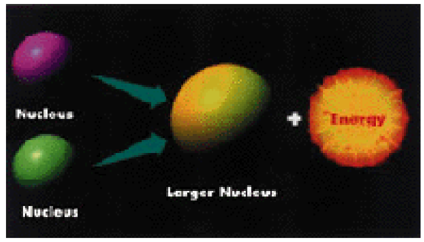
Univerzitet Crne Gore



Dr Slavoljub Mijović

Fizika jonizovanih gasova kroz zadatke *(4+2) VII semestar*

-skripta-

Podgorica, 1995

1. Kretanje naelektrisanih čestica u električnim i magnetnim poljima

1.1 Opisati kretanje naelektrisane čestice u konstantnom električnom polju.

Rešenje: Jednačina kretanja čestice u zadatom polju može se napisati u običnoj formi

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=\vec{F}=q\vec{E}. \tag{1}$$

Promena kinetičke energije čestice na putu s, jednak je radu sila električnog polja

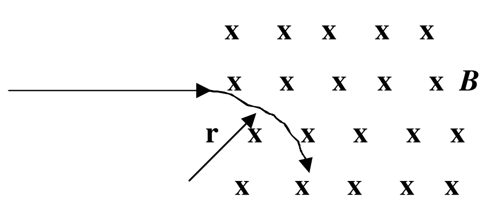
$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_2-\left(\frac{mv^2}{2}\right)_1=\int_1^2 q\vec{E}d\vec{s}. \tag{2}$$

Ovde se integral uzima u pravcu trajektorije čestice. Ako električno polje ima potencijal koji ne zavisi od vremena to će desna strana jednačine (2) biti jednaka $q(U_2-U_1)$. Za česticu koja je u početku mirovala formula (2) postaje

$$\boxed{\frac{mv^2}{2}=q(U_1-U_2).}$$

Na taj način, pri kretanju u statičkom potencijalnom polju kinetička energija naelektrisane čestice se određuje savladanom razlikom potencijala.

1.2 Elektron koji se kreće konstantnom brzinom uleće u prostor normalno na linije magnetnog polja (slika 1.) Dokazati da on opisuje kružnu putanju.



Slika 1. Trajektorija elektrona koji se kreće u ravni lista, kada je magnetno polje usmereno normalno na ravan lista

Snop elektrona koji imaju brzinu $v=3{,}1\cdot10^7\,m/s$, **upada normalno na linije homogenog magnetnog polja indukcije** $B=3{,}2\cdot10^{-4}T$, **i prolazeći rastojanje**

$s = 5cm$, **se otklanjaju od prvobitnog pravca kretanja za** 5^o. **Izračunati odnos naelektrisanja elektrona i njegove mase.**

Rešenje: Sila koja dejstvuje na elektron koji se kreće sa konstantnom brzinom v, je $F = e \cdot v \cdot B$. Ta sila je normalna na B i v. Pošto su B, v i $F-$uzajamno normalni, u pravcu brzine v, nema ubrzanja. Neka je radijus trajektorije jednak r. Tada je

$$Bev = \frac{mv^2}{r}, \qquad r = \frac{mv}{Be}. \tag{1}$$

I pošto je veličina mv / Be konstantna, kretanje je kružno.

Ako se ugao $\theta = 5^o$, izrazi u radijanima $5^o \equiv \frac{5\pi}{180} rad = \frac{\pi}{36} rad$, tada se dobija

$$r = \frac{s}{\theta} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi / 36} = \frac{1,8}{\pi} = 0,572m.$$

Transformacijom izraza (1) se dobija

$$\boxed{\frac{e}{m} = \frac{v}{Br} = \frac{3,1 \cdot 10^7}{3,2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,572} = 1,69 \cdot 10^{11} C \cdot kg^{-1}.}$$

1.3 Pokazati da pri kretanju naelektrisane čestice u homogenom magnetnom polju njen moduo brzine i projekcije brzine na pravac polja i normalu na polje ostaju konstantne.

Rešenje: Jednačina kretanja naelektrisane čestice u magnetnom polju ima oblik:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{1}$$

Za komponentu brzine u pravcu magnetnog polja v_{II}, izvod $dv_{II} / dt = 0$, i prema tome $v_{II} = const.$ Postavimo sada u jednačinu (1) $v = v_\perp$ i pomnožimo obe strane jednačine sa $v_\perp$. Tada dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{2}\right) = 0,$$

i prema tome $mv_\perp^2 / 2 = const.$ i $v_\perp = const.$

Moduo totalne brzine naelektrisane čestice

$$v = (v_{II}^2 + v_{\perp}^2)^{1/2},$$

u procesu njenog kretanja u homogenom magnetnom polju ostaje konstantan.

1.4 Odrediti jednačine kraetanja naelektrisane čestice koja pod proizvoljnim uglom upada u homogeno magnetno polje indukcije $\vec{B}$.

Rešenje: Ako uzmemo da je polje u pravcu $z-$ose ($B \equiv B_z$), jednačina kretanja u vektorskom obliku ima oblik

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B} \tag{1}$$

ili u skalarnom

$$m\dot{v}_x = qBv_y \qquad m\dot{v}_y = -qBv_x \qquad m\dot{v}_z = 0$$

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y. \tag{2}$$

Ove jednačine predstavljaju prosti harmonijski oscilator na ciklotronskoj frekvenciji, koja se definiše

$$\boxed{\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m}}$$

Konvencijom se uzima da ω_c, nije negativna.

Rešenje jednačina (2) je tada

$$v_{x,y} = v_{\perp}\exp\left(\pm i\omega_c t + \delta_{x,y}\right),$$

gde $\pm$ uračunava znak naelektrisanja. Faza δ, se može izabrati tako da je

$$v_x = v_{\perp}e^{i\omega_c t} = \dot{x},$$

gde je $v_{\perp}$, je pozitivna konstanta koja predstavlja brzinu u ravni, normalnoj na $\vec{B}$. Tada je

$$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = \pm\frac{1}{\omega_c}\dot{v}_x = \pm iv_{\perp}e^{i\omega_c t} = \dot{y}.$$

Integraleći još jednom, dobija se

$$x - x_0 = -i\frac{v_\perp}{\omega_c}e^{i\omega_c t} \qquad\qquad y - y_0 = \pm\frac{v_\perp}{\omega_c}e^{i\omega_c t}. \tag{3}$$

Ako se definiše Larmorov radijus

$$\boxed{r_L \equiv \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{|q|B},} \tag{4}$$

i uzme realni deo iz jednačine (4), dobija se

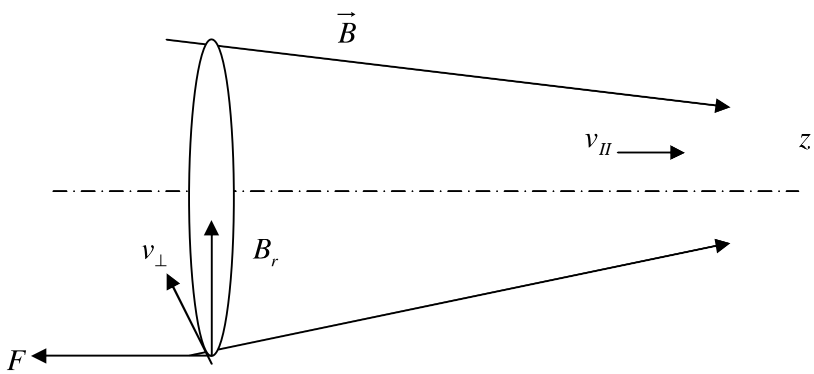
$$\boxed{x - x_0 = y - y_0 = r_L \sin\omega_c t \qquad\qquad y - y_0 = \pm r_L \cos\omega_c t.}$$

Gornje jednačine opisuju kružno kretanje oko centra (x_0, y_0), koji je fiksiran. Smer rotacije je takav da, magnetno polje koje generiše naelektrisana čestica je suprotnog smera od spoljašnjeg polja i prema tome, plazma čestice teže da redukuju spoljašnje polje tj., plazma se ponaša kao *dijamagnetic.*

Na ovo kružno kretanje je potrebno dodati uniformno kretanje čestice duž $z-$ose, koje nije pod uticajem magnetnog polja $\vec{B}$. Rezultantno kretanje je helikoidala.

