UCG
Univerzitet Crne Gore

Biblioteka
PRIRODNO-MATEMATIČKIH NAUKA

Prof. dr Veselin Mićanović
DIFERENCIRANI PRISTUP REALIZACIJI JEDNAČINA
U PETOM RAZREDU OSNOVNE ŠKOLE
Prvo izdanje

Izdavač
Univerzitet Crne Gore
Cetinjska br. 2, Podgorica
www.ucg.ac.me

Za izdavača
Prof. dr Danilo Nikolić, rektor

Glavni i odgovorni urednik
Prof. dr Stevo Popović

Urednik biblioteke
Docent dr Anđelka Šćepanović

Recenzije
Prof. dr Dragoslav Herceg
Docent dr Nenad Vulović

Lektura
Docent dr Milodarka Tepavčević,
Docent dr Dijana Vučković

Grafičko oblikovanje
Dalibor Vukotić

Štampa
Art-Grafika, Nikšić

Tiraž
300 primjeraka

Objavljivanje ove univerzitetske publikacije odobrio je Senat Univerziteta Crne Gore
odlukom br. 03-370/6 od 21. marta 2019. godine.

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISBN
COBISS.CG-ID

Univerzitet Crne Gore

Veselin Mićanović

DIFERENCIRANI PRISTUP REALIZACIJI JEDNAČINA U PETOM RAZREDU OSNOVNE ŠKOLE

Podgorica, 2020.

SADRŽAJ

III EMPIRIJSKI DIO

I UVOD

Matematika je nauka nastala iz realnosti, što znači da su prvi matematički pojmovi neodvojivi od realnog svijeta. Mnoge prirodne nauke razvile su se primjenom matematičkih saznanja. Primjena matematike u prirodnim naukama je velika, ali polje primjene matematičkih saznanja se stalno širi, tako da u poslednje vrijeme društvene i humane nauke sve više nalaze uporište u matematičkim metodama.

Primjena matematike u svakodnevnom životu uslovila je i njen poseban položaj u vaspitno – obrazovnom sistemu, jer da bi se mogla primjenjivati njena saznanja potrebno je opšte matematičko obrazovanje. Ono se stiče savlađivanjem planiranih nastavnih sadržaja za osnovnu i srednju školu. Cilj nastave matematike nije samo ovladavanje osnovnim matematičkim pojmovima, već i razvijanje logičkog mišljenja učenika i njegovih ukupnih intelektualnih sposobnosti, a zadatak nastave matematike je da podstiče i razvija sposobnosti posmatranja, opažanja, logičkog, kritičkog, kreativnog i apstraktnog mišljenja učenika, jer bez njih nema kvalitetnog usvajanja matematičkih sadržaja.

Prenošenje znanja u nastavi matematike je metodički razrađeno. Učenje u XXI vijeku odvija se u promjenljivom i u pogledu tehnologije, ispunjenijem okruženju, tako da ključne karakteristike ovog okruženja uključuju pristup obiljem informacija, povećan korišćenjem savremenih tehnologija (mobilnih uređaja za učenje, online aplikacija i alata društvenih medija), što povećava kapacitet za saradnju učenika (Yang & Wu, 2012). Takođe, savremene transformacije u svim sferama ljudskog rada učinile su i nastavu matematike fleksibilnijom i primjerenijom individualnim učeničkim sposobnostima. Monografija ”Diferencirani pristup realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike” nalazi svoje naučno uporište u savremenim istraživanjima pristupa realizaciji matematičkih sadržaja, koji podrazumevaju uvažavanje individualnih i grupnih razlika među učenicima i istovremeno razrađuje različite mogućnosti za razvijanje optimalnih matematičkih sposobnosti za njihovo rješavanje.

”Osim diferencijacije programskih sadržina i zahteva po složenosti poimanja i logičkog razumevanja, uslovno rečeno po težini, izuzetno je značajno i diferenciranje zahteva za upamćivanje prema značaju za napredovanje u učenju i aktualizaciju usvojenih znanja i umenja. U početnoj nastavi učenici, napredujući, postepeno automatizuju osnovne procese i na taj način memorišu tablice, algoritme, relacije, pravila i sl." (Petrović, 1997: 114)

Krajem XX vijeka došlo je do značajnih promena u razumijevanju prirode efikasnog učenja, transformisana su tradicionalna gledišta o transmisiji znanja, tako da su novija istraživanja osporila tradicionalne stavove i istakla značaj novog stila učenja vezanog za učenje koncepata (unos znanja, stimulisanje obrazovanja i saradnje) (Boyle, Duffy, & Dunleavy, 2003). Iako je obrazovanje proces učenja i realizacije nastavnih zadataka, veliki broj teoretičara su na stanovištu da je centralni zadatak nastavnika da obezbijedi metode promovisanja procesa učenja. (Oyeneyin, 1989). Dešava se da nastavnici u tradicionalnoj nastavi planiraju realizaciju nastave matematike prema prosječnim mogućnostima učenika što nije dobro jer se zapostavljaju individualne razlike učenika, njihove mogućnosti i tempo napredovanja. Dakle, uniformnost u procesu sticanja matematičkih znanja i razvijanja matematičkih sposobnosti najčešće dovodi do ozbiljnih poteškoća u napredovanju velikog broja učenika, kako onih koji se nalaze u kategoriji ispodprosječnih tako i onih u kategoriji iznadprosječnih sposobnosti. Znači, učenicima koji sporije napreduju moraju se obezbijediti odgovarajuće olakšice u radu, a onima koji s lakoćom usvajaju ponuđene nastavne sadržaje moraju se povećati nastavni zahtjevi kako bi se izbjegli neželjeni efekti nastavnog procesa, tj. zaostajanje učenika u razvoju. Pošto je riječ o matematičkim sadržajima, onda se to odnosi na nemogućnost praćenja nastave matematike i zaostajanje u razvoju optimalnog matematičkog mišljenja.

Jednačine kao dio algebarskih sadržaja dosta su zastupljene u početnoj nastavi matematike i kao takve pružaju veliku pogodnost za razvoj matematičkog mišljenja. Izbor pomenute teme ima svoju stručnu i naučnu zasnovanost. Sa stručne strane razlozi za izbor teme proizilaze iz problema nemogućnosti adekvatnog usvajanja sadržaja o jednačinama od strane svih učenika. Sadržaji o jednačinama, planirani prema prosječnom učeniku, veliki broj učenika ne može kvalitetno da usvoji. Zato veći broj učenika se dosađuje na tim časovima, dok jedan broj učenika to s lakoćom i razumijevanjem usvaja. Da toga ne bi bilo potrebno je diferencirati nastavne sadržaje prema nivoima znanja učenika u razredu – odjeljenju.

Naučna utemeljenost ove monografije obuhvata diferenciranje sadržaja o jednačinama koje se mogu od strane skoro svih učenika relativno lako usvojiti. Samo provjeravanje efekata primjene ovog modela nastave ima svoju naučnu dimenziju o čemu smo dali i kritičko mišljenje.

Monografija "Diferencirani pristup realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole" predstavlja iskorak da se, na osnovu istraživanja domaćih i stranih autora o povećavanju individualnih razlika djeteta na školskom uzrastu, izgradi model organizacije nastave matematike na različitim nivoima težine. Monografija predstavlja jedan pokušaj razvijanja, eksperimentalnog provjeravanja i teorijskog zasnivanja modela diferencirane realizacije matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike.

Obrazovni sistemi su zasnovani na standardima i ne bi smjelo da se dešava da iste standarde različito tumače nastavnici i institucije nadležne za njihovu primjenu (Näsström, 2009). Istina matematički sadržaji mogu se učenicima približiti i objasniti na različitim problemskim situacijama, zavisno od nivoa apstraktnih sposobnosti učenika. Proces rješavanja problema polazi od "početnog stanja" i kreće se do "stanja cilja", pri čemu se mora riješiti "barijera" koja sprečava "ulazak u cilj", tj. mora se razriješiti problemska situacija (Klix, 1971:640). Barijera može biti manja ili veća zavisno od kategorije učenika kojoj je zadatak namijenjen. Lakše problemske barijere su samo rutinske prirode i učenici s manjim nivoom znanja mogu je bez posebnih poteškoća uspješno razriješiti, dok teže problemske barijere su namijenjene učenicima sa većim potrebama i nivoima postignuća. Zato je izbor nastavnih zadataka veoma važan za aktivnost učenika i nastavnika (Ni, Zhou, Li, & Li, 2014).

