно независна рјешења.

(2) Наћи сопствене вриједности и сопствене векторе линеарног оператора $f: R^3\to R^3$, задат са:

$$f(x,y,z)=(x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z).$$

Рјешење:

Нађимо матрицу оператора у стандардној бази R^3

$f(e_1)=(1,3,6)=e_1+3e_2+6e_3$

$f(e_2)=(-3,-5,-6)=-3e_1-5e_2-6e_3$

$f(e_3)=(3,3,4)=3e_1+3e_2+4e_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2;\ \lambda = 4$

1) $\lambda_1 = -2$

$Ax = -2x$

$(A + 2E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Одавде:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-3y+3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ 6x-6y+6z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y+z=0, \text{ па } y = x+z$$

$L_{\lambda_1} = \{(x, x+z, z),\ x, z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(1,1,0), (0,1,1)\}$

$\downarrow$

сопствени потпростор који одговара сопственој вриједности $\lambda_1 = -2$

2) $\lambda_2 = 4$

$(A - 4E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3x-3y+3z=0 \\ 3x-9y+3z=0 \\ 6x-6y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x-y+z=0 \\ x-3y+z=0 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2x$$

$L_{\lambda_2} = \{(x, x, 2x),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(1,1,2)\}.$

③ Naći realne sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore operatora diferenciranja nad prostorom $L = \mathcal{L}(f_1, f_2)$,

$f_1 = \cos t$, $f_2 = \sin t$.

Rješenje:

Vektori f_1 i f_2 su L.N.

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$

$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t = 0$

Za $t = 0$; $\alpha_1 \cos 0 + \alpha_2 \sin 0 = 0$

Za $t = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_1 \cos\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \sin\frac{\pi}{2} = 0$ $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

D – operator diferenciranja.

$Df_1(t) = (\cos t)' = -\sin t = 0 \cdot \cos t + (-1)\sin t$

$Df_2(t) = (\sin t)' = \cos t = \cancel{0 \cdot \cos t}\ 1 \cdot \cos t + 0 \cdot \sin t$

$$D_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(D_f - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$.

Polinom nema realnih korijena, pa operator nema realne sopstvene vrijednosti.

④ Neka su $p, q, r, s \in R^4$ a operator A definisan sa:

$A: R^4 \to R^4$, $A(x) = \langle p, x\rangle \cdot q + \langle q, x\rangle \cdot p$, $x \in R$

ⓐ Dokazati da je A linearan operator

ⓑ Ako je $\|p\| = \|q\|$ dokazati da je $p+q$ sopstveni vektor operatora A i naći odgovarajuće sopstvene vrijednosti

ⓒ $B = \{p, q, r, s\}$ ortonormirana baza u R^4. Naći matricu operatora A u ovoj bazi.

ⓐ $A(\alpha x+\beta y) = \langle p, \alpha x+\beta y\rangle q + \langle q, \alpha x+\beta y\rangle p =$

$= (\langle p,\alpha x\rangle + \langle p,\beta y\rangle) q + (\langle q,\alpha x\rangle + \langle q,\beta y\rangle)\cdot p =$

$= \alpha\langle p,x\rangle q + \beta\langle p,y\rangle q + \alpha\langle q,x\rangle p + \beta\langle q,y\rangle p =$

$= \alpha(\langle p,x\rangle q + \langle q,x\rangle p) + \beta(\langle p,y\rangle q + \langle q,y\rangle p) =$

$\alpha Ax + \beta Ay$

ⓑ $A(p+q) = \langle p, p+q\rangle q + \langle q, p+q\rangle p =$

$= \langle p,p\rangle q + \langle p,q\rangle q + \langle q,p\rangle p + \langle q,q\rangle p$

$= \|p\|^2 q + \|q\|^2 p + \langle p,q\rangle q + \langle p,q\rangle p$

$= \|p\|^2(p+q) + \langle p,q\rangle(p+q)$

$= (\|p\|^2 + \langle p,q\rangle)(p+q)$

сопствена вриједност — сопствени вектор

ⓒ $B = \{p,q,r,s\}$ ортонормирана база,

$Ap = \langle p,p\rangle q + \underbrace{\langle q,p\rangle}_{=0} p = \|p\|^2 q = q = 0\cdot p + 1\cdot q + 0\cdot r + 0\cdot s$

$Aq = \underbrace{\langle p,q\rangle}_{=0} q + \langle q,q\rangle p = \|q\|^2 p = p = 1\cdot p + 0\cdot q + 0\cdot r + 0\cdot s$

$Ar = \underbrace{\langle p,r\rangle}_{=0} q + \underbrace{\langle q,r\rangle}_{=0} p = 0 = 0\cdot p + 0\cdot q + 0\cdot r + 0\cdot s$

$As = \langle p,s\rangle q + \langle q,s\rangle p = 0 = 0\cdot p + 0\cdot q + 0\cdot r + 0\cdot s$

$$\mathrm{mat}_B A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⑤ Одредити карактеристичне коријене матрице реда n,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Рјешење:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{ додамо све врсте првој } =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$(n-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$$

$$\det(A-\lambda E) = p(\lambda) = 0 \iff n-\lambda=0;\ (-\lambda)^{n-1}=0$$

$$\underbrace{\lambda_1 = n} \qquad \underbrace{\lambda_2 = 0}$$

⑥ Матрица $A \in M_n(R)$ је сингуларна $\iff$ 0 карактеристични корјен те матрице.