1.5 Proanalizirati kretanje naelektrisane čestice u magnetnom polju koje se kontinualno menja duž trajektorije čestice. Krivine linija sila magnetnog polja ne uračunavati. Smatrati da je radijus krivine trajektorije mali u poređenju sa dimenzijama oblasti u čijim granicama se vektor magnetne indukcije značajno menja po modulu.

Rešenje: Analizirajmo sliku.



Ako se veličina indukcije magnetnog polja menja malo duž trajektorije naelektrisane čestice (značajna promena se dešava na rastojanjima daleko većim od radijusa krivine trajektorije) tada, put čestice na malom odsečku dužine predstavlja spiralu sa praktično konstantnim radijusom i korakom. Pri kretanju čestice u magnetnom polju čiji se vektor magnetne indukcije uvećava, radijus i korak spiralne trajektorije će se smanjivati. To je zbog javljanja sile F u nehomogenom magnetnom polju, koji koči podužno kretanje. Ta sila je komponenta Lorencove sile, čiji pravac je normalan na Larmorovski krug i teži istisnuti česticu iz oblasti jačeg polja. Sila F, se javlja na račun magnetnog polja koje je normalno na osu z, i komponente brzine kretanja čestice $v_\perp$.

1.6 Naći izraz za silu koja dejstvuje na naelektrisanu česticu koja se kreće duž, rastućeg u prostranstvu, magnetnog polja. Smatrati da se magnetno polje ne menja značajno na rastojanjima koja su poredljiva sa Larmorovim radijusom.

Rešenje: U plazmi sa rastućim u prostranstvu magnetnim poljem, pored podužne komponente magnetnog polja B_z, duž koje se kreće vodeći centar, postoji takođe radijalna komponenta polja B_r, (vidi sliku iz prethodnog zadatka). Naelektrisane čestice u tom slučaju vrše kružno kretanje. Pri tom, na česticu dejstvuje sila koja je brojno jednaka

$$F = qv_\perp B_r,$$

i pravac joj je duž ose z. Zato što je

$$div\vec{B} = 0,$$

to za aksijalno simetrično polje imamo

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Integraleći (1) po r, dobijamo

$$rB_r = -\int r\frac{\partial B_z}{\partial z}dr. \tag{2}$$

Ako veličina $\frac{\partial B_z}{\partial z}$, ne zavisi od r, imamo

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

pri čemu za $B_r << B_z$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \approx \frac{dB}{dz}.$$

Tada jednačina kretanja za podužnu komponentu brzine ima oblik

$$m\frac{dv_{II}}{dt} = qv_{\perp}B_r.$$

Desna strana jednačine se može transformisati na sledeći način

$$qv_{\perp}B_r = -qv_{\perp}\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{mv_{\perp}^2}{B}\frac{\partial B}{\partial z},$$

odakle je

$$\boxed{F = -\frac{1}{2}\frac{mv_{\perp}^2}{B}\frac{\partial B}{\partial z}.}$$

Ovde je $\mu = \frac{1}{2}\frac{mv_{\perp}^2}{B}$ – magnetni moment naelektrisane čestice u spoljašnjem magnetnom polju.

Notirajmo da je naša analiza sprovedena pod pretpostavkom «spore» promene magnetnog polja na putu čestice (magnetno polje je slabo nehomogeno u prostranstvu). Pri tom se smatra da je Larmorovski radijus mali u poređenju sa dimenzijama oblasti duž koje se jačina magnetne indukcije značajno menja po modulu i pravcu, tj., ispunjen je uslov $r|\nabla B|/B << 1$.

1.7 Pokazati da pri kretanju naelektrisanih čestica duž sporo rastućeg u prostranstvu magnetnog polja, njihov magnetni momenat ostaje konstantan. Krivine linija sila duž magnetnog polja ne uračunavati.

Rešenje: Naelektrisana čestica koja se kreće po zatvorenoj kružnoj putanji normalno na magnetno polje čini strujni tok. Magnetni moment strujnog toka je

$$\mu = IS = (q/T)\pi r^2 = \frac{q^2 B}{2\pi m}\pi r^2 = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{E_{\perp}}{B}.$$

Ovde je S – površina kruga sa Larmorovim radijusom.

Jednačina kretanja za paralelnu komponentu brzine naelektrisane čestice (pogledaj prethodni zadatak) ima oblik

$$m\frac{dv_{II}}{dt} = -\mu\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{E_{\perp}}{B}\frac{\partial B}{\partial z}. \qquad (1)$$

Množeći i levu i desnu stranu jednačine (1) sa v_{II}, dobijamo

$$\frac{dE_{II}}{dt} = -\frac{E_\perp}{B}\frac{\partial B}{\partial z} v_{II} = -\frac{E_\perp}{B}\frac{dB}{dt}. \qquad (2)$$

Uračunavajući u skladu sa zakonom o održanju energije

$$\frac{dE_\perp}{dt} = -\frac{dE_{II}}{dt},$$

i uslova (2)

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \frac{E_\perp}{B}\frac{dB}{dt},$$

dobijamo

$$\boxed{E_\perp / B = const.}$$

1.8 Naći uslov za odbijanje naelektrisane čestice koja se kreće duž rastućeg u prostranstvu magnetnog polja. Smatrati da se magnetno polje ne menja značajno na rastojanjima koja su poredljiva sa Larmorovskim radijusom.

Rešenje: Sila koja dejstvuje na naelektrisanu česticu koja se kreće duž rastućeg u prostranstvu magnetnog polja (vidi prethodni zadatak) je

$$m\frac{dv_\perp}{dt} = -\mu\frac{\partial B}{\partial z}, \qquad (1)$$

koči njeno kretanje. Množeći članove jednačine (1) sa v_{II}, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{2}\right) = -\mu\frac{dB}{dt}.$$

Pošto je totalna energija čestice

$$\frac{m}{2}\left(v_\perp^2 + v_{II}^2\right) = E_\perp + E_{II} = E_0 = const,$$

to je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_{II}^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}(\mu B).$$

Uslov odbijanja čestice od nehomogenog polja proističe iz konstantnosti njene kinetičke energije i konstantnosti magnetnog momenta $E_\perp / B$ (poslednje važi samo tada kada se magnetno polje ne menja bitno na rastojanjima poredljivim sa dimenzijama larmorove orbite). Stvarno, pošto se sa uvećanjem magnetnog polja smanjuje komponenta brzine v_{II}, tada se energija ciklotronske rotacije $E_\perp = \mu B$, mora uvećavati. Čestica se zaustavlja u pravcu rasta polja kada veličina μB, postane jednaka totalnoj kinetičkoj energiji E_0. Jednačina

$$\mu B(z) = E_0,$$

odre]uje tačku duž ose z, u kojoj čestica menja pravac svog kretanja. Označimo sa $\beta -$ugao između pravca brzine čestice i ose z. Iz uslova konstantnosti magnetnog momenta

$$\mu = \frac{E_\perp}{B} = \frac{mv_0^2}{2}\frac{\sin^2\beta}{B} = const.,$$

se vidi da se sa povećanjem magnetnog polja B, mora povećavati i ugao β, jer je i

$$\sin^2\beta / B = const. \qquad (2)$$

Uslov (2) se ispunjava kod magnetnih polja čije vrednosti ne prelaze neku kritičnu vrednost B_{kr}, za česticu sa zadanim pravcem brzine. Ta kritična vrednost magnetne indukcije se određuje iz jednakosti

$$B_{kr} = B / \sin^2\beta_0.$$

Za $B = B_{kr}$, sve čestice za koje je ispunjen uslov

$$\sin^2\beta > B / B_{kr},$$

će se reflektovati. Pri tome se neće promeniti kinetička energije čestica već naklon vektora brzine čestice na osu z.