Monografija je utemeljena u početnoj nastavi matematike, gdje je moguće bez posebnih poteškoća primijeniti model diferencijacije i stvoriti osnovu (plodno tlo) za dalji razvoj matematičkog mišljenja svakog pojedinca. Optimalni razvoj svake ličnosti su najviši ciljevi svakog demokratskog društva koje uvažava individualne različitosti.

Nastojali smo da teorijski i praktično ispitamo rezultate primjene modela diferenciranog pristupa realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole. Međutim, diferencirani pristup realizaciji jednačina do danas nije eksplicitno izučavan, pa je u monografiji u prvom, teorijskom, dijelu dat kratak osvrt na istorijski razvoj jednačina i na različite njihove oblike. Posebna pažnja je posvećena pripremi i izradi diferenciranog pristupa realizaciji sadržaja o jednačinama na različitim tipovima časova.

Ovom monografijom smo željeli da damo doprinos novijim proučavanjima savremenih pristupa organizacije i realizacije početne nastave matematike. Utvrđivanje stepena povezanosti diferenciranog rješavanja jednačina sa brojem uspješno riješenih zadataka treba da doprinese unapređivanju ne samo početne, već nastave matematike u cjelini.

Predmet ove monografije je ispitivanje uticaja diferenciranog pristupa realizaciji jednačina na efekte nastavnog procesa, tj. kvalitet i kvantitet znanja koji se izražavaju kroz razumijevanje sadržaja o jednačinama i njihovo efikasno rješavanje. Cilj istraživanja je usmjeren na utvrđivanje načina diferenciranja sadržaja o jednačinama i razrađivanje metodike izrade datog pristupa u početnoj nastavi matematike i ispitivanje njegove efikasnosti u nastavi.

Monografija sadrži sedam djelova:

I) u prvom – uvodnom dijelu su date osnovne postavke teme,
II) u drugom dijelu su navedene teorijske osnove jednačina u početnoj nastavi matematike, teorijsko razmatranje problema savremenog pristupa realizaciji jednačina i objašnjen diferencirani pristup realizaciji jednačina,
III) u trećem – empirijskom dijelu su date osnovne postavke istraživanja: metodologija istraživanja, problem i predmet, cilj i zadaci, hipoteze, metode, algoritam, varijable, tehnike i mjerni instrumrenti, karakteristike uzorka

istraživanja, statistička obrada i interpretacija rezultata; tok istraživanja; rezultate istraživanja i njihova analiza,

IV) u četvrtom dijelu je dat kritički osvrt na eksperimentalno provjeravani model i zaključci istraživanja,

V) u petom dijelu je dat zaključak u kojem su izvedene osnovne konstatacije do kojih se došlo u toku istraživanja,

VI) u šestom dijelu su navedeni prilozi koji su korišćeni tokom pripreme i sprovođenja samog istraživanja,

VII) u sedmom dijelu je dat popis literature koja je korišćena za prikupljanje građe za izradu monografije ”Diferencirani pristup realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole”.

II TEORIJSKI DIO

1. PREGLED DOSADAŠNjIH ISTRAŽIVANjA

Upoređujući programske sadržaje i udžbenike različitih obrazovnih sistema i njihovom analizom dajemo doprinos unapređenju obrazovanja učenika (Li, 2000). U dosadašnjoj stručnoj i naučnoj literaturi iz oblasti početne nastave matematike rijetka su istraživanja na temu diferencijacije početne nastave matematike iako taj didaktički problem zavređuje značajno mjesto u pedagoškoj literaturi domaćih i stranih autora. Može se sa sigurnošću reći da istraživanja na temu ”Diferencirani pristup realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike” nijesu nigde vršena. Za teorijsku osnovu monografije korišćeni su rezultati istraživanja domaćih i stranih autora, o kojima će u daljem radu biti više riječi, koji su se bavili problemom diferencijacije i individualizacije nastave matematike kao i izradom modela diferencirane realizacije drugih, srodnih nastavnih sadržaja.

„Nije tajna da škola često pogubno djeluje na dječje samopoštovanje i da bi u idealnom slučaju škola trebala osigurati okruženje u kojem naši rezultati imaju po samopoštovanje manje negativnih posljedica nego u stvarnom svijetu“ (Bruner, 2000: 50). Diferencirana nastava kao didaktičko – metodički fenomen je jedan od savremenih pokušaja demokratizacije vaspitno – obrazovnog sistema kod nas i u svijetu. Međutim, diferencijacija nije samo savremeni fenomen. Njeni korjeni sežu kroz različite ideje individualizacije kojima su se bavili naši, a i strani autori u prvoj polovini XX vijeka, a i ranije. Analizom brojnih istraživanja mogu se identifikovati ključne kompetencije u održivosti obrazovanja bitne za projektovanje adekvatnih metoda nastave i učenja (Wiek, Withycombe, Redman, 2011). Učenje putem individualizacije ima svoju dugu istoriju, pa je i razumljivo potenciranje činjenice da učenje u nastavi odmjerenoj stvarnim sposobnostima učenika podstiče razvijanje sposobnosti mišljenja individue. Postignuća učenika zavise od kvaliteta udžbenika (Törnroos, 2005), ali i od načina rada u nastavi. Ishodi učenja su povezani sa ukupnim kvalitetom obrazovnog sistema i neposredni su produkti njegove organizacije.

Istina u jugoslovenskoj pedagoškoj literaturi u prvoj polovini XX vijeka imamo malo autora koji su se bavili problemom diferencijacije. Možemo istaći Tkalčića (1934) i Pejhelja (1936) koji su se bavili problematizovanjem i deproblematizovanjem nastave zalažući se za zastupanje problemske nastave u znatno većoj mjeri.

U drugoj polovini XX vijeka pojavljuje se čitava plejada istaknutih pedagoških stručnjaka i didaktičara koji se zalažu za različite varijacije individualizacije nastave nudeći konkretne modele organizovanja takve nastave zasnovane na provjerenim istraživanjima.

Mužić (1957–1964) proučava različite mogućnosti individualizacije nastave. Razrađuje i predlaže nastavne listiće kao izvanrednu mogućnost individualizovanja nastavnog procesa kako u redovnoj tako i u dodatnoj nastavi.

Mori (1959) se bavi individualizovanjem nastave kroz različite forme nastavnog rada. Nudi grupni rad kao dobar model za individualizaciju nastave.

Dotran (1962) proučava individualizovanu nastavu i razmatra različite solucije individualizacije nastavnog procesa.

Markovac (1970) proučava individualne razlike učenika u nastavi. Ukazuje na značajne individualne razlike učenika iste starosne dobi te potrebu organizovanja individualizovane nastave.

Rakić (1970) proučava doprinos motivacije školskom postignuću učenika. Prati nivo motivacije kod učenika različitih sposobnosti i primećuje ambivalentnu akciju nekih personalnih faktora s obzirom na uspjeh učenika. Izučava nivo aspiracije i potrebu za postignućem i određuje ciljeve u odnosu na ono što treba postići. Dolazi do zaključka da individua mora biti zrela, da ima određeni stepen znanja i sposobnosti i emocionalnog raspoloženja da bi gradivo prihvatila.

Đorđević (1972) nudi praktična rješenja individualizacije, u nastavi maternjeg jezika, kroz primjenu nastavnih listića odmjerenih realnim mogućnostima učenika.

Kvaščev (1983) proučava individualni razvoj ličnosti i mogućnosti mijenjanja inteligencije. Ukazuje na činjenicu da sklop osobina ličnosti i sposobnosti u okviru koga se inteligencija manifestuje može ubrzati ili usporiti razvoj inteligencije ličnosti.

Đorđević (1985) daje pregled shvatanja i pokušaja individualizacije u svijetu i kod nas. Proučava filozofsko-antropološke i sociološke osnove individualizacije kao i uslove i mogućnosti za ostvarivanje individualizacije.

Palekčić (1985) se bavi problemom unutrašnje motivacije i školskog učenja. Ukazuje na činjenicu da zanemarivanje individualnih razlika se vrši naglašavanjem značaja spoljašnje stimulacije.

Đurić (1997–1999) sa psihološke strane analizira prirodu i izvor individualnih i grupnih razlika. Te razlike dovodi u vezu sa obrazovnom praksom i ukazuje na njihovu nedovoljnu usklađenost. Ukazuje na važne kriterijume i komponente modelovanja programskih sadržaja, a posebno razmatra mogućnost povećanja kvaliteta i efikasnosti osnovnog obrazovnog kvantuma prilagođavanjem oblika diferencirane nastave individualnim i grupnim karakteristikama učenika.

