Колоквијум 1

① Ако су x, y, z линеарно независни вектори реалног векторског простора V, испитати линеарну независност скупа вектора $\{\lambda^2 x + 3y + 2z, \lambda x - y + z, y + 4z\}$. За коју вриједност параметра λ се вектор $(1, 2, 4)$ може на јединствен начин представити преко ових вектора.

② Нека је U потпростор полинома степена $\leq n$ таквих да за $f \in U$ важи: $f'(1) = f(1)$.

ⓐ Доказати да је U потпростор одговарајућег векторског простора.

ⓑ Наћи базу и димензију потпростора U.

③ Нека је V векторски простор свих матрица реда 2×2 над пољем реалних бројева. Нека је W_1 скуп матрица облика $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$, а W_2 скуп матрица облика $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$.

ⓐ Доказати да су W_1 и W_2 потпростори од V

ⓑ Наћи базу и димензију од W_1, W_2, $W_1 + W_2$ и $W_1 \cap W_2$.

Теорија:

① ⓐ Дефиниција векторског простора

ⓑ Дефиниција потпростора векторског простора

ⓒ Дефиниција базе и димензије векторског простора.

ⓓ Навести примјер векторског простора димензије 3 и његовог потпростора димензије 2.

② ⓐ Дефиниција скаларног производа

ⓑ Доказати да за било која два вектора x, y из Еуклидског простора E важи:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Завршни

① Нека је P_2 векторски простор свих реалних полинома степена ≤ 2.

а) Да ли је са: $\langle p,q\rangle = p(1)\,q(1) + 2p(0)\cdot q(0) + p(-1)\cdot q(-1)$ дефинисан скаларни производ на P_2.

б) За потпростор $L \subseteq P_2$ генерисан са $p_1(x)=1$, $p_2(x)=x$ одредити ортогонални комплемент (у односу на горе задати скаларни производ)

в) Наћи ортогоналну пројекцију $p(x) = -2x^2+x+2$ на L.

② Нека је $L: R^3 \to R^3$ линеаран оператор задат са:

$L(x,y,z) = (2x+2y-2z,\ 2x+5y-4z,\ -2x-4y+5z)$

а) Наћи матрицу оператора у односу на базу: $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

б) Наћи језгро и слику оператора.

в) Наћи ортонормирану базу вектора у односу на коју матрица има дијагоналан облик

③ Доказати да матрице AB и BA имају исти карактеристични полином.

④ Наћи матрицу оператора AB, ако је A оператор пројектовања равни на $y-3x+1=0$, а B је оператор задат са:

$B(x,y) = (-x+2y,\ y)$

Теорија:

① Доказати да у сваком Еуклидском простору E, $\dim E = n$ постоји ортонормирана база

② Дефинисати ранг и дефект линеарног оператора.

③ Ако је $A: U \to V$ линеарни оператор, тада:

$\dim U = r_A + d_A$