1.9 Naelektrisana čestica upada u ukršteno električno i magnetno polje. Neka je električno polje E, usmereno duž y ose a magnetno polje B duž z ose i neka početna brzina čestice leži u xy ravni. Opisati kretanje čestice.

Rešenje: Prvi zaključak koji se može izvesti je da, zbog nepostojanja sile koja bi dejstvovala na česticu duž z ose, će trajektorija čestice takođe biti u xy ravni. Jednačine kretanja imaju oblik

$$m\ddot{x} = qB\dot{y},$$

$$m\ddot{y} = qE - qB\dot{x}.$$

Najbrži i najilustrativniji primer rešavanja ovih jednačina je zasnovan na smeni promenljivih. Uvedimo umesto x, novu promenljivu saglasno formuli

$$x_1 = x - ut,$$

gde je u – neka konstanta. Fizički smisao ove transformacije se sastoji u prelazu ka novom referentnom sistemu koji se na početni kreće sa brzinom u u pravcu x ose. Gornje jednačine se sada prepisuju u obliku

$$\ddot{x}_1 = \frac{qB}{m}\dot{y}, \qquad \ddot{y} = \frac{q}{m}E - \frac{qB}{m}\dot{x}_1 - \frac{q}{m}Bu.$$

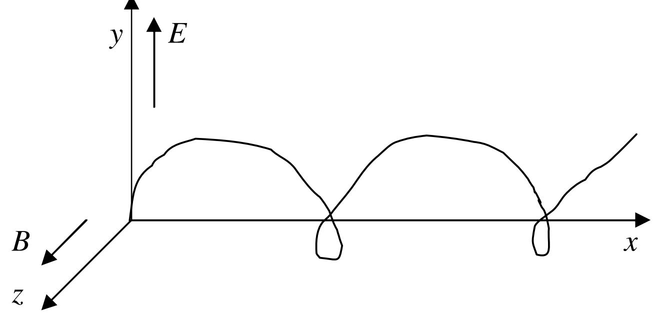
Ako se za konstantu u izabere vrednost

$$u = \frac{E}{B},$$

tada se jednačine uprošćavaju

$$\ddot{x}_1 = \frac{qB}{m}\dot{y} = \omega\dot{y}, \qquad \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}_1 = -\omega\dot{x}_1.$$

Kao što se vidi električno polje je iščezlo iz poslednjih jednačina koje u suštini predstavljaju kretanje naelektrisane čestice pod dejstvom homogenog magnetnog polja. Na taj način čestica se u novom sistemu koordinata (x_1, y) mora kretati po kružnici. Pošto se taj novi koordinatni sistem sam kreće u odnosu na početni sa brzinom $u = E/B$, tada rezultantno kretanje čestice se sastoji iz ravnomernog kretanja duž x ose i kružnog u xy ravni. Kao što je poznato trajektorija koja nastaje slaganjem ovih kretanja se u opštem slučaju naziva *trohoida*.



2. Elementarni procesi u jonizovanim gasovima

2.1 Odrediti temperaturu molekula gasa ako je njihova srednja energija $1eV$.

Napomena: *Jedan elekton-volt (eV) predstavlja energiju koju stiče jedan elektron pošto se ubrzao pod dejstvom razlike potencijala od 1 V. Kao što je poznato*

$1eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C \times 1V = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J.$

Rešenje: Prema molekularno-kinetičkoj teoriji, srednja kinetička energija molekula gasa je $\varepsilon_k = 3/2\kappa T$, gde je κ Bolcmanova konstanta ($\kappa = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J/K.$). Izostavljajući nebitan faktor 3/2, možemo reći da je srednja energija po čestici u gasu i plazmi reda veličine κT. Tada je $T = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K} \approx 11600K$. Ovu ekvivalenciju, $\boxed{1eV = 11600K}$, je korisno imati stalno na umu jer se često koristi u fizici plazme.

2.2 Osnovna razlika između neutralnog gasa i gasne plazme je u tome što je u drugom slučaju prisutno i znatno elektromagnetno (mikroskopsko) polje. To polje vrlo brzo fluktuira u vremenu i jako se menja od tačke do tačke, a uz to svojom Lorencovom silom utiče na kretanje naelektrisanih čestica plazme. Oceniti srednju vrednost mikroskopskog električnog polja u plazmi pri tipičnim laboratorijskim uslovima: koncentracija naelektrisanih čestica $n \sim 10^{15} cm^{-3} = 10^{21} m^{-3}$, $T \sim 5eV \approx 60000K$.

Rešenje: Ako sa n označimo broj čestica po jedinici zapremine plazme , onda je $d \sim n^{-1/3}$, srednje rastojanje između dve susedne naelektrisane čestice, pa je srednje mikroskopsko električno polje kojim jedna naelektrisana čestica deluje na svog najbližeg suseda reda veličine

$$E_{mik} \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{d^2} \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e n^{2/3},$$

Kada se zamene gornje vrednosti za E_{mik} se dobija vrlo velika vrednost

$$\boxed{E_{mik} \sim 1{,}5kV/cm.}$$

2.3 Oceniti srednju vrednost mikroskopskog magnetnog polja u plazmi sa uslovima kao i u zadatku 2.2.

Rešenje: Ako sa T, označimo temperaturu plazme i uzmemo u obzir da je $\sqrt{3\dfrac{\kappa T}{m_e}}$ srednja brzina termalnog kretanja u njoj ($m_e -$masa elektrona), onda svaki elektron deluje na najbližeg suseda magnetnim poljem reda veličine

$$B \sim \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev}{d^2}\left(\frac{3\kappa T}{m_e}\right)^{1/2} en^{2/3}.$$

Kada se zamene gornje vrednosti dobija se vrednost

$$\boxed{B_{mik} \sim 0{,}02G.}$$

2.4 Elektroni igraju predominantnu ulogu u procesima ekscitacije i jonizacije atoma gasa, ali isto tako su i glavni nosioci električne struje. Ova činjenica je posledica, u prvom redu, njihove male mase. U električnom polju elektroni se ubrzavaju do znatno većih brzina od jona zbog čega se svi procesi u kojima oni učestvuju odigravaju sa znatno većom efikasnošću. Odrediti maksimalnu vrednost promene unutrašnje energije čestica masa m_1 **i** m_2 **prilikom neelastičnog čeonog sudara uz pretpostavku da druga čestica miruje u trenutku sudara. Razmatrati slučajeve:** $m_1 << m_2$ **i** $m_1 \approx m_2$.