Petrović (1997 – 2002) izučava model diferencirane nastave matematike kao i oblike, metode i strategiju u diferenciranoj nastavi matematike. Na osnovu utvrđenih didaktičko–metodičkih okvira, za unutrašnju diferencijaciju i individualizaciju, razrađuje metodiku izrade i primjene modela diferencirane nastave matematike. Analizira različite modele zasnovane na modelsko–problemskom pristupu u diferenciranju matematičkih sadržaja. Posebno je afirmisana primjena matematičkog modelovanja i problemske nastave u diferenciranoj realizaciji programskih sadržaja početne nastave matematike.

Pinter (1997 – 2002) se bavi teorijskim osnovama upravljanja diferenciranom i individualizovanom nastavom matematike u nižim razredima osnovne škole. Analizira metode i modele upravljanja diferenciranom i individualizovanom nastavom matematike. Polazeći od teorijskih modela i kibernetskog pristupa razrađuje praktične modele upravljanja diferenciranom i individualizovanom nastavom matematike. Analizira i daje metodički prikaz modela diferenciranog pristupa rješavanju problema.

Ceh (Zech) (1999) daje integraciju mnogih relevantnih teorijskih elemenata iz novije literature. Akcenat stavlja na usvajanje matematičkih pojmova, pravila i postupaka rješavanjem problema utvrđujući osnovna načela za njihovo prenošenje. Razmatra uslove za organizaciju nastave matematike, daje taksonomiju i operacionalizaciju ciljeva nastave matematike. Analizira razvoj matematičkog mišljenja i tipove učenja, naročito učenja sa razumijevanjem. Izučava faze učenja u rješavanju problema i daje praktična uputstva za učenje kod rješavanja problema primjenom heurističkih strategija u malim grupama.

Pored pomenutih, postoje i drugi autori koji su se indirektno ili u manjoj mjeri bavili ovom problematikom, a koji su svakako dali svoj doprinos osavremenjivanju nastavnog procesa. Neki od njih su citirani u daljem radu ove monografije.

2. ISTORIJSKI RAZVOJ JEDNAČINA

Matematika je prirodna nauka nastala iz realnosti, što znači da su matematički pojmovi neodvojivi od realnog svijeta. Otuda i jednačine, kao dio algebarskih sadržaja, sežu u daleku prošlost. Naime, ljudi su skoro od svog nastanka bili prinuđeni da se bave jednačinama. Iako se sa preciznošću ne može utvrditi kada su ljudi počeli da izučavaju jednačine (da se bave njima), ipak u rukopisima koji potiču iz drevnih civilizacija (Egipta i Vavilona) nalazimo jedan viši stepen razvoja jednačina. Da su Egipćani dobro vladali pojmom nepoznate veličine, za koju su imali poseban znak i poseban naziv, potvrđuje jedan od najstarijih matematičkih rukopisa, Ahmesova računica (1700. g. p. n. e.).

Još prije Egipćana, Vavilonci su imali potrebu za rješavanjem linearnih jednačina zbog rješavanja nekih praktičnih zadataka o podjeli površine. Tako su Egipćani prihvatili njihovo iskustvo i za rješavanje svake jednačine imali specijalan postupak.

Razvoj jednačina u Grčkoj imao je nešto drugačiji pristup. Naime, Grci su upotrebljavali čisto geometrijsku metodu pri rješavanju jednačine. Uglavnom su se služili proporcijom pošto su nju mogli geometrijski riješiti. Jednačine u Grčkoj algebri dostižu procvat u Diofantovom djelu ”Aritmetika”. Diofant je, inače, među prvim matematičarima koji je dao veći doprinos čisto algebarskom rješavanju jednačina, jer je među prvima uočio pojedine važne momente u transformisanju jednačina. U njegovom djelu predstavljeno je i rješavanje jednačina prvog stepena sa više nepoznatih (Diofantova neodređena jednačina).

Najverovatnije od Grka, osnovne pojmove o linearnoj jednačini, prihvataju Indusi, a preko njih Arabljani upoznaju najpoznatija djela grčkih matematičara. Oni su doprinijeli utvrđivanju opštih pravila za rješavanje jednačina prvog stepena, a uz to su počeli da upotrebljavaju negativne i iracionalne brojeve. Tako je nastalo i najvažnije arabljansko djelo ”Algebra” (oko 820. god. nove ere) čiji je autor Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. U ovom djelu obje Diofantove transformacije nazivaju se jednim imenom ”Al – džebr u’ al mukabal”, odakle je i potekao naziv ”algebra”.

Egipćani su se bavili i sistemom linearnih jednačina. Sistem jednačina, u današnjem shvatanju, prvi put nalazimo kod Diofanta. On je klasifikovao jednačine prema broju članova, a ne prema stepenu. On je obično vještom tehnikom svodio takve zadatke na rešavanje jednačina sa jednom nepoznatom.

O razvoju sistema jednačina kod Indusa ostalo je vrlo malo pouzdanih podataka, ali su zato Arabljani u tom pravcu dosta uznapredovali. Arabljanin Alhvarizmi je znatno savremenijim načinom rješavao sisteme jednačina.

Veoma malo podataka o rješavanju sistema jednačina u evropskim zemljama imamo do početka XV veka.

Značajan doprinos rješavanju sistema jednačina dao je italijanski matematičar Kardano (XVI vek) otkrivajući opšte metode za njihovo rješavanje. Bilo je i drugih pokušaja, ali sadašnju metodu jednakih koeficijenata i metodu supstitucije uvode tek Lajbnic i Njutn.

Što se tiče razvoja kvadratnih jednačina, one su bile poznate još u staroj Grčkoj. U istoriji matematike, Euklid je dao prvi primjer geometrijskog rješavanja kvadratne jednačine, dok je Heron iz Aleksandrije (I vijek nove ere) rješavao kvadratne jednačine u brojevima. U već pomenutom Diofantovom djelu ”Aritmetici” nalazimo dosta riješenih primjera kvadratnih jednačina. I Arabljani su još u IX vijeku proučavali jednačine drugog stepena i dali opšta pravila za njihovo rješavanje.

Čuveni francuski matematičar Viet svojim dobro poznatim zakonom o odnosu korijena i koeficijenta omogućio je jednu dublju analizu rješenja kvadratne jednačine.

Kad je ijeć o razvoju kvadratne jednačine bitno je napomenuti njeno različito pisanje u pojedinim periodima. Stari Grci, Indusi i Arabljani u prvobitnom obliku kvadratnu jednačinu izračunavaju u vidu rečenice. Na primer kvadratnu jednačinu $x^2 + 4 * x = 45$ pisali su u obliku rečenice: ”Jedan kvadrat i četiri korijena jednaki su broju 45”. Međutim, kasnije se uvode izvjesne skraćenice u pisanju kvadratne jednačine, da bi se tek u XVIII vijeku došlo do savremene algebarske simbolike.

Iako su savladane jednačine drugog stepena, jednačine trećeg i četvrtog stepena dugo su smatrane neprebrodivom teškoćom. Međutim, italijanski matematičari XVI vijeka Fontana, Kardano, Tartalja i Ferari pronašli su metode za njihovo rješavanje. Kardanovo rješenje je dato u obliku pravila iskazanog riječima. Viet je izvršio uvođenje slova i tako izgradivši osnovnu algebarsku simboliku dao veliki doprinos razvoju algebre.

3. MJESTO I ULOGA JEDNAČINA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Jednačine su jednakosti koje postaju numeričke jednakosti kada se u njima izvjesna slova nazvana nepoznatim zamijene numeričkim vrijednostima. "Sadržaji o jednačinama zauzimaju veoma značajno mesto u početnoj nastavi matematike" (Radojević – Radojević, 1984:189).

Nastavnim planom i programom za osnovnu školu posvećeno je dosta pažnje izučavanju sadržina o jednačinama kao značajnoj oblasti u početnoj nastavi matematike. Istina novijim izmenama nastavnih planova i programa, a u skladu sa novijom reformom u našem obrazovnom sistemu, sadržine s jednačinama su izostavljene u prvom i drugom razredu.

