— Simetrični operatori — ①

Def: Za operator $A: E \to E$ definisan na euklidskom prostoru E kažemo da je simetričan, ako je $A = A^*$ tj.

$$(\forall x, y \in E) \ \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

~~Teorema~~

Teorema 1: Operator $A: E \to E$ je simetričan, ako i samo ako za proizvoljnu bazu $e = (e_1, \dots, e_n)$ prostora E važi:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}) \ \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle.$$

Dokaz: Slijedi iz ~~§~~ Teoreme 1 (lekcija konjugovani operatori) → prethodna nedelja.

Teorema 2: Operator $A: E \to E$ je simetričan ako i samo ako za njegovu matricu A_e u proizvoljnoj bazi $e = (e_1, \dots, e_n)$ prostora E važi:

$$A_e = G^{-1} A_e^T G$$

gdje je G Gramova matrica baze e.

Dokaz: ~~Sl~~ Dokazali smo (prethodna lekcija konjugovani operatori) da je operator $A^*: E \to E$ konjugovani operator operatora A ako i samo ako njihove matrice A_e i A_e^* u proizvoljnoj bazi $e=(e_1,\dots,e_n)$ prostora E zadovoljavaju uslov:

$$A_e^* = G^{-1} A_e G$$

Operator A je simetričan ako je $A = A^*$ tj. ako i samo ako važi $A_e = G^{-1} A_e G$.

Posledica 3: Operator $A: E \to E$ je simetričan, ako i samo ako je njegova matrica A_e u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi simetrična tj. $A_e = A_e^T$ (*).

Dokaz: Dokazali smo (posledica 1 → lekcija konjugovani operatori) da je operator $A^*: E \to E$ konjugovani operator operatora A ako i samo ako njihove matrice A_e i A_e^* u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi $e=(e_1,\dots,e_n)$ prostora E, zadovoljavaju uslov $A_e^* = A_e^T$, pa slijedi da je operator $A: E \to E$ simetričan akko u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi matrice A_e i A_e^T ispunjavaju uslov (*)

Teorema 4: Ako je potprostor L euklidskog prostora E invarijantan u odnosu na simetrični operator $A: E \to E$, tada je i njegov ortogonalni komplement $L^\perp$ invarijantan u odnosu na A.

Dokaz: Slijedi iz Teoreme 5 (lekcija konjugovani operatori - prethodna nedelja)

Lema 5: Sva rješenja karakteristične jednačine simetričnog operatora $A: E \to E$ su realni brojevi.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tj. da karakteristična jednačina $\det(A_e - \lambda E_n) = 0$ ima kompleksno rješenje $\alpha + i\beta$, pri čemu je $\beta \neq 0$.

~~Tada~~ Dokazali smo (u lekciji "Karakteristični polinomi Sopstvene vrijednosti i sopstveni vektori linearnog operatora", posljednja lema) da tada postoje vektori $x, y \in E$ koji nisu istovremeno jednaki nuli, tako da je:

$$Ax = \alpha x - \beta y, \quad Ay = \beta x + \alpha y.$$

Množeći prvu jednakost skalarno sa y a drugu sa x dobijamo:

$$\langle Ax, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle - \beta \|y\|^2$$

$$\langle Ay, x \rangle = \beta \|x\|^2 + \alpha \langle x, y \rangle$$

Kako je $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ to je:

$$\alpha \langle x, y \rangle - \beta \|y\|^2 = \beta \|x\|^2 + \alpha \langle x, y \rangle$$

tj. $\quad \beta (\|x\|^2 + \|y\|^2) = 0,$

što je nemoguće jer je $\beta \neq 0$ i vektori x i y nisu istovremeno jednaki nuli. Dobijena kontradikcija dokazuje lemu.

Teorema 6: Neka je E n-dimenzionalni euklidski prostor i $A: E \to E$ simetrični operator. Tada postoji ortonormirana baza $e = (e_1, \dots, e_n)$ prostora E sastavljena od sopstvenih vektora operatora A.

Dokaz: Na osnovu prethodne leme sopstvene vrijednosti operatora A su realni brojevi. Za sopstvenu vrijednost λ_1 postoji sopstveni vektor x_1, $x_1 \neq 0$ tako da važi $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Uočimo jedinični vektor $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Za ovaj vektor važi $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

$\left(Ae_1 = A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right) = \frac{Ax_1}{\|x_1\|} = \lambda_1 \frac{x_1}{\|x_1\|} = \lambda_1 e_1\right)$, pa je jednodimenzioni potprostor $L_1 = \mathcal{L}(e_1) = \{\alpha e_1 \mid \alpha \in R\}$ invarijantan u odnosu na operator A.

Iz ~~Teoreme~~ Teoreme 4 slijedi da je ortogonalni komplement $L_1^\perp$ invarijantan u odnosu na operator A.

~~Pa možemo~~ Restrikcija $A: L_1^\perp \to L_1^\perp$ operatora A na podprostor $L_1^\perp$, je simetrični operator, pa na isti način ~~pok~~ zaključujemo da postoji realan broj λ_2 i jedinični vektor $\underline{e_2 \in L_1^\perp}$ takav da je $Ae_2 = \lambda_2 e_2$. Tako je dobijen ortonormirani sistem e_1, e_2 za koji je $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ i $Ae_2 = \lambda_2 e_2$. Dvodimenzioni potprostor $L_2 = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ je invarijantan u odnosu na operator A.

(ako $x \in L_2$ onda $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ pa je $Ax = \beta_1 Ae_1 + \beta_2 Ae_2 =$
$= \beta_1 \lambda_1 e_1 + \beta_2 \lambda_2 e_2 \in L_2$)

Slijedi da je i ortogonalni komplement $L_2^\perp$ invarijantan u odnosu na operator A. Sada ~~za~~ ~~res~~ posmatramo restrikciju $A: L_2^\perp \to L^\perp$ i nastavljamo isti postupak. Poslije n koraka dobijamo ortonormi-ranu bazu $e=(e_1,..,e_n)$ prostora E sastavljenu od sopstvenih vektora operatora A tj. vektora sa svojstvom: $Ae_1=\lambda_1 e_1$, $Ae_2=\lambda_2 e_2$, ..., $Ae_n=\lambda_n e_n$. Time je teorema dokazana.

Napomena: Matrica A_e simetričnog operatora ~~tt~~ $A: E \to E$ u ortonormiranoj bazi $e=(e_1,..,e_n)$ prostora E, sastavljenoj od sopstvenih vektora operatora A je dijagonalna matrica:

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$