Rešenje: Kao što je poznato, u opštem slučaju, sudar dve čestice masa m_1 i m_2, opisuje se zakonima održanja impulsa i energije. U slučaju neelastičnog sudara deo kinetičke energije čestica ide na unutrašnje pobuđivanje čestica. Za slučaj ako čestica m_2 pre sudara miruje i sudar je centralni (čeoni), ova dva zakona se pišu u obliku:

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{1}$$

$$\frac{m_1 {v_{10}}^2}{2} = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} + \Delta E \tag{2}$$

gde je $\Delta E -$ energija čestica koja se u sudaru transformiše u energiju pobuđenja ili jonizacije. Ako se iz jednačine (1) izrazi $m_2 {v_2}^2$ i zameni u jednačinu (2), dobija se iznos te energije:

$$\Delta E = \frac{m_1 {v_{10}}^2}{2} - \frac{m_1 {v_1}^2}{2} - \frac{m_1}{2m_2}({v_{10}}^2 - 2v_{10}v_1 + {v_1}^2)\,. \tag{3}$$

U cilju određivanja uslova pri kojima se drugoj čestici u sudaru predaje maksimalna vrednost energije, nalazi se izvod izraza za energiju (3) po brzini v_1 i izjednačuje sa nulom:

$$\frac{dE}{dv_1} = -m_1 v_1 + \frac{m_1^2}{m_2} v_{10} - \frac{m_1^2}{m_2} v_1 = 0, \tag{4}$$

odakle sledi vrednost v_1 za koju je ΔE maksimalno:

$$v_1 = v_{10} \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Zamenom ove vrednosti u jednačinu (3) dobija se:

$$\Delta E_{\max} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = E_{k10} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{6}$$

Prilikom sudara, bez obzira da li je on centralni ili sa rasejanjem, deo kinetičke energije prve čestice (projektila) koja može da se utroši na promenu unutrašnje energije, ne može da bude veća od $\Delta E_{\max}$.

U slučaju ako je čestica projektil elektron, tada je odnos njegove mase sa masom atoma $m_1 << m_2$, tako da iz (6) sledi

$$\boxed{\Delta E_{\max} \cong E_{k10,}}$$

tj., kinetička energija elektrona se skoro u potpunosti može utrošiti na promenu unutrašnje energije druge čestice. U slučaju kada je čestica projektil teška, tada je $m_1 \approx m_2$ i tada se najviše polovina njene energije može utrošiti i transformisati u unutrašnju

$$\boxed{\Delta E_{\max} \cong E_{k10} / 2.}$$

2.5 Koji deo energije odaje elektron u srednjem, pri svakom elastičnom sudaru sa neutralnim atomom koji miruje?

Rešenje: Pri svakom elastičnom sudaru sa neutralnim atomom koji miruje, elektron dobija impuls $\mathbf{p} = -m_e \Delta \mathbf{v_e}$,

gde je $\Delta \mathbf{v}_e$ – promena vektora brzine elektrona. Kao rezultat energija atoma se uvećava za vrednost

$$\frac{m_e^2 < (\Delta v_e)^2 >}{2m_a} = \frac{m_e^2}{m_a} v_e^2 (1 - < \cos\theta >), \tag{1}$$

jer je $< (\Delta v_e)^2 >= 2v_e^2 (1 - < \cos\theta >)$, θ - je ugao rasejanja elektrona. Iz izraza (1) se vidi da je srednji gubitak energije elektrona u sudaru sa atomima

$$< \mathrm{E} >= 2\frac{m_e}{m_a}\frac{m_e v_e^{\ 2}}{2} = 2\frac{m_e}{m_a}\mathrm{E} = \delta \mathrm{E},$$

gde je $\delta = 2m_e / m_a$ je deo ili frakcija energije koju u srednjem izgubi elektron pri jednom elastičnom sudaru sa atomom ili molekulom gasa koji miruje.

2.6 Ravanski vazdušni kondenzator sa rastojanjem među pločama $2cm$ napunjen je do napona $1000V$ i odvojen od izvora energije. Za koje vreme se se isprazniti kondenzator , ako u svakom kubnom santimetru vazduha među pločama kondenzatora jonizator obrazuje $2 \cdot 10^8$ parova jednovalentnih jona u sekundi? Smatrati, da svi joni dostižu do ploča kondenzatora. Kolika bi bila struja zasićenja, ako bi pri nepromenjenom jonizatoru priključili kondenzator na izvor konstantnog napona? Kako zavisi struja zasićenja od veličine napona na kondenzatoru? Površina svake ploče je $50cm^2$.

Rešenje: a) Vreme pražnjenja kondenzatora t se nalazi znajući naelektrisanje q kondenzatora i ukupnu količinu naelektrisanja jona jednog znaka q_t, koji se obrazuje u prostoru među pločama kondenzatora pod dejstvom jonizatora za jednu sekundu:

$$t = q / q_t. \tag{1}$$

Za određivanje količine naelektrisanja q koristi se formula $C = q/U$ i $C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d$, odakle je

$$q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d}. \tag{2}$$

Količina naelektrisanja jona jednog znaka q_t, obrazovanih za jednu sekundu, određuje se po formuli $q_t = n_t e,$ gde je $n_t -$ broj parova jona koji se obrazuju među pločama kondenzatora za jednu sekundu. Ako je zapreminu dielektrika u kondenzatoru $V = Sd$, to je

$$q_t = n_0 S d e. \tag{3}$$

Zamenjivanjem u formulu $t = q / q_t$, nađene vrednosti za q i q_t, dobijamo

$$t = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d n_0 d S e} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{e n_0 d^2}.$$

Kada zamenimo vrednosti dobijamo konačan rezultat $\boxed{t = 6{,}9 \cdot 10^{-1} s.}$ Kratko vreme pražnjenja je iz razloga neučitavanja rekombinacije jona.

b) Struju zasićenja se nalazi po formuli

$$I_s = q_{\max} / t,$$

gde je $q_{\max} -$ maksimalno naelektrisanje koje dopire do ploča kondenzatora: $q_{\max} = n_t e t = e n_0 S d e;$ $t -$ vreme za koje to naelektrisanje stiže do ploča (prolazi kroz kolo). Tada je

$$I_s = \frac{n_0 S \det}{t} = n_0 S de.$$

Kao što se vidi iz formule, struja zasićenja je brojno jednaka količini naelektrisanja jona jednog znaka koji se obrazovao pod dejstvom jonizatora među pločama kondenzatora u jedinici vremena. Zamenom brojnih vrednosti dobijamo vrednost za struju zasićenja

$$\boxed{I_s = 3{,}204 \cdot 10^{-9} A.}$$

c) Analiza formule dobijene za struju zasićenja pokazuje da struja zasićenja ne zavisi od napona i prema tome ne podčinjava se Omovom zakonu. Struja zasićenja se određuje samo intenzitetom jonizatora i zapreminom prostora između elektroda..

2.7 Izračunati dužinu slobodnog puta elektrona za jonizaciju, ako se elektron obrazuje pri $\beta-$raspadu radioaktivnog ^{86}Kr pri $p = 28{,}5 mmHg$ i $T = 273K$. Kada je energija elektrona $\varepsilon = 225 keV$, presek za jonizaciju je $\sigma_j = 2 \cdot 10^{-9} cm^2$. Kako se menja dužina slobodnog puta za jonizaciju ako se gas zagreje do temperature $T = 760K$ pri nepromenjenom pritisku?

Rešenje: Dužina slobodnog puta za jonizaciju se izražava u funkciji koncentracije neutralnih atoma i preseka za jonizaciju u obliku:

$$< \lambda_J >= (n_a \sigma_J)^{-1} \approx 5 cm.$$

Ovde je $n_\alpha -$koncentracija atoma pri temperaturi $273K$. Pri temperaturi $760K$ i pritisku $1 mmHg$, $n_a = p / kT = 1{,}2 \cdot 10^{16} cm^{-3}$. Prema tome, zagrevanje gasa i time menjajući koncentraciju, uvećava se dužinu slobodnog puta elektrona za jonizaciju do vrednosti $< \lambda_J >\approx 15 cm.$

2.8 Koliki broj parova jona se obrazuje u vazduhu pri atmosferskom pritisku blizu površine Zemlje pod dejstvom njene prirodne radioaktivnosti i

kosmičkog zračenja u $1s$ u $1cm^3$? Koncentracija jona je $n = 1 \cdot 10^3 cm^{-3}$, a koeficijent jon-jonske zapreminske rekombinacije $\rho_j = 1{,}6 \cdot 10^{-6} cm^3 / s$.