Međutim, učenici već u prvom razredu početne nastave matematike se upoznaju sa nepoznatim brojem (sabirkom, umanjenikom, umanjiocem), ali ne u formi nepoznate obilježene slovom, kako se to obično obilježava i određuje u jednačinama. Na ovom uzrastu, prvog i drugog razreda, nepoznati broj (nepoznata) se pojmovno počinje uvoditi još pomoću tzv. držača brojeva (kvadratić □ , kružić ○ , linija __). Učenička znanja se proširuju u trećem razredu gde se rješavaju najprostiji oblici jednačina, da bi se u četvrtom i petom razredu ta znanja upotpunila rješavanjem složenijih oblika jednačina. U početku učenici rješavaju jednačine pomoću tzv. pomoćnih zadataka, odnosno kao jednakost kojoj nedostaje određeni broj koji treba staviti umjesto nepoznatog broja (x), a provjeravaju tačnost rješenja primjenom svojstva aritmetičkih operacija. U četvrtom i petom razredu jednačine se realizuju kroz rješavanje raznovrsnih zadataka, što nastavu matematike, a naročito ovu oblast čini interesantnom za učenike.

Savremena metodika nastave matematike ističe ovu oblast kao veoma važnu poklanjajući veću pažnju izučavanju ovih sadržaja u cilju njihovog što pravilnijeg prezentovanja i približavanja učeničkim kognitivnim sposobnostima. Metodičari ističu da je sastavljanje jednačina mnogo bitnije od samog njihovog rješavanja. Kroz realizaciju sadržaja o jednačinama učenici treba da upoznaju pojam jednačine, da pravilno nauče postupke rješavanja i provjeravanja tačnosti rješenja, a zatim da, kao najviši nivo primjenjivosti znanja, samostalno rješavaju zadatke pomoću sastavljanja jednačina. Jednostavnost provjeravanja rješenja, mogućnost samostalnog utvrđivanja tačnosti postupka rješavanja jednačina čini jednačine veoma pogodnim za diferenciran i individualizovan rad.

3.1. POJAM JEDNAKOSTI I NEPOZNATE

Algebarske sadržaje razmatramo kroz četiri tematske cjeline koje su koncentrično raspoređene kroz početnu nastavu matematike u prvom i drugom ciklusu osnovne škole, a to su:

- promjenljiva,
- funkcija,
- jednačine i
- nejednačine.

Da bi uspješno realizovali algebarske sadržaje moramo imati u vidu činjenicu da je pripremni period primaran. Taj period obuhvata nekoliko cjelina: skup; znaci računskih operacija + i – ; znaci <, >, =; računske operacije: sabiranje i oduzimanje u prvom i drugom, odnosno množenje i deljenje u trećem razredu. Znači u pripremnom periodu učenici stiču elementarnu matematičku pismenost neophodnu za uspješno izučavanje elemenata algebre.

Prilikom sabiranja i oduzimanja potrebno je učenike navikavati da pravilno čitaju zapise sa znakom "+", "–" i "=", kao i da imenuju brojeve u zbiru i razlici, jer će se kasnije često sretati sa izrazima: sabirak, umanjenik, umanjilac, zbir, razlika itd.

Primjer 1:

$$\underbrace{5 + 4}_{\textbf{sabirci}} = \underbrace{9}_{\textbf{zbir}} \quad | \quad \textbf{jednakost}$$

5 → sabirak
4 → sabirak
9 → zbir

Zapis **5** + **4** je, takođe, zbir.
Čitav zapis **5** + **4** = **9** predstavlja jednu jednakost.

Analogno sabiranju kod oduzimanja imamo sljedeće:

$$\underset{\textbf{umanjenik}}{\underset{\downarrow}{8}} - \underset{\textbf{umanjilac}}{\underset{\downarrow}{3}} = \underset{\textbf{razlika}}{\underset{\downarrow}{5}} \quad | \rightarrow \textbf{jednakost}$$

8 → umanjenik
3 → umanjilac
5 → razlika

Zapis **8** – **3** je, takođe, razlika.
Čitav zapis **8** – **3** = **5** predstavlja jednakost.

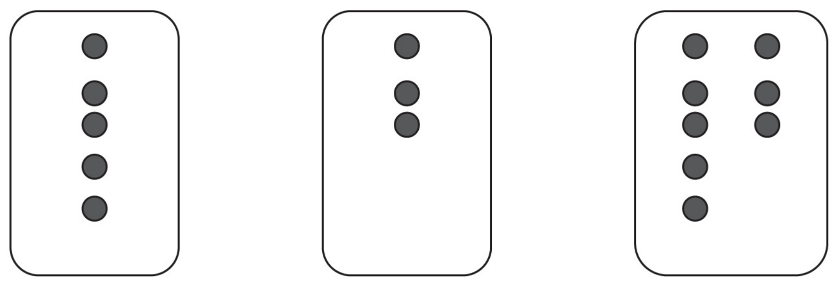
Dakle, za shvatanje pojma jednakosti polazi se od zbira i razlike dva broja, npr.:

<u>zbirovi</u>		**<u>razlike</u>**
7 + 2 = 9	**jednakosti**	9 – 6 = 3
8 + 9 = 17		13 – 8 = 5

Nakon ispitivanja više jednakosti učenici imenuju znakove "+", "–" i "=". Zatim uz pomoć učitelja dolaze do saznanja da se matematički zapis sa znakom "=" zove **jednakost**.

Neophodno je da učenici uoče i shvate da svaka jednakost ima lijevu i desnu stranu jednakosti. Učenici će to najbolje shvatiti, ako se grafički (pomoću skupova) predstavi jedna jednakost i na njoj objasni lijeva i desna strana jednakosti.

Primjer 2:



$$\underbrace{5 \quad + \quad 3}_{\textbf{lijeva strana}} \quad = \quad \underbrace{8}_{\textbf{desna strana}}$$

Ako umjesto grafičkog prikaza upotrebimo samo brojevni prikaz dobijamo sljedeći zapis:

$$\overbrace{\underbrace{5 + 3}_{\textbf{lijeva strana}} = \underbrace{8}_{\textbf{desna strana}}}^{\textbf{jednakost}}$$

Učenici će pažljivim posmatranjem grafički prikazane jednakosti i brojeći elemente skupova doći do zaključka da su lijeva i desna strana jednakosti jednakobrojne. Pravilno shvatanje odnosa lijeve i desne strane jednakosti je neophodno za kasniju provjeru tačnosti rješenja jednačine. Zato je potrebno izvjesno vrijeme posvetiti kako uvježbavanju pisanja jednakosti tako i označavanju njihovih lijevih, odnosno desnih strana.

Sa pojmom nepoznatog broja učenici se upoznaju već u prvom i drugom razredu, dok pojam jednačine usvajaju u trećem razredu osnovne škole. Kod njih se "postupno izgrađuje predstava o promjenljivoj pri čemu slovo nastupa u svojstvu simbola promjenljive" (Lipovac i dr., 1991:70). Promjenljivu ili nepoznatu veličinu učenici shvataju kao zamjenu nekog člana skupa i identifikuju je sa simbolom koji ga zamjenjuje.

Već u prvom razredu koriste se zapisi sa praznom crticom, praznim kvadratićem ili praznim kružićem umjesto slovne oznake za nepoznatu. Tako se sretamo sa zadacima tipa:

Primjer 3: U prazna polja upiši odgovarajuće brojeve.

8 + __ = 9	10 − ◯ = 8
◯ + 4 = 7	__ − 4 = 5
3 + 9 = □	11 − 5 = □

Pojava nepoznatog broja često se javlja u prostim izrazima: zbiru, razlici, proizvodu i količniku dva broja. Učenike je potrebno osposobiti ne samo da pravilno zapisuju izraze koji u sebi sadrže nepoznati broj, već i da pravilno čitaju takve zapise.

Primjer 4:

$x + 5$ → zbir nepoznatog broja i broja 5;
$x - 7$ → razlika nepoznatog broja i broja 7;
$6 - x$ → razlika broja 6 i nepoznatog broja;
$x \cdot 5$ → proizvod nepoznatog broja i broja 5;
$x : 3$ → količnik nepoznatog broja i broja 3;
$9 : x$ → količnik broja 9 i nepoznatog broja.

Na ovakvim primjerima potrebno je pravilno imenovati nepoznati broj, tj. utvrditi da li je riječ o: nepoznatom sabirku, nepoznatom umanjeniku, nepoznatom umanjiocu, nepoznatom činiocu, nepoznatom djeljeniku ili nepoznatom djeliocu.

