Вјежбе (недјеља 13)

<u>Деф</u> Оператор $A: E \to E$ је симетричан ако $A^* = A$.

<u>Теорема</u> Оператор $A: E \to E$ је симетричан ако и само ако је његова матрица у произвољној ортонормираној бази простора E симетрична, тј. $A_e = A_e^T$.

<u>Теорема</u> Сопствени вектори који одговарају различитим сопственим векторима су међусобно линеарно независни.

<u>Теорема</u> Симетрична матрица има реалне сопствене вриједности. Ако су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различите сопствене вриједности, тада су одговарајући сопствени вектори ортогонални.

<u>Теорема</u> Ако је n ~~су~~ сопствених вектора ~~редах~~ линеарно независни матрица се може дијагонализовати са:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ \dots & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

гдје је P квадратна матрица чије су колоне сопствени вектори матрице A. Важи: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$\ulcorner$ $tr(P^{-1}AP) = tr(B)$, B - дијагонална матрица

$tr(AB) = tr(BA)$

Сада, $tr(P^{-1}AP) = tr((P^{-1}A)P) = tr((AP^{-1})P) = tr(A)$

Одавде, $tr(A) = tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ $\lrcorner$

<u>Теорема</u> За $A: E \to E$ постоји ортонормирана база сопствених вектора $\Leftrightarrow$ A симетричан. Матрица оператора у односу на ту базу је дијагонална (на дијагонали су сопствене вриједности).

① Доказати да је производ симетричних оператора симетричан $\Leftrightarrow$ оператори комутирају.

Рјешење:

Нека су A и B симетрични, тј. $A^* = A$, $B^* = B$ и нека $(AB)^* = AB$. Докажимо да A и B комутирају. $(AB)^* = B^*A^* = \underline{BA = AB},$

Нека је $A^*=A$, $B^*=B$ и $AB=BA$. Сада, $(AB)^*=B^*A^*=BA$. Због $AB=BA$, $(AB)^*=AB$, тј. AB је симетричан.

2) Доказати да је оператор $A: R^3 \to R^3$ дат са:
$A(e_1)=e_2$, $A(e_2)=e_1$, $A(e_3)=e_3$ симетричан, при чему је $\{e_1, e_2, e_3\}$ стандардна база у R^3.

Решење.

$A(e_1)=e_2=0e_1+1\cdot e_2+0e_3$

$A(e_2)=e_1=1\cdot e_1+0e_2+0e_3$

$A(e_3)=e_3=0\cdot e_1+0e_2+e_3\cdot 1$

$$A_e=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Због $A_e^T=A_e$, тј. матрица оператора у стандардној бази је симетрична, оператор је симетричан.

3) Матрица оператора $A: R^3 \to R^3$ у стандардној бази има облик:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Наћи у простору R^3 ортонормирану базу B, тд у којој матрица оператора има дијагонални облик.

Решење:

$A_e=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ је матрица оператора у бази (e_1, e_2, e_3)

$A_e^T=A_e$, тј. A_e симетрична матрица, па је оператор A симетричан. Даље, постоји ортонормирана база састављена од сопствених вектора и у којој матрица оператора има дијагонални облик.

$\det(A_e-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=-1;\ \lambda_2=1$$

Нађимо сопствене векторе. ②

1) $\lambda_1 = -1$

$$(A+E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_1 \end{array}$$

Одавде, $L_{\lambda_1} = \{(x_1, -2x_1, x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{\underbrace{(1,-2,1)}_{f_1}\}$

2) $\lambda_2 = 1$

$$(A-E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_2 = x_1 + x_3 \\ x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \end{array}$$

$$L_{\lambda_2} = \{(x_1, \tfrac{x_1+x_3}{2}, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(x_1, \tfrac{x_1}{2}, 0) + (0, \tfrac{x_3}{2}, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{x_1(1, \tfrac{1}{2}, 0) + x_3(0, \tfrac{1}{2}, 1), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\tfrac{x_1}{2}(2,1,0) + \tfrac{x_3}{2}(0,1,2), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}\{\underbrace{(2,1,0)}_{f_2}, \underbrace{(0,1,2)}_{f_3}\}$$

Примијетимо: $f_1 \perp f_2$, $f_1 \perp f_3$, али $f_2 \not\perp f_3$.