Rešenje: Elektroni, obrazujući se pri jonizaciji u vazduhu, se praktično, trenutno zahvaćaju molekulima kiseonika i time obrazuju molekulske negativne jone O_2^-, koji zatim rekombiniraju sa pozitivnim jonima. Brzina promene broja naelektrisanih čestica u jedinici vremena, pri konstantnom izvoru generisanja je $\dfrac{dn}{dt} = z_J - \rho_J n^2$, gde je z_J – broj parova jona koji se stvaraju u jedinici vremena i jedinici zapremine. U stacionarnom stanju $dn/dt = 0$ i $z_J = \rho_J n^2 = 1{,}6 cm^3 \cdot s^{-1}$. Prema tome, u vazduhu blizu površine Zemlje, njena radioaktivnost i kosmičko zračenje stvaraju u $1cm^3$ i $1s$, u proseku dva para jona.

2.9 Odrediti srednje vreme života jona ako je koncentracija pozitivnih i negativnih jona $n = 1 \cdot 10^6 cm^{-3}$, a koeficijent jon-jonske rekombinacije $\rho_J = 1 \cdot 10^{-6} cm^3 / s$.

Rešenje: Brzina gubitaka jonskih parova usled rekombinacije je dat kao:

$$\frac{dn}{dt} = -\rho_J n^2 = -\frac{n}{\tau},$$

odakle je srednje vreme života jona:

$$\tau = 1/(\rho_J n) = 1s.$$

2.10 Objasniti uzrok smanjenja probojnog napona u čistom vazduhu pri dobavljanju male količine (stoti deo procenta) primese drugoga gasa pri uslovu da je potencijal jonizacije primese manji od potencijala pobuđivanja metastabilnog stanja osnovnog gasa. Razmatrati primer pražnjenja u argonsko-živinoj smeši. Uzeti da je potencijal jonizacije primesnih atoma žive jednak $10{,}5V$; a metastabilnog atoma argona- $11{,}5V$.

Rešenje: U slučaju ako je cev za pražnjenje napunjena čistim argonom, a elektroni imaju energiju manju od energije jonizacije atoma, ali veću od energije pobuđivanja metastabilnog nivoa argona, to se kao rezultat sudara elektrona sa atomima obrazuju metastabilni atomi argona:

$$Ar + e(11{,}5V) \rightarrow Ar^m + e.$$

Kada se argonu doda mala primesa gasa ili pare metala sa energijom jonizacije manjom od energije pobuđivanja metastabilnog nivoa atoma, verovatnoća stepenaste jonizacije argona je mala u poređenju sa tzv. Peningovom jonizacijom (jonizacija atoma primese pri sudaru sa metastabilnim atomima osnovnog gasa).

Tako, ako je u argonu prisutna mala primesa atoma žive, čiji je potencijal jonizacije $10{,}5V$; znači manji od potencijala pobuđivanja metastabilnih atoma argona, to pri sudaru metastabilnih atoma sa atomima primese prvi od njih preda svoju energiju pobuđenja drugom i na taj način ih jonizuje :

$$Ar^m + Hg \rightarrow Ar + Hg^+ + e.$$

Energija pobulenja se rashoduje na jonizaciju i ubrzanje elektrona.

U isto vreme verovatnoća jonizacije atoma male primese žive putem neposrednog sudara sa elektronima je mnogo puta manja od verovatnoće jonizacije atoma primese sa metastabilnim atomima osnovnog gasa.

Na taj način, pri brzinama elektrona dovoljnim da prevedu atome osnovnog gasa u metastabilno stanje, ali nedovoljnih da ih jonizuje, odvija se jonizacija primese metastabilnim atomima osnovnog gasa. Time se i objašnjava da je napon paljenja pražnjenja u smeši argona sa živom manji nego u čistom argonu. Razmotreni proces nosi naziv Penningov efekat.

2.11 Izračunati gustinu struje sa površine volframove katode pri $T = 2500K$. **Izlazni rad elektrona iz volframa je** $\boldsymbol{\Phi}$**=4,52 eV. Srednji koeficijent refleksije elektrona od potencijalne barijere metal-vakuum smatrati jednakim nuli.**

Rešenje: Gustina struje emisije sa površine katode, saglasno formuli Ričardson-Dešmana je data kao:

$$j_0 = AT^2 \exp(-\frac{\Phi}{kT}) \approx 0{,}6A/cm^2,$$

gde je $A = 4\pi m_e k^2 / h^3 = 1{,}2 \cdot 10^2 A/(cm^2 \cdot K^2)$ – Ričardsonova konstanta.

2.12 Izlazni rad elektrona iz molidbenske katode je $\Phi = 4{,}17eV$. **Za koliko će se promeniti izlazni rad elektrona sa katode, ako se u odsustvu prostornog naelektrisanja blizu njene površine formira električno polje jačine** $E = 1 \cdot 10^4 V/cm$?

Rešenje: Kada u blizini katode postoji jako električno polje, njegovo prisustvo može imati znatan uticaj na termoelektronsku struju. Spoljašnje električno polje ustvari utiče na oblik potencijalne barijere. Saglasno Šotkijevom efektu spoljašnje električno polje menja izlazni rad elektrona za:

$$\Delta\Phi = (e^3 E / 4\pi\varepsilon_0)^{1/2} = 0{,}038eV,$$

gde je $E -$ jačina električnog polja a $\varepsilon_0 -$ dielektrična propustljivost vakuuma.

2.13 Koliko puta će se promeniti struja zasićenja termoelektronske emisije sa katode u cilindričnoj diodi sa anodom radijusa $r_a = 0{,}5cm$ i katodom radijusa $r_k = 0{,}005cm$, ako se između elektroda dovede napon $U = 1000V$ pri temperaturi katode $T = 2500K$?

Rešenje: Spoljašnje električno polje umanjuje izlazni rad (Šotkijev efekat) za

$$\Delta\Phi = (e^3 E / 4\pi\varepsilon_0)^{1/2} = 0{,}053eV,$$

gde je $E = \dfrac{U}{r_k \ln(r_a / r_k)} \approx 2 \cdot 10^4 V / cm.$

Struja sa površine katode u tom slučaju je:

$$I = I_0 \exp\frac{\Delta\Phi}{kT} = 1{,}27 I_0.$$

2.14 Koliko puta se promeni struja zasićenja termoelektronske emisije sa katode ako se blizu njene površine generiše električno polje jačine $E = 3 \cdot 10^4 V/cm$? Temperatura katode je $T = 2500K$.

Rešenje: Dejstvo spoljašnjeg električnog polja po Šotkijevoj formuli je dato kao (vidi prethodni zadatak):

$$I = I_0 \exp\frac{\Delta\Phi}{kT} = 1{,}36 I_0.$$

2.15 Koliku jačinu električnog polja treba dovesti blizu površine katode napravljene od tantala i zagrejane do $T = 2000K$, da bi se struja termoelektronske emisije sa njene površine uvećala $2{,}3$ puta?

Rešenje: Jačina spoljašnjeg električnog polja po Šotkijevoj teoriji je:

$$E = \frac{k^2 T^2}{e^3}(\ln\frac{I}{I_0})^2 \approx 2{,}1 \cdot 10^5 V / cm.$$

2.16 Koliko puta se promeni struja zasićenja elektrona sa katode u vakuumskoj diodi sa planparalelnim elektrodama, ako se između elektroda dovede zakočni napon za elektrone $U = 1V$? Temperatura katode je $T = 2500K$. Kontaktnu razliku potencijala ne uračunavati.