3.2. SLOVO U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Slovo se u svojstvu matematičkog znaka, za označavanje nepoznatog broja, najavljuje već u prvom razredu. Učenici već u prvom razredu u prvoj desetici koriste zapise sa praznom crticom (__), praznim kvadratićem (□) ili praznim kružićem (◯) što služi kao zamjena za buduću nepoznatu. Zadatak je učenika da na praznoj crtici, u praznom kvadratiću ili praznom kružiću upisuju one brojeve koji se traže u zadatku vodeći računa da dobijena jednakost bude tačna. Znači nepoznata se simbolički i pojmovno uvodi u skup jednocifrenih brojeva već u prvom razredu osnovne škole. Zato se ubrzo prikazivanje promjenljive pomoću praznih figura zamjenjuje slovima.

Slovo se kao oznaka za ”izostavljene brojeve” u početnoj nastavi matematike javlja, uvažavajući prije svega psihološke razlike, u sljedećim ulogama:

1. Slovo u ulozi nepoznate kada označava jedan broj, koji je skriven nekim datim uslovom, npr.: ”x” u jednačini $x + 2 = 9$;
2. Slovo u ulozi promjenljive, kada ne označava samo jedan već više različitih brojeva određenih nekim uslovom, kao npr.: ” x ” u nejednačini $x + 2 < 9$, gdje x može uzeti vrijednost bilo kojeg od brojeva 0, 1, ..., 6, jer će za tu vrijednost dati uslov nejednakosti biti zadovoljen;

3. Slovo u ulozi neuslovljene (slobodne) promjenljive, kada označava proizvoljni (bilo koji) broj u okviru jednog brojevnog bloka ili proširenog skupa prirodnih brojeva koji uključuje nulu (N_O). Na primjer u toj ulozi su slova ”a” i ”b” u formulama a+b=b+a, a+(b+c)=(a+b)+c kojim iskazujemo komutativni, odnosno asocijativni zakon ili slično.

Najčešće se, mada ne mora da se uzme za pravilo, iks (”x”) uzima kao slovo za označavanje nepoznate u početnoj nastavi matematike, ali se često upotrebljavaju i druga slova. Dakle, umjesto do tada korišćenih simbola (crtica, kvadratića i kružića), tzv. držača brojeva, počinje da se koristi slovo za označavanje nepoznatog broja. Tako se, na primjer, jednakost data u obliku: 6 + ___ = 14, zamjenjuje sljedećim zapisom:
6 + x = 14.

Dakle, zadaci kao što su na primjer: U kvadratić (krug ili na liniju) upiši odgovarajuće brojeva:

$$\square + 8 = 12$$
$$14 - \bigcirc = 7$$
$$\underline{\quad\quad} \cdot 3 = 15$$

nijesu ništa drugo nego najprostiji tipovi jednačina i njih učenici efikasno rješavaju u početnoj nastavi matematike. Međutim, postoji i takvo mišljenje koje ne dovodi ni u kakvu vezu tzv. držače mjesta (kvadratiće, kružiće, linije) sa oznakom za nepoznati broj smatrajući da je to samo mjesto gde traženi broj treba upisati.

3.3. OPŠTI POJMOVI O JEDNAČINAMA

Budući da sadržaji o jednačinama zauzimaju veoma značajno mjesto u početnoj nastavi matematike, kroz realizaciju ovih sadržaja učenike upoznajemo sa pojmom jednačine, načinom njenog rješavanja i postupkom proveravanja tačnosti rješenja. Učenike na taj način osposobljavamo da usvojeni postupci rješavanja i provjeravanja tačnosti rješenja postanu njihova trajna navika. Mogućnost samostalnog sastavljanja jednačine, kao i jednostavnost provjeravanja njenog rješenja predstavlja posebnu pogodnost za individualni rad učenika.

S obzirom da je tema ove monografije bazirana isključivo na jednačine u početnoj nastavi matematike, tj. najprostije oblike linearnih jednačina, to se nećemo baviti nekim složenijim linearnim jednačinama kao ni kvadratnim, eksponencijalnim, diferencijalnim i drugim oblicima jednačina.

Po tradicionalnom nastavnom programu jednačine su se pojmovno počinjale da uvode i obrađuju već u prvom razredu osnovne škole. Novijim izmenama nastavnog plana i programa za osnovno obrazovanje jednačine su povučene iz prvog razreda. Međutim, učenicima se pojam nepoznate nagoveštava upotrebom zapisa sa držačima brojeva ($\square$, $\bigcirc$, __). Tako se u prvom i drugom razredu nepoznati sabirak, umanjenik ili umanjilac simbolički i pojmovno uvodi i objašnjava prvo na skupu jednocifrenih, a zatim dvocifrenih brojeva. Kada učenici savladaju ovakav način određivanja nepoznatog broja (sabirka, umanjenika i umanjioca) onda ne predstavlja veliki problem za učenike ni kada se umjesto praznog polja javi slovo. U svojstvu matematičkog znaka za označavanje nepoznatog broja može se uzeti bilo koje slovo, ali po ”tradiciji” to je najčešće x – ”iks”. Za pripremu realizacije jednakosti u kojoj se slovo javlja umjesto nepoznatog broja najvažnije je učenike naučiti da:

- ”x” (ili neko drugo slovo) u matematičkim izrazima označava nepoznati broj i
- da upotrebljavaju slova (”x” ili neko drugo) za označavanje nepoznatog broja.

Prva i uspješna pojmovna realizacija jednačina vrši se u drugoj desetici. Nakon obnavljanja pojma jednakosti, prelazi se na ”jednakost” sa jednom nepoznatom komponentom u zadacima gde se pojavljuje zbir i razlika.

Primjer 1:

$$x + 9 = 17 \qquad 6 + x = 14$$
$$x - 7 = 6 \qquad 17 - x = 6$$

Iz ovakvih i sličnih primjera učenici uočavaju pojavu nepoznatog sabirka, umanjenika ili umanjioca. Zadatke treba davati u tekstualnom obliku čiji je cilj da pobudi maštu i intelektualnu radoznalost učenika kao bitne faktore razvoja matematičkog mišljenja.

Neophodno je pomenuti još i to da se u početnoj nastavi matematike učenicima nastoji što podrobnije objasniti postupak rješavanja jedne jednačine. Taj postupak obuhvata zapisivanje jednačine, rješavanje jednačine do konačnog zapisivanja njenog rješenja i na kraju veoma bitan postupak provjeravanja tačnosti rješenja. Cilj ovakvog postupka rada je da učenici shvate da određivanjem (izračunavanjem) rješenja jednačine nije završen postupak njenog rješavanja sve dok ne provjerimo tačnost dobijenog rješenja.

Metodički postupak realizaciji jednačina sadrži sljedeće etape:

- shvatanje pojma jednačine,
- uočavanje nepoznate u jednačini,
- zapisivanje rješenja jednačine,
- provjeravanje tačnosti rješenja,
- sastavljanje tekstualnih zadataka na osnovu napisane jednačine,
- sastavljanje jednačine iz tekstualnog zadatka i njeno rješavanje,
- samostalno sastavljanje jednačina.

Iz navedenog metodičkog postupka realizacije jednačina vidimo da je sastavljanje jednačina složen – kompleksan proces do koga se dolazi postupnim uvježbavanjem prethodno navedenih etapa. Dakle, pravilno sastavljanje jednačina je daleko važniji postupak od samog njihovog rješavanja. ”Kad to sastavljanje ide bez teškoće većini u razredu, znak je da smo naš zadatak razvijanja ideje o promenljivoj uspešno ostvarili” (Marjanović, 1996:73). Ako učenik zna pravilno da sastavi jednačinu ”sigurno” će znati i da je pravilno riješi.

Sastavljanje jednačine prolazi kroz tri faze:
I) izdvajanje (uočavanje) nepoznate;
II) sastavljanje izraza sa njom i
III) jednačenje.
Sastavljanje jednačina na ovakav način ilustrovaćemo sljedećim primjerom:

Primjer 2: Miloš je kupio nekoliko klikera. Kada je sestri dao 8 klikera, njemu je ostalo 11. Koliko je Miloš kupio klikera?

I faza (uočavanje nepoznate): Miloš je kupio x klikera,
II faza (sastavljanje izraza): Ostalo mu je x – 8 klikera, a to je 11
III faza (jednačenje): $x - 8 = 11$

Rješavanjem jednačina upoznajemo učenike i sa postupkom provjeravanja rješenja. Taj postupak se odvija tako što zamjenjujemo nepoznatu nađenom vrijednošću, a zatim izračunavamo vrijednost izraza i upoređujemo ga sa vrijednošću koja je data u jednačini.