Ортогонализујмо векторе:

$f_1 = (1,-2,1)$
$f_2 = (2,1,0)$ $\Longrightarrow$ $f_1' = f_1$
$f_3 = (0,1,2)$ $f_2' = f_2 + \alpha_{21} \cdot f_1'$ $\longrightarrow \alpha_{21} = 0$ (јер $f_1 \perp f_2$)

$f_3' = f_3 + \alpha_{31} f_1' + \alpha_{32} f_2' \Rightarrow \alpha_{31} = 0$ (јер $f_1 \perp f_3$)

(*) Из услова $\langle f_1', f_3' \rangle = 0$ се добија услов $\alpha_{31} = 0$

$\langle f_2', f_3' \rangle = 0$

$\langle f_2', f_3 + \alpha_{31} f_1' + \alpha_{32} f_2' \rangle = 0$

$\langle f_2', f_3 \rangle + \alpha_{32} \langle f_2', f_2' \rangle = 0$

$$\alpha_{32} = -\frac{\langle f_2', f_3 \rangle}{\langle f_2', f_2' \rangle} = -\frac{1}{5}$$

$f_3' = (0,1,2) + (-\frac{1}{5})(2,1,0) = \underbrace{(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2)}$

Нормирајмо векторе.

$\|f_1'\| = \sqrt{6}$, $\|f_2'\| = \sqrt{5}$, $\|f_3'\| = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{16}{25} + 4} = \sqrt{\frac{120}{25}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$

Ортонормирана база: (g_1', g_2', g_3')

$g_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$g_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$$g_3' = \left(\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{2\sqrt{30}}{5}}, \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2\sqrt{30}}{5}}, \frac{2}{\frac{2\sqrt{30}}{5}}\right)$$

Матрица оператора у бази (g_1', g_2', g_3'),

$$A_g = P_{eg}^{-1} A_e \cdot P_{eg}$$

$$P_{eg} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Добијамо,

$$A_g = P_{eg}^{-1} A_e \cdot P_{eg} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"на основу теореме знамо да се добија дијагонална матрица,

3. Дата је реална матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$ при чему $a, b, c < -\frac{1}{2}$. Доказати да је

бар један карактеристични коријен матрице A негативан.

Рјешење:

Пошто је матрица симетрична, карактеристични коријени су реални. Пошто су одговарајући сопствени вектори Л.Н, матрица се може дијагонализовати.

$B = P^{-1}AP$

$tr(B) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Такође $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}PA) = \det A$.

Дакле, $\det A = \det B = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(1-c^2) - a(a-bc) + b(ac-b) =$$

$$= 1 - c^2 - a^2 + abc + abc - b^2 = 1 + 2abc - (a^2+b^2+c^2)$$

$abc < \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

$a < -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 > \frac{1}{4}$, тј $-a^2 < -\frac{1}{4}$, па је $-(a^2+b^2+c^2) < -\frac{1}{4}\cdot 3$

Сада је

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} < 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{4} = 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{4} = 0$$

Дакле, $\det A < 0$, а $\det A = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i$, па макар један од карактеристичних коријена мора бити негативан.

(*) Ако су $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ различите сопствене вриједности симетричног оператора. Тада су њихови сопствени вектори ортогонални.

4. Реална симетрична матрица реда 3 има сопствене вриједности 3, 6, −9. Вектори $(1,2,-2)$ и $(-2,2,1)$ су сопствени вектори матрице A који одговарају вриједностима 3 и −9. Наћи матрицу оператора у стандардној бази.

Решење:

$(-2,2,1) \perp (1,2,-2)$.

Тражимо сопствени вектор који одговара сопственој вриједности 6. Нека је то (x,y,z).