Rešenje: Pri kretanju elektrona u električnom polju koje ih zadržava, u saglasnosti sa Bolcmanovom formulom, jačina struje opada po istom zakonu kao i koncentracija elektrona tj.,:

$$I = I_0 \exp(-\frac{eU}{kT}) \approx 0{,}01 I_0.$$

2.17 Naći pomeraj crvene granice fotoefekta u diodi sa planparalelnim elektrodama, ako se između elektroda dovede napon $U = 2{,}5 \cdot 10^5 V$. Katoda je pokrivena debelim filmom barijuma. Izlazni rad barijuma je $\Phi = 2{,}52 eV$. Rastojanje među elektrodama je $L = 1cm$.

Rešenje: Električno polje blizu površine katode, $E = 2{,}5 \cdot 10^5 V / cm$, menja izlazni rad za $\Delta\Phi = 0{,}19V$. U odsustvu spoljašnjeg električnog polja maksimalna talasna dužina za fotoefekat je:

$$\lambda_0 = hc / \Phi = 493nm.$$

Pomeraj crvene granice fotoefekta na stranu većih talasnih dužina je:

$$\Delta\lambda_0 = \lambda_0 \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 37nm.$$

(Maksimalna talasna dužina pri postojanju spoljašnjeg električnog polja je $\lambda_0^{'} = 530nm.$)

2.18 Pokazati da je ravnotežna raspodela naelektrisanih čestica u slabojonizovanoj plazmi pri postojanju električnog polja Bolcmanovska.

Rešenje: Usmerena brzina naelektisanih čestica vrste j, proističe zbog postojanja gradijenta koncentracije (difuzija) i zbog postojanja električnog polja:

$$v_j = -\frac{D_j}{n_j}\frac{dn_j}{dz} + b_j E.$$

U stanju ravnoteže $v_j = o,$ odakle dobijamo: $\frac{dn_j}{n_j} = \frac{b_j E dz}{D_j}$

Primer takvog transporta biće dat pod pretpostavkom da u gasu postoje samo pozitivni naelektrisani joni, koji nose naelektrisanje q. Uzećemo da jonski gas ima parcijalni pritisak

$$p_j = n_j k T_j.$$

Električno polje prouzrokuje usmereno kretanje jona pri čemu se stvara gardijent koncentracije i pritiska. Povećanje gradijenta, međutim, prouzrokuje pojavu difuzionog transporta u suprotnom smeru. Posle izvesnog vremena uspostavi se ravnoteža pošto se sile izjednačuju. Ako se izjednače sile po jedinici površine, ta ravnoteža se može izraziti kao:

$$(p_j + \frac{dp_j}{dx}dx) = qn_j E dx,$$

pošto je $\frac{dp_j}{dx} = kT_j \frac{dn_j}{dx},$ to sledi

$$\frac{dn_j}{dx} = \frac{qE}{kT_j} n_j.$$

Posle razdvajanja promenljivih i integracije, uzimajući u obzir vezu $E = -dU / dx$ sledi Bolcmannov zakon raspodele jona

$$n_j = n_{j0} \exp(-qU / kT_j)$$

gde je n_{j0} koncentracija jona za $x = 0.$

2.19 Izvesti Ajnštajnovu relaciju, koja uspostavlja vezu između koeficijenta slobodne difuzije i pokretljivosti jona u slabom spoljašnjem električnom polju. Oceniti veličinu odnosa koeficijenta difuzije i pokretljivosti elektrona u živinoj plazmi u slučaju ako je proizvod radijusa cevi za pražnjenje i pritiska $pR = 8 \cdot 10^{-2} mmHg,$ što odgovara temperaturi elektrona $T_e \approx 10000K,$ očitanoj sa grafika zavisnosti temperature elektrona od proizvoda pritiska i radijusa cevi za pražnjenje.

Rešenje: Ajnštajnovu relaciju je najjednostavnije izvesti u slučaju kada je difuziono kretanje jona uravnoteženo njihovim kretanjem u električnom polju koje se obrazovalo prostornim naelektrisanjem. Pri tome (pogledaj prethodni zadatak) imamo:

$$v_j = -\frac{D_j}{n_j}\frac{dn_j}{dx} + b_j E = 0.$$

Iz uslova $v_j = 0$ dobijamo:

$$\frac{b_j}{D_j} = \frac{1}{n_j E}\frac{dn_j}{dx} = \frac{1}{p_j E}\frac{dp_j}{dx} = \frac{e}{kT_j}.$$

Ovde je parcijalni pritisak jona $p_j = n_j kT_j$, a gardijent pritiska $dp_j / dx = en_j E.$

Znajući temperaturu elektrona T_e, nalazimo:

$$\frac{D_e}{b_e} = \frac{kT_e}{e} \approx 1V.$$

2.20 Naći izraz za koeficijent ambipolarne difuzije u plazmi, koristeći jednačinu kretanja naelektrisanih čestica u stacionarnom režimu.

Rešenje: U svakom realnom slučaju u jonizovanom gasu postoje dve vrste naelektrisanih čestica, pri čemu su elektroni znatno manje mase od jona. Ako je jonizovan gas stvoren električnim pražnjenjem u cilindričnoj staklenoj cevi, zbog mnogo brže difuzije elektrona zidovi cevi se vrlo brzo naelektrišu negativno, zbog čega se javlja radijalno električno polje E_r. Ovo polje ubrzava jone u radijalnom pravcu tako da se uskoro uspostavi zajednička brzina transporta elektrona i jona.Tada su usmerene brzine jona i elektrona duž radijusa, u slučaju kada je $n_e = n_j = n,\ \frac{dn_e}{dr} = \frac{dn_j}{dr} = \frac{dn}{dr}$, date kao :

$$v_{jr} = -D_j \frac{1}{n}\frac{dn}{dr} + b_j E_r, \quad v_{er} = -D_e \frac{1}{n}\frac{dn}{dr} - b_e E_r.$$

Pošto su pri ambipolarnoj difuziji $v_{jr} = v_{er} = v_r$, to je radijalni gradijent potencijala:

$$E_r = \frac{D_j - D_e}{b_j + b_e}\frac{1}{n}\frac{dn}{dr}$$

i brzina:

$$v_r = -\frac{D_e b_j + D_j b_e}{b_e + b_j}\frac{1}{n}\frac{dn}{dr} = -D_a \frac{1}{n}\frac{dn}{dr};$$

odavde je koeficijent ambipolarne difuzije:

$$D_a = \frac{D_e b_j + D_j b_e}{b_e + b_j}.$$

2.21 Naći izraz za koeficijent ambipolarne difuzije u izotermskoj i neizotermskoj plazmi. Pokazati da je u izotermskoj plazmi koeficijent ambipolarne difuzije jednak dvostrukom koeficijentu slobodne difuzije pozitivnih jona.

Rešenje: U neizotermskoj plazmi ($T_e > T_j; b_e >> b_j$). Zato je :

$$D_a \approx \frac{D_e b_j + D_j b_e}{b_e} = D_j + \frac{b_j}{b_e} D_e = b_j (\frac{D_j}{b_j} + \frac{D_e}{b_e}) = b_j (\frac{kT_j}{e} + \frac{kT_e}{e}) \approx b_j \frac{kT_e}{e}.$$

U izotermskoj plazmi $(T_e = T_j = T)$ koeficijent ambipolarne difuzije je:

$$D_a = 2b_j \frac{kT}{e} = 2D_j.$$

2.22 Naći uslov dobijanja stacionarnog nesamostalnog pražnjenja, pretpostavljajući, da se pod dejstvom spoljašnjeg jonizatora sa jedinice površine ravne katode u jedinici vremena emituje n_0 elektrona. Zapreminsku jonizaciju gasa usled bombardovanja pozitivnim jonima zanemariti.