U praksi se za realizaciju jednačina primjenjuju dva postupka:
1) postupak pomoćnog zadatka i
2) postupak rješavanja primjenom operacija suprotnih operacijama naznačenim u jednačinama.

Zavisno od vrste zadatka, tj. broja aritmetičkih operacija zastupljenih u jednačinama razlikujemo:
- jednačine sa prostim izrazima i
- jednačine sa složenim izrazima.

3.4. JEDNAČINE SA PROSTIM IZRAZOM

Jednačine sa prostim izrazima, tj. jednom operacijom, bar oni najjednostavniji oblici, ne predstavljaju neki teži problem za razumijevanje i usvajanje od strane učenika. ”Učenici ih veoma uspešno rešavaju na osnovu izgrađenih pojmova” (Prvanović, 1994:123). Riječ je o jednačinama koje se uspješno mogu obrađivati neposredno poslije usvojenih računskih radnji sabiranja i oduzimanja.

Dakle, riječ je o jednačinama sa:
- nepoznatim sabirkom $x + a = b$
- nepoznatim umanjenikom $x - a = b$
- nepoznatim umanjiocem $a - x = b$

Takođe, isti je slučaj i sa jednačinama koje se obrađuju tek poslije usvojenih računskih radnji množenja i dijeljenja, tj. jednačinama sa:
- nepoznatim činiocem $x \cdot a = b$
- nepoznatim djeljenikom $x : a = b \ (a \neq 0)$
- nepoznatim djeliocem $a : x = b$

Iz navedenih oblika jednačina sa prostim izrazima uočavamo šta sve može figurisati kao nepoznata u njoj. To može biti:

- nepoznati sabirak,
- nepoznati umanjenik,
- nepoznati umanjilac,
- nepoznati činilac,
- nepoznati djeljenik i
- nepoznati djelilac.

Rješenja ovih jednačina nalazimo koristeći svojstva aritmetičkih operacija, a pri tome uvažavajući veze i odnose koji postoje između rezultata operacija i samih komponenata koje ulaze u operaciju. Prvi zadaci se odnose na pronalaženje nepoznatog broja u zapisu koji predstavlja jednačinu.

Primjer 1: U prazno polje upiši izostavljene brojeve.

1) $6 + \bigcirc = 10$ 2) $\bigcirc + 9 = 11$

3) $\bigcirc - 4 = 5$ 4) $13 - \bigcirc = 8$

Učenici vizuelno sagledavaju zapise, a zatim shvataju da u zadatku pored zbira i razlike može biti nepoznat i sabirak, umanjenik ili umanjilac. Kako u matematici nepoznati broj označavamo slovom, najčešće sa x – ”iks”, učenici će navedene primjere u sljedećim situacijama zapisivati u obliku:

1) $6 + x = 10$ 2) $x + 9 = 11$

3) $x - 4 = 5$ 4) $13 - x = 8$

Učenici samostalno dolaze do zaključka da je jednačina obična, njima već poznata jednakost sa nepoznatim brojem koji se označava slovom, a riješiti jednačinu znači odrediti taj nepoznati broj. Učenici će, u daljem postupku realizacije jednačina ovoga tipa, pod rukovodstvom učitelja uvježbavati zapisivanje jednačina i pravilno čitanje njihovog zapisa. Tako će učenici dati zapis $6 + x = 10$ čitati na sljedeći način: ”Koji broj treba dodati broju 6 da se dobije 10?” ili ”Koliki je drugi sabirak ako je prvi 6 i zbir 10?” i sl.

Dobro shvaćen postupak rješavanja jednačina sa nepoznatim sabirkom je ”kamen temeljac” za uspješno rješavanje jednačina sa drugim operacijama, naročito jednačina sa oduzimanjem.

U drugom razredu učenici proširuju stečena znanja vezana za računske operacije sabiranja i oduzimanja, a istovremeno se upoznaju sa množenjem i dijeljenjem. Pošto se realizuje množenje i dijeljenje i dobro uvježbaju pomenute računske operacije prelazi se na rješavanje jednačina pomoću tih operacija. Riječ je o jednačinama sa nepoznatim činiocem, djeljenikom ili djeliocem.

U postupku realizacije jednačina sa prostim izrazima koristimo se pomoćnim zadacima, kako bi učenici lakše shvatili način njihovog rješavanja. Zatim slijedi postupak rješavanja jednačina bez tzv. pomoćnih zadataka.

Jednačine sa prostim izrazima možemo svrstati u dvije podgrupe:
- jednačine sa sabiranjem i oduzimanjem i
- jednačine sa množenjem i dijeljenjem.

3.4.1. Jednačine sa sabiranjem i oduzimanjem

Već smo rekli da se saglasno važnosti i značaju jednačina u nastavi matematike, ovi sadržaji učenicima prezentuju (obrađuju) u najnižim razredima početne nastave matematike. Ranije, prema tradicionalnom planu, su se ovi sadržaji obrađivali u prvom, a sada u trećem razredu osnovne škole. Riječ je o najjednostavnijim oblicima jednačina, tzv. jednačinama sa jednom operacijom oblika:

$\mathbf{x + a = b}$ ili $\mathbf{a + x = b}$
$\mathbf{x - a = b}$ i
$\mathbf{a - x = b}$.

Iako se čini da se radi o veoma prostim jednačinama one su ipak za uzrast učenika kome su namijenjene (treći razred) dosta kompleksne pa im stoga treba posvetiti veću pažnju i detaljno ih objasniti kako bi ih učenici što bolje razumjeli i usvojili.

Prvi korak u izučavanju jednačina je priprema učenika za realizaciju ovih sadržaja. Ovaj pripremni period sadrži rad sa brojevnim jednakostima. Najprije je potrebno da učenici saznaju kako se obilježava nepoznati broj. Oni se tu susreću sa upotrebom slova kao oznake za nepoznati broj. Na taj način počinjemo sa pripremnom fazom realizacije jednačina.

Učenici se, dakle, već u prvom susretu s jednakostima koje sadrže nepoznati broj (slovo) upoznaju sa osnovnim pojmovima jednačina i to:
- jednačina sa nepoznatim sabirkom,
- jednačina sa nepoznatim umanjenikom i
- jednačina sa nepoznatim umanjiocem.

Rješavanje ovih jednačina započinje postupkom pomoćnog zadatka, a zatim se uvježbava postupak rješavanja primjenom operacija suprotnih operacijama naznačenim u jednačini.

3.4.1.1. Jednačine sa nepoznatim sabirkom

Neposredno prije realizacije jednačina sa nepoznatim sabirkom neophodno je sa učenicima obnoviti osnovne pojmove o jednakosti, sabircima, zbiru i nepoznatom broju. Rješavanje jednačina oblika $x + a = b$, odnosno jednačina $a + x = b$ započinje postupkom pomoćnog zadatka. Tako se kod učenika razvija sposobnost brzog pronalaženja nepoznatog broja u zapisu koji predstavlja jednačinu. Svrha ovog postupka je u tome da ”učenik vizuelno sagleda zapis, imenuje ga, uoči nepoznatu i postupkom pomoćnog zadatka analitički je pronađe” (Goranović, 1995:70).

Primjer 1: Riješi jednačinu x + 7 = 10
Rješenje: x + 7 = 10 → Postavljamo pomoćni zadatak:
3 + 7 = 10 Rastavi broj 10 na dva sabirka tako da drugi sabirak bude 7.
x = 3
Objašnjenje: Učenik razmišlja koja je vrijednost prvog sabirka koji sabran sa vrijednošću drugog sabirka (7) daje ukupnu vrijednost (zbir) 10.
Zatim nalazi da je taj sabirak 3 i zapisuje:
3 + 7 = 10
Zatim upoređujući istoimene elemente jednačine i jednakosti pronalazi nepoznati sabirak:
10 = 10 → zbirovi
7 = 7 → drugi sabirci
x = 3 → prvi sabirci
Rješenje: x = 3

Suština ovakvog postupka je u tome da iz jednakosti zbirova (10 = 10) i drugih sabiraka (7 = 7) slijedi jednakost prvih sabiraka (x = 3) na osnovu čega se određuje i vrijednost nepoznatog sabirka (x).

Analogno prethodnom primjeru koristeći, takođe, postupak pomoćnog zadatka rješava se i jednačina tipa a + x = b u kojoj je nepoznat drugi sabirak.