Рјешење

$\det(A)=0 \iff A$ сингуларна.

Нека је $\lambda=0$ сопствена вриједност, тада је $A\cdot x = \lambda \cdot x = 0 \cdot x$, тј. $Ax=0$, за $x \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{хомогени систем}$$

Он има нетривијално рјешење ако је $\det A = 0$, тј. A је сингуларна.

Нека је A сингуларна матрица. Тада је $A\cdot x = 0$ за неко $x \neq 0$, тј. $A \cdot x = 0 \cdot x$, за $x \neq 0$ што значи да је 0 сопствена вриједност од A.

⑦ Нека су A и B матрице реда n, доказати да AB и BA имају исте карактеристичне корјене.

Рјешење:

Нека је $x \neq 0$ сопствени вектор AB који одговара λ, тј. $ABx = \lambda \cdot x$, $x \neq 0$.

Одавде, $BABx = B\lambda x = \lambda Bx$, тј. $BA(Bx) = \lambda(Bx)$

Ако је $Bx \neq 0$, онда је λ карактеристични корјен матрице BA, а одговарајући карактеристични вектор је Bx.

Ако је $Bx = 0$, онда $A\theta = 0 \cdot x$, па је $\lambda = 0$. На основу претходног задатка AB је сингуларна матрица, па је $\lambda = 0$ карактеристични корјен и за BA.

$\det(AB) = \det(BA)$

(*) E – Еуклидски простор. $A^*: E \to E$ је конјугован оператор оператора $A: E \to E$ ако важи:

$$(\forall x, y \in E) \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

За сваку базу $(e_1, e_2 .. e_n)$ простора E важи:

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, A^* e_j \rangle, \quad i, j = \overline{1, n}$$

(8) Нека је $A: V^3 \to V^3$ дефинисан са: $A\vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}$, $\vec{a}$ – фиксиран вектор. Одредити A^*.

Рјешење:

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{a}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{a} \times \vec{y} \rangle$$
$$= -\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{a} \rangle = -\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, -A\vec{y} \rangle$$

Дакле, $A^* = -A$.

(9) У простору R^n са стандардно задатим скаларним производом дефинисан је оператор A.

$$A: R^n \to R^n, \quad A(x_1, x_2 \dots x_n) = (0, 0, x_1, x_2 \dots x_{n-2})$$

Наћи A^*.

Рјешење:

Тражимо A^*, тд.

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, y \in R^n$$

Нека је $y=(y_1, y_2 \dots y_n) \in R^n$ и $A^* y = (z_1, z_2 \dots z_n)$

Из услова $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ добијамо:

$$\langle (0,0,x_1,x_2 \dots x_{n-2}); (y_1, y_2 \dots y_n) \rangle = \langle (x_1, x_2 \dots x_n); (z_1, z_2 \dots z_n) \rangle$$

$$0 y_1 + 0 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_3 + \dots x_{n-2} \cdot y_n = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n$$

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + (y_3 - z_1) x_1 + (y_4 - z_2) x_2 - \dots - z_{n-1} x_{n-1} - z_n x_n = 0$$

Пошто једнакост важи за произвољно $x \in R^n$, за $e_1 = (1,0 \dots 0)$ добијамо

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + (y_3 - z_1) \cdot 1 + (y_4 - z_2) \cdot 0 - \dots - z_n \cdot 0 = 0, \text{ тј.}$$

$z_1 = y_3$

За $(x_1, x_2 \dots x_n) = e_2 = (0,1,0 \dots 0)$ добијамо:

$z_2 = y_4$.

$\vdots$

За $(x_1 \dots x_n) = e_{n-1} = (0,0, \dots 1, 0)$ добијамо.

$z_{n-1} = 0$

За $(x_1 \dots x_n) = e_n = (0,0, \dots 0,1)$ –||–:

$z_n = 0$.

Дакле, $A^* y = (z_1, z_2 \dots z_n) = (y_3, y_4, y_5, \dots y_n, 0, 0)$

10) Ако је $A^* A = 0$, тада је $A = 0$. Доказати.

Решење:

$A^* A = 0$, тј $\langle A^* A(x), x \rangle = 0$, $\forall x \in V$ због $\langle 0, x \rangle = 0$ $\forall x \in V$.

Из $\langle A^* A(x), x \rangle = 0 \Rightarrow \langle A(x), (A^*)^* x \rangle = 0$, $x \in V$. За конјуговани оператор A^* важи $(A^*)^* = A$, па је:

$\langle A(x), A(x) \rangle = 0$, $\forall x \in V$. Користећи својство скаларног производа $Ax = 0$, $\forall x \in V$, тј $A = 0$.