Rešenje: U stacionarnom režimu sa katode izleću elektroni, kako pod dejstvom spoljašnjeg jonizatora, tako i zbog bombardovanja katode pozitivnim jonima ubrzanih katodnim padom potencijala. Neka sa jedinice površine ravne katode u jedinici vremena u gas se emituje n_1 elektrona. Pri tom, u slučaju ne vrlo jakih električnih polja, kada se može zanemariti prostorna jonizacija gasa pozitivnim jonima, uslov postojanja stacionarnog nesamostalnog pražnjenja ima oblik:

$$n_1 = n_0 + \gamma n_1[\exp(\int_0^L \alpha dx) - 1].$$

Ovde je $\alpha -$ koeficijent prostorne jonizacije gasa elektronima, $\gamma -$ koeficijent površinske jonizacije, $L -$ rastojanje između elektroda.

2.23 Naći uslov postojanja stacionarnog samostalnog pražnjenja pri uslovima sformulisanim u prethodnom zadatku .

Rešenje: Za postojanje stacionarnog samostalnog pražnjenja dejstvo spoljašnjeg jonizatora postaje nepotrebno i $n_0 = 0$. U tom slučaju uslov postojanja stacionarnog samostalnog pražnjenja ima oblik:

$$\gamma[\exp(\int_0^L \alpha dx) - 1] = 1.$$

2.24 Zašto se uvećava katodni pad potencijala prilikom prelaza od normalnog tinjavog pražnjenja ka subnormalnom i abnormalnom tinjavom pražnjenju?

Rešenje: Pri smanjenju struje pražnjenja ispod $10^{-5} A$, dijametar kanala za pražnjenje postaje vrlo mali, zbog čega oštro rastu difuzioni gubici naelektrisanih čestica iz oblasti pražnjenja. Smanjenje gustine struje pražnjenja nosi sa sobom smanjenje emisije elektrona sa katode. Za održanje stacionarnog stanja u pražnjenju neophodno je uvećanje katodnog pada potencijala.

Pri uvećanju struje pražnjenja iznad $10^{-2} A$, gustina struje počinje da raste. Zbog toga dolazi do nagomilavanja pozitivnog zapreminskog naelektrisanja kod površine katode, što dovodi do uvećavanja električnog polja kod katode.

2.25 Neslobodan režim pražnjenja se naziva takav režim kod koga je anodna struja veća od struje emisije sa katode. Čime je izazvan prelaz ka neslobodnom režimu gorenja luka sa katodom koja se greje spolja (nesamostalno lučno pražnjenje)?

Rešenje: Prelaz ka neslobodnom režimu se karakteriše uvećanjem katodnog pada potencijala, katodnom erozijom i nestabilnim gorenjem luka. Takav režim se odlikuje time što se uporedo sa emisijom elektrona sa katode pod uticajem termoelektronske emisije vrši emisija elektrona kao rezultat $\gamma -$procesa, tj., izbijanje elektrona iz katode brzim pozitivnim jonima koji su se ubrzali uvećanim katodnim padom potencijala.

3. Plazma

3.1. Pri kojem uslovu plazmu možemo smatrati idealnom? Uporediti potencijalnu i kinetičku energiju naelektrisanih čestica u plazmi sa $n = 1\cdot 10^{12}\,cm^{-3}$ i $T = 1\cdot 10^{5}\,K$.

Rešenje: Plazmu možemo smatrati idealnom ako je potencijalna energija interakcije čestica sa drugim česticama koje ih okružuju, na srednjem rastojanju među njima značajno manja od srednje kinetičke energije čestica:

$$\mathrm{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{L} < \mathrm{E}_k = kT,$$

gde je $L -$srednje rastojanje između dve čestice. Ako jedinica zapremine sadrži $n -$čestica, onda jednoj čestici stoji, u srednjem, na raspolaganju zapremina n^{-1}, pa ako tu zapreminu zamislimo kao minijaturnu kocku, dužina ivice te kocke $L = n^{-1/3}$, biće istovremeno i srednje rasojanje između dve čestice. Prema tome, iz gornje jednačine za idealnu plazmu sledi:

$$\frac{e^6 n}{(4\pi\varepsilon_0)^3} < k^3 T^3.$$

Odnos potencijalne energije čestice i njene toplotne energije je:

$$\frac{E_p}{\mathrm{E}_k} = \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)LkT} \approx \frac{e^2 n^{1/3}}{kT} \approx 2\cdot 10^{-4}.$$

3.2. Objasniti zašto je u gasnoj plazmi temperatura elektrona znatno veća od temperature jona. Smatrati temperaturu atoma malom.

Rešenje: Promena energije naelektrisanih čestica vrste j, u vremenu, pri njihovom kretanju u električnom polju je:

$$\dot{E}_j = m_j v_j \dot{v}_j = e_j E v_j .$$

gde je $m_j \dot{v} = eE.$

Iz gornjeg izraza se vidi da lakši elektroni brže nakupljaju energiju električnog polja nego teški joni. Pri sudaru sa neutralnim molekulima ili atomima naelektrisane čestice im odaju deo svoje energije. Ali zbog velike razlike masa elektrona i neutralnih čestica deo energije koju odaje elektron je znatno manje od dela energije koju odaje jon pri sudaru sa neutralom (vidi zadatak br. 5.). Sve to dovodi do toga da je temperatura elektrona u gasnoj plazmi veća od temperature jona.

3.3 Naći zakon promene potencijala u funkciji rastojanja od naelektrisanja koje se nalazi u izotermnoj plazmi, smatrajući slabim električno polje. Takođe uzeti da je u stacionarnoj plazmi, raspodela gustine naelektrisanih čestica Bolcmanova.

Rešenje: Saglasno Poasonovoj jednačini

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0 = -e\Delta n/\varepsilon_0 = -e(n_j - n_e)/\varepsilon_0 . \qquad (1)$$

Dalje, saglasno Bolcmanovoj formuli

$$n_e = n_{e0}\exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right), \qquad n_j = n_{j0}\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT_j}\right)$$

pod uslovom da je $n_{e0} = n_{j0} = n.$ U slabom električnom polju $(e\varphi << kT)$ i izotermskoj plazmi $(T_e = T_j = T)$

$$n_j - n_e = -\frac{2en}{kT}\varphi. \qquad (2)$$

Tada postavljajući izraz (2) u (1), imamo

$$\Delta\varphi - \frac{2e^2 n}{kT\varepsilon_0}\varphi = 0.$$

U sfernim koordinatama gornja jednačina ima oblik

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r_D^2}\varphi = 0.$$

Ovde je $r_D = \left(kT\varepsilon_0 / 2e^2 n\right)^{1/2}$ $-$Debajev radijus ekraniranja. Rešenje, ograničeno pri $r \to \propto$, ima oblik

$$\varphi = \frac{C}{r}\exp\left(-r / r_D\right). \tag{3}$$

Da bi za mala rastojanja r ovo rešenje prelazilo u obični Kulonovski potencijal naelektrisanja e, treba uzeti za konstantu $C = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$. Tada izraz (3) postaje

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{r}{r_D}\right).$$

Iz formule se vidi da se na rastojanju r_D od datog naelektrisanja potencijal plazme smanjio e puta u poređenju sa potencijalom u vakuumu.

3.4 Oceniti električno polje koje se generiše u plazmi sa koncentracijom naelektrisanih čestica $n = 1 \cdot 10^{14}\, cm^{-3}$, ako je u plazmi proizašlo razdvajanje 1% od ukupnog naelektrisanja na rastojanju $L = 1 cm$.