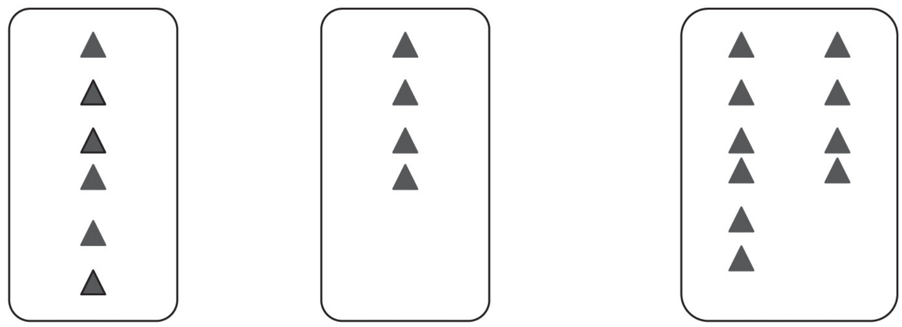
Primjer 2: Riješi jednačinu 8 + x = 17
Rješenje: 8 + x = 17 → ***Pomoćni zadatak***: Broj 17 rastavi na dva sabirka tako da prvi sabirak bude 8.
8 + 9 = 17
x = 9

Učenici nalaze da je drugi sabirak 9 i zapisuju dobijenu jednakost 8 + 9 = 17 ispod jednačine. Jednačenjem zbirova i sabiraka jednačine i jednakosti:
17 = 17 → zbirovi
8 = 8 → prvi sabirci
x = 9 → drugi sabirci,
dobijamo rješenje jednačine x = 9.

Rješavajući jednačinu postupkom pomoćnog zadatka, učenici uočavaju razliku između jednačine i jednakosti. Oni samostalno dolaze do zaključka: **Jednakost sa nepoznatim brojem koji je zapisan slovom zove se jednačina**. Učenicima treba objasniti da određena vrijednost nepoznatog broja ”x” predstavlja rješenje jednačine, da se cio postupak kojim se došlo do rješenja naziva rješavanje jednačine.

Tek poslije dobro uvježbanog postupka rješavanja jednačina putem pomoćnih zadataka, koji se najčešće praktikuje u skupu brojeva do 20, prelazi se na rješavanje jednačina pomoću operacija suprotnih operacijama naznačenim u jednačinama. Primjena ovog postupka zahtijeva utvrđivanje funkcionalne zavisnosti rezultata operacije od njenih komponenti.

Primjer 3:



6 + 4 = 10

Iz zapisane numeričke jednakosti:

$$6 + 4 = 10$$

koja je predstavljena grafički učenici uočavaju da je:

10 > 6	i	**10 – 6 = 4**
10 > 4	i	**10 – 4 = 6**

Na ovakav način učenici zaključuju: **Vrijednost jednog sabirka je jednaka razlici zbira i vrijednosti drugog sabirka**. Dakle, ako od zbira oduzmemo jedan sabirak dobijamo drugi sabirak. To se dobro uočava na navedenim grafičkim prikazima pomoću skupova. Suština je u tome da učenici vizuelno ustanove odnos zbira i sabirka. Tek kada učenici shvate njihov odnos, može se preći na rješavanje jednačina sa nepoznatim sabirkom primjenom operacija suprotnih operacijama naznačenim u jednačini. To se može ilustrovati rješavanjem jedne tekstualne jednačine.

Primjer 4: Mirko je imao 8 klikera. Kada mu je Maša dala svoje klikere on je imao ukupno 15 klikera. Koliko je klikera Maša dala Mirku?

Neophodno je da učitelj, prije analize zadatka, zahtijeva od jednog ili dva učenika da ponove zadatak. Svrha ponavljanja zadatka je u tome da se on što bolje razumije. Zatim slijedi analiza zadatka:

Učitelj: Šta nam je poznato u zadatku?
Učenik: Poznato nam je da je Mirko imao 8 klikera.
Učitelj: Šta je još poznato u zadatku?

Učenik: Poznato je da Mirko sada ima ukupno 15 klikera.
Učitelj: Šta je nepoznato u zadatku?
Učenik: Nepoznato je koliko je Maša imala klikera.

Problem nastaje oko označavanja nepoznatog broja Mašinih klikera. Neki će učenici, koristeći iskustvo od ranije u rješavanju zadataka u kojima treba popuniti prazne kružiće da bi se dobila tačna jednakost, predložiti upisivanje jednog takvog kružića ili kvadratića. Zato će ih učitelj podsjetiti da su već učili da se nepoznati broj može obilježiti nekim slovom i da se ”**x**” (iks) u takve svrhe često koristi.
Učitelj: Šta se, djeco, traži u zadatku?
Učenik: U zadatku se traži da odredimo koliko je klikera Maša dala Mirku.

Pošto se izvrši detaljna analiza zadatka, a prethodno pripreme odgovarajuća nastavna sredstva može se preći na sledeću fazu matematičkog zapisivanja jednačine. Pripremljena nastavna sredstva povećavaju aktivnost učenika, jer ”efekat njihovog uticaja na aktivnost učenika je od 30 – 50%” (Lekić, 1965:110).
Učitelj: Rekli smo da je Mirko imao 8 klikera.

Zatim izlazi jedan učenik pred tablu i uzima karton na kojem je napisan broj 8.
Učitelj: Koju ćemo računsku radnju koristiti da označimo da je Maša dala svoje klikere Mirku?
Učenik: Koristimo računsku radnju sabiranje, a upotrebićemo znak +.

Zatim izlazi još jedan učenik pred tablu, uzima karton na kojem je napisan znak ”+” i staje u red sa svojim prethodnikom.
Učitelj: Kako smo rekli da ćemo označiti broj Mašinih klikera?
Učenik: Broj Mašinih klikera označićemo sa ”x”.

Učitelj izvodi jednog učenika pred tablu koji uzima karton na kojem je napisano ”**x**” i staje u red sa drugovima.
Učitelj: Koliko je Mirko imao klikera kada mu je Maša dala svoje klikere?
Učenik: Mirko je tada imao ukupno 15 klikera?
Učitelj: Kakva veza postoji između broja 15 i izraza 8 + x?
Učenik: Postoji znak jednakosti.

Izlaze dva učenika, prvi uzima karton na kojem je napisan znak ”=” i staje u red pred tablu, a drugi učenik će uzeti karton na kojem je napisan broj 15 i staje na kraj reda. Poredak učenika koji drže pripremljene aplikacije (kartone) pred tablom će imati sljedeći izgled:

$\boxed{8}$ $\boxed{+}$ $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{15}$

Zatim slijedi postupak zapisivanja jednačina na tabli:
8 + x = 15.

Prelaz od

8 + *x* = 15 na **x = 15 – 8**

predstavljaće u početku za učenike najteži korak u rješavanju jednačine. Pošto su svi učenici ”doživjeli” postupak matematičkog zapisivanja jednačine, učitelj nastavlja objašnjavanje postupka njenog rješavanja.

Učitelj: Šta nam predstavlja broj 8 u zadatku?
Učenik: Predstavlja nam broj Mirkovih klikera.
Učitelj: A šta nam predstavlja broj 8 u izrazu?
Učenik: To je prvi sabirak.
Učitelj: Šta nam predstavlja x u zadatku?
Učenik: Predstavlja nam broj Mašinih klikera.
Učitelj: A šta predstavlja x u izrazu?
Učenik: To je drugi (nepoznati) sabirak.
Učitelj: Šta nam predstavlja broj 15 u zadatku?
Učenik: Broj 15 predstavlja ukupan broj Mirkovih i Mašinih klikera.
Učitelj: A šta je broj 15 u izrazu?
Učenik: To je zbir.
Učitelj: Kako ćemo izračunati nepoznati sabirak ako nam je poznat zbir i prvi sabirak?

S obzirom da učenici vladaju izvesnim znanjem o odnosu zbira prema sabircima i obrnuto, to neće predstavljati za njih veliku teškoću shvatanje načina rješavanja date jednačine.

Učenik: Nepoznati sabirak ćemo izračunati tako što ćemo od zbira oduzeti poznati sabirak.