Тада ће важити:

$(x,y,z) \perp (-2,2,1)$ и

$(x,y,z) \perp (1,2,-2)$.

$$\begin{aligned} -2x+2y+z&=0 \\ x+2y-2z&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -3z+3x&=0 \\ x&=z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2y&=2x-z=x \\ y&=\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\{(x, \tfrac{x}{2}, x), x \in R\} = \mathcal{L}\{(2,1,2)\}$$

Трећи сопствени вектор $(2,1,2)$.

База сопствених вектора:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 3 & -9 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A_f = P_{ef}^{-1} \cdot A_e \cdot P_{ef}$, A_f - матрица оператора у бази сопств. вектора.

$$A_f = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$f_1 = (2,1,2) = 2e_1 + 1 \cdot e_2 + 2e_3$

$f_2 = (-2,2,1) = -2e_1 + 2e_2 + 1 \cdot e_3$

$f_3 = (1,2,-2) = 1 \cdot e_1 + 2e_2 - 2 \cdot e_3$

$$P_{ef} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_e = P_{ef} \cdot A_f \cdot P_{ef}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots$$

5. Нека је $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$ и нека су они сопствене вриједности симетричног оператора $A: V \to V$, V – n-димензионални Еуклидски простор, и $e_1, e_2, \ldots, e_k$ одговарајући сопствени вектори. Ако је $V = \mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots e_k\}$, $1 \leq k \leq n$ доказати да:

$\forall x \in V$

$$\lambda_1 \langle x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_k \langle x, x \rangle$$

<u>Рјешење:</u>

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot e_i$$

Како је $A(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$ (e_k – сопствени вектор), а $e_i \perp e_j$, $i \neq j$ то:

$$\langle Ax, x \rangle = \langle A(\sum_{i=1}^{k} c_i e_i), \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \rangle =$$

$$= \langle A(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k), (c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k) \rangle$$

$$= \langle c_1 Ae_1 + c_2 Ae_2 + \ldots + c_k Ae_k, c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k \rangle$$

$$= \langle c_1 Ae_1, c_1 e_1 \rangle + \langle c_2 Ae_2, c_2 e_2 \rangle + \ldots \langle c_k Ae_k, c_k e_k \rangle$$

$$= c_1^2 \langle Ae_1, e_1 \rangle + c_2^2 \langle Ae_2, e_2 \rangle + \ldots + c_k^2 \langle Ae_k, e_k \rangle$$

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

$$\langle Ae_i, e_i \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_i$$

Сада,

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \lambda_i$$

$$\langle x, x \rangle = \langle c_1 e_1 + \ldots + c_k e_k, c_1 e_1 + \ldots + c_k e_k \rangle =$$

$$= c_1^2 \langle e_1, e_1 \rangle + \ldots + c_k^2 \langle e_k, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i^2$$

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot c_i^2 \geq \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \lambda_1 \langle x, x \rangle$$

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \lambda_k \langle x, x \rangle$$

Дакле,

$$\lambda_1 \langle x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_k \langle x, x \rangle$$

6. Ако је $\begin{pmatrix} 9 & -5 & a \\ 13 & -6 & b \\ 13 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ одредити a и в тако да матрица

А има карактеристичне коријене 1 и 2. За те вриједности а, в наћи трећи карактеристични коријен матрице А ($\neq 1, 2$) без развијања карактеристичног полинома.

Рјешење:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -5 & a \\ 13 & -6-\lambda & b \\ 13 & -7 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 + (7b-13a-1)\lambda + 2b+13a+44$$

Рјешења $\det(A-\lambda E)=0$ су 1 и 2, тј.

$$1+1+(7b-13a-1)+2b+13a+44=0$$

$$8+4+(7b-13a-1)\cdot 2+2b+13a+44=0$$

Одавде, $a=-2$, $b=-5$.

Пошто су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ различите сопствене вриједности, њима одговарају линеарно независни сопствени вектори. Одатле закључујемо да се матрица А може дијагонализовати и да је $\mathrm{tr}A = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

Дакле, $9+(-6)+(-4) = 1+2+\lambda_3$

$$-1 = 3+\lambda_3$$

$$\underline{\lambda_3 = -4}$$