Rešenje: Za ocenu električnog polja prostornog naelektrisanja možemo uzeti

$$divE \approx E / L.$$

Tada je jačina električnog polja

$$\boxed{E = e\Delta n L / \varepsilon_0 = 1{,}8 \cdot 10^6\, V / cm.}$$

3.5 Naći izraz za Debajev radijus ekraniranja r_D, u slučaju izotermske i neizotermske plazme. Oceniti r_D, u slučaju neizotermske plazme za $T_j = 3 \cdot 10^2\, K$ i koncentracije naelektrisanja $n = 1 \cdot 10^{10}\, cm^{-3}$. Koliko se naelektrisanih čestica nalazi u zapremini Debajevske sfere. Kao i u zadatku 3.3 uzeti slučaj slabog električnog polja i Bolcmanove raspodele gustine plazme.

Rešenje: U neizotermskoj plazmi $(T_e >> T_j)$

$$n_e = n_{e0}\exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right), \quad n_j = n_{j0}\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT_j}\right);$$

pri uslovu $e\varphi << kT_j, kT_e$,

$$n_j - n_e = -\frac{en}{k}\left(\frac{T_e + T_j}{T_e T_j}\right)\varphi.$$

Debajevski radijus ekraniranja (vidi zadatak 3.3)

$$\boxed{r_D = \left(\frac{k\varepsilon_0}{e^2 n}\frac{T_e T_j}{T_e + T_j}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{k\varepsilon_0 T_j}{e^2 n}\right)^{1/2} = 1{,}2\cdot 10^{-3}\,cm.}$$

U izotermskoj plazmi $(T_e = T_j = T)$

$$r_D = \left(\frac{k\varepsilon_0 T}{2e^2 n}\right)^{1/2}.$$

Broj čestica koji se nalazi u Debajevoj sferi je

$$\boxed{N = 4/3\pi r_D^3 n \approx 70.}$$

3.7 Odrediti izraz za učestanost Langmuirovih elektronskih oscilacija u homogenoj po gustini neograničenoj plazmi, razmatrajući slučajni pomeraj njene elektronske komponente u odnosu na nepokretnu jonsku komponentu. Smatrati, da je pomeraj elektrona proizašao u oblasti blizu koordinatnog početka. Toplotno kretanje i disipaciju zanemariti. Odrediti učestanost elektronskih oscilacija za $n_e = 1\cdot 10^{10}\,cm^{-3}$.

Rešenje: Posmatrajmo deo plazme, unutra koje je došlo do pomeraja njene elektronske komponente na rastojanje Δx u odnosu na početnu ravan sa koordinatom $x = 0.$ U tom slučaju na jednom iz krajeva plazme u sloju širine Δx, će se pojaviti pozitivno prostorno naelektrisanje, a na drugom kraju u sloju sa istom širinom-negativno prostorno naelektrisanje. Kao rezultat u plazmi će se pojaviti električno polje, koje teži da vrati elektrone ka njihovoj ravnotežnoj raspodeli i uspostaviti kvazineutralnost. To polje se određuje izrazom:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Pod dejstvom elekričnog polja E, elektroni odlaze iz sloja gde su oni bili u višku, i prave višak negativnog naelektrisanja u sloju širine Δx sa druge strane od ravni sa koordinatom $x = 0.$ Polje prostornog naelektrisanja dejstvuje na svaki elektron sa silom eE, proporcionalnoj pomeraju elektrona iz početnog položaja i usmerena u suprotnu stranu od tog pomeraja. Znači, javlja se povratna sila koja dejstvuje na elektrone pod čijim dejstvom u plazmi se javljaju periodične oscilacije elektrona na pozadini, praktično nepokretnih jona. Jednačina kretanja ima oblik:

$$m\Delta\ddot{x} = -eE. \tag{2}$$

Izražavajući polje iz (1) i uračunavajući da je $\Delta E \approx E$, $E = \frac{en}{\varepsilon_0}\Delta x$ imamo

$$\Delta\ddot{x} + \omega^2\Delta x = 0, \tag{3}$$

a sopstvena učestanost sa kojom oscilaira prostorno naelektrisanje

$$\boxed{\omega = \left(\frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} = 5{,}6\cdot 10^9\, s^{-1}.}$$

Ova učestanost se naziva Larmorovska elektronska učestanost.

3.8 Ustanoviti da li je ispunjen kriterijum jakog magnetnog polja i kriterijum adijabatičnosti kod radijacionih pojaseva Zemlje. Uzeti približno da je energija protona u njima oko $10^6 eV$, a presek za rasejanje $\sigma = 10^{-20} cm^2$. Koncentracija čestica unutar pojasa je $n = 10 cm^{-3}$, i jačina magnetne indukcije $B = 0{,}2G$. Pri ocenjivanju smatrati da je karakteristična dužina za nehomogenost magnetnog polja jednaka po redu veličine radijusu Zemlje ($R_Z \approx 6400 km$).

Rešenje: Dužina slobodnog puta unutar radijacionog pojasa Zemlje pri zadatim parametrima je

$$\lambda_p = 1/(n\sigma) \approx 10^{19} cm,$$

a njegov Larmorov radijus

$$r = v_{p\perp}/\omega_p \approx 7\cdot 10^5 cm,$$

tako da je $\lambda_p >> r.$ (uslov jakog polja)

Uslov adijabatičnosti (magnetno polje se sporo menja u prostoru) se ispunjava u tom slučaju ako je Larmorov radijus čestice mali u poređenju sa dimenzijama oblasti u kojoj je značajna promena jačina magnetne indukcije po modulu i pravcu. Pri tom mora biti ispunjen uslov

$$r\frac{|\nabla B|}{B} << 1.$$

Pri zadanim parametrima

$$\frac{|\nabla B|}{B} \approx \frac{1}{R_z} \approx 2 \cdot 10^{-9} cm^{-1},$$

i uslov adijabatičnosti je ispunjen.

4. Primena plazme

4.1 Neka je odnos naseljenosti N_2 / N_1 dvaju nivoa, koji se nalaze u termodinamičkoj ravnoteži na temperaturi $T = 300K$, jednak $1/e$. Izračunati frekvenciju zračenja ν, koje odgovara prelazu između tih nivoa. Kojoj oblasti elektromagnetskog spektra pripada zračenje sa takvom učestanošću?

Rešenje: Ako se sistem nalazi u termodinamičkoj ravnoteži, tada je raspodela atoma po energetskim nivoima data Bolcmanovom formulom

$$N_2 / N_1 = \exp[-(E_2 - E_1)/kT],$$

Tada je prema uslovu zadatka

$$E_2 - E_1 = kT = 4{,}14 \cdot 10^{-21} J.$$

Konačno

$$\boxed{\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = 6{,}25 \cdot 10^{12} Hz.}$$

To zračenje odgovara infracrvenoj oblasti spektra.

4.2 Laserski rezonator se sastoji od dva ogledala sa koeficijentima refleksije $R_2 = 1$ i $R_2 = 0{,}5$. Dužina aktivne sredine je $l = 7{,}5cm$, a presek laserskog prelaza je $\sigma = 3{,}5 \cdot 10^{-19} cm^2$. Izračunati prag inverzije naseljenosti.

Rešenje: Iz formule praga inverzne naseljenosti za ostvarenje laserske generacije

$$(N_2 - N_1)_{kr} = -\ln(R_1 R_2)/(2\sigma l),$$

sledi

$$\boxed{(N_2 - N_1)_{kr} \approx 2{,}8 \cdot 10^{17}\, cm^{-3}.}$$