I - dio: (kolokvijum) ①

① a) Definicija vektorskog prostora.

b) Definicija potprostora vektorskog prostora.

c) Definicija baze i dimenzije vektorskog prostora.

d) Navesti primjer vektorskog prostora dimenzije 5 i njegovog potprostora dimenzije 2.

② Dokazati sledeća tvrđenja:

a) Ako je sistem $x_1, \dots, x_n \in V$ linearno zavisan i ako je $x_1 \neq 0$, onda postoji k, $1 \leq k \leq n$ tako da je vektor x_k linearna kombinacija vektora $x_1, \dots, x_{k-1}$. Obrnuto, ako postoji k, $1 < k \leq n$, tako da je x_k linearna kombinacija prethodnih vektora, tada je sistem $x_1 \dots, x_n$ linearno zavis[an]

b) Ako je sistem $x_1 \dots, x_n \in V$ linearno nezavisan a sistem $x_1 \dots, x_n, x$ linearno zavisan, t[ada] -da se vektor x na jedinstven način može predstaviti kao linearna kombinacija sistem[a] $x_1, \dots, x_n$.

c) Neka je V vektorski prostor i $\dim V = n$. Svaki linearno nezavisan sistem (od $k \leq n$) vektora iz V se može dopuniti do baze tog prostora.

(2)

(3) a) Ako su L_1 i L_2 potprostori vektorskog prostora V, tada je:

$$\dim(L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

Dokazati.

b) Definisati direktnu sumu potprostora.

c) Vektorski prostor V je direktna suma svojih potprostora L_1 i L_2 ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

2) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$. Dokazati.

d) Za svaki potprostor L_1 vektorskog prostora V postoji direktni komplement. Dokazati.

(4) a) Definisati matricu prelaza sa baze e na bazu f.

b) Ako su $e=(e_1,\dots,e_n)$, $f=(f_1,\dots,f_n)$ i $g=(g_1,\dots,g_n)$ baze vektorskog prostora V, tada je $P_{e\to g} = P_{e\to f} \cdot P_{f\to g}$. Dokazati.

c) Ako su $e=(e_1,\dots,e_n)$ i $f=(f_1,\dots,f_n)$ baze vektorskog prostora V, tada je:

$$P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1}.$$ Dokazati.

(5) a) Definicija skalarnog proizvoda.

b) Dokazati da za bilo koja dva vektora x, y iz euklidskog prostora E važi:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

– II-dio (završni ispit) –

(1) a) Dokazati da u svakom euklidskom prostoru E, $\dim E = n$, postoji ortonormirana baza.

b) Ako je L potprostor euklidskog prostora E, tada je $E = L \oplus L^{\perp}$.

(2) a) Definisati rang i defekt linearnog operatora.

b) Ako je $A: U \to V$ linearni operator, tada je $\dim U = r_A + d_A$. Dokazati.
($r_A = \dim \operatorname{Im}(A)$, $d_A = \dim \ker A$).

(3) a) Definisati matricu linearnog operatora.

b) Neka su $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $e' = (e_1', \dots, e_n')$ baze prostora U, $f = (f_1, \dots, f_{(m)})$ i $f' = (f_1', \dots, f_{(m)}')$ baze prostora V, $P_{e \to e'}$ i $P_{f \to f'}$ matrice prelaza sa baze e na bazu e', odnosno sa baze f na bazu f'. Tada za matrice

A_{ef} i $A_{e'f'}$ operatora $A \in \mathcal{L}(U, V)$ u bazama e i f odnosno e' i f', važi jednakost:

$$A_{e'f'} = P^{-1}_{f \to f'} A_{ef} P_{e \to e'}.$$

(4) a) Definicija karakterističnog polinoma, sopstvene vrijednosti i sopstvenog vektora linearnog operatora.

b) Broj $\lambda_0 \in C$ je sopstvena vrijednost operatora $A: V \to V$ ako i samo ako postoji nenulti vektor $x_0 \in V$, takav da je $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Dokazati.

(5) Konjugovani operatori:
Teorema 2, Teorema 3, Teorema 4, Teorema 5.

(6) Simetrični operatori
Lema 5, Teorema 6.