Poredak učenika pred tablom će se promeniti, tako da će novi učenik uzeti karton sa znakom ”–” i zamijeniti učenika koji drži karton sa znakom ”+”. Tako će novi poredak učenika pred tablom imati sledeći izgled:

$\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{15}$ $\boxed{-}$ $\boxed{8}$

Učitelj zapisuje na tabli, a učenici u svojim sveskama:

***x* = 15 – 8.**

Zatim slijedi konačno rješenje jednačine. Učenici samostalno izračunavaju vrednost nepoznatog sabirka i saopštavaju ga učitelju.

Učitelj proziva učenika koji je prvi izračunao vrednost nepoznatog sabirka, a ovaj uzima karton sa rješenjem jednačine (brojem 7) i staje sa desne strane znaka jednakosti umjesto svojih drugova. Novi poredak učenika će imati sljedeći izgled:

x	=	7

Zatim sledi zapisivanje rešenja jednačine:

x = 7

Napomena: Potrebno je učenicima skrenuti pažnju da pregledno zapisuju tok rješavanja zadatka, tj. da svaku novu dobijenu jednačinu zapisuju jednu ispod druge. Tako će rješenje date jednačine imati zapis u sljedećem obliku:

8 + x = 15
x = 15 – 8
x = 7

Na kraju je potrebno izvršiti provjeru tačnosti dobijenog rezultata. Provjera se vrši tako što se vratimo na polaznu jednačinu i umjesto nepoznate upisujemo nađenu vrijednost. Zatim sabiramo lijevu stranu jednakosti, pa ako dobijena jednakost bude tačna, možemo sa sigurnošću zaključiti da smo odredili pravo rješenje jednačine. Provjera tačnosti rješenja jednačine ima sledeći oblik:

8 + x = 15
8 + 7 = 15
15 = 15 (T)

Učitelj: Da ponovimo, šta se tražilo u zadatku?
Učenik: Tražilo se da odredimo koliko je klikera Maša dala Mirku?
Učitelj: Možemo li odgovoriti na postavljeno pitanje?
Učenik: Možemo. Maša je dala Mirku 7 klikera.

Učenicima treba objasniti da se napisana jednakost koja sadrži nepoznatu (8 + x = 15) naziva **jednačina**, a da se x = 7 naziva **rješenje jednačine**, dok se čitav postupak kojim se došlo do rješenja naziva **rješavanje jednačine**.

Ovakav način realizacije jednačine pobudiće kod učenika želju, interesovanje i motivaciju za njihovo rješavanje. To će, svakako, imati pozitivne reperkusije, jer rješavanje jednačina doprinosi razvoju matematičkog mišljenja.

Postupak rješavanja jednačina oblika x + a = b je isti kao i rješavanja jednačina oblika a + x = b. Učenici su shvatili da nepoznati sabirak izračunavamo tako što od zbira oduzmemo poznati sabirak.

3.4.1.2. Jednačine sa nepoznatim umanjenikom

Nakon realizacije jednačina sa nepoznatim sabirkom prelazi se na realizaciju jednačina oblika x – a = b, tj. jednačina sa nepoznatim umanjenikom.

Pošto su učenici već ovladali izvjesnim pojmovima jednačine, to se postupak pomoćnog zadatka uvježban na pronalaženju nepoznatog sabirka prenosi i na jednačine sa oduzimanjem. Suština je u tome da učenici rastave poznatu razliku na dvije komponente (dva broja) od kojih je druga komponenta (umanjilac) poznata.

Primjer 1: Riješi jednačinu $x - 5 = 8$

Rješenje: $x - 5 = 8$ → ***Pomoćni zadatak:*** Broj 8 napiši kao razliku dva broja čiji je umanjilac broj 5.

$13 - 5 = 8$

$x = 13$

Objašnjenje: Učenik će razmisliti od kojeg broja treba oduzeti broj 5 pa da razlika bude broj 8. Kada ustanovi da je to broj 13, ispod zapisane jednačine zapisuje dobijenu jednakost:

$13 - 5 = 8$

Zatim upoređujući istoimene elemente jednačine i jednakosti pronalazi vrijednost nepoznatog umanjenika:

$8 = 8$ → razlike

$5 = 5$ → umanjioci

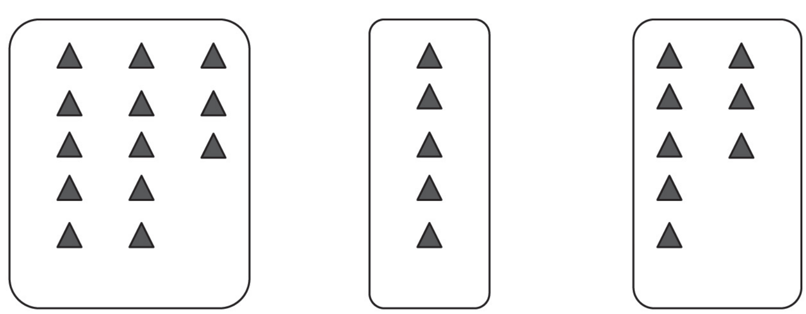
$x = 13$ → umanjenici

Kada učenici ovladaju rješavanjem jednačina oblika $x - a = b$ koristeći pomoćne zadatke, prelazimo na njihovo rješavanje primjenom operacija suprotnih operacijama naznačenim u jednačinama. Tu je potrebno uzeti u obzir funkcionalnu zavisnost rezultata operacija od njenih komponenti. Ovaj postupak se u buduće primjenjuje u rješavanju ovih tipova jednačina.

Za rješavanje jednačina sa nepoznatim umanjenikom potrebno je uzeti u obzir zavisnost razlike od umanjenika, kao i odnos umanjenika prema razlici i umanjiocu. Međusobni odnos umanjenika, umanjioca i razlike je potrebno obnoviti neposredno prije realizacije jednačina sa nepoznatim umanjenikom. Učenici to najbolje shvataju na grafičkom prikazu.

Primjer 2:

<u>**umanjenik**</u> <u>**umanjilac**</u> <u>**razlika**</u>



13 - 5 = 8

Pošto se zapiše jednakost 13 – 5 = 8, učenici imenuju komponente i rezultat jednakosti:

13 → umanjenik
5 → umanjilac
8 → razlika

Posmatrajući grafički prikaz uočavamo da je:

13 > 5 za 8 (umanjenik (13) je veći od umanjioca (5) za razliku (8))
13 > 8 za 5 (umanjenik (13) je veći od razlike (8) za umanjilac (5)).

Učenici će posmatrati grafički predstavljene skupove umanjenika, umanjioca i razlike i brojeći njihove elemente uočiti da je umanjenik veliki koliko razlika i umanjilac zajedno. Na osnovu toga učenici izvode zaključak: **Umanjenik je uvijek jednak zbiru razlike i umanjioca**. Matematički zapis će imati sledeći izgled:

$$x - a = b \Rightarrow x = b + a$$

Uopšte realizaciju jednačina, pa i jednačina oblika x – a = b, treba ilustrovati primjerima iz svakodnevnog života. **Na primjer:** Učitelj pokazuje kesu iz koje vadi 7 bombona. Nakon toga pokazuje svim učenicima da su u kesi ostala još 4 bombona, a zatim postavlja pitanje: Koliko je bombona bilo u kesi? Potrebno je formulisati zadatak, a zatim kroz njegovu analizu utvrditi šta je poznato, a šta nepoznato. Razgovor s učenicima bi poprimio sljedeći tok:

Učitelj: Znamo li koliko je bombona bilo u kesi?
Učenik: Ne znamo.
Učitelj: Kako ćemo označiti broj bombona koji su bili u kesi?
Učenik: Označićemo ga slovom ”x”.
Učitelj: Možemo ga označiti i drugim slovom: a, b, c, ..., ali neka to bude slovo x.
Učenici zapisuju slovo **x**.
Učitelj: Šta smo uradili s nekoliko bombona iz kese?
Učenik: Mi smo nekoliko bombona izvadili iz kese.
Učitelj: Kojom ćemo računskom radnjom označiti da su bomboni izvađeni iz kese.
Učenik: To ćemo označiti računskom radnjom oduzimanja, a upotrijebićemo znak ”–”.
Učitelj: Znamo li koliko je bombona izvađeno iz kese?
Učenik: Znamo. Izvađeno je 7 bombona.
Učitelj: Zapišimo da je iz kese u kojoj je bilo x bombona izvađeno 7.
Učenici zapisuju **x – 7**.
Učitelj: Kada smo izvadili 7 bombona, koliko ih je ostalo u kesi?
Učenik: Ostala su još 4 bombona.
Učielj: Kakva veza postoji između broja 4 i izraza, x – 7 , koji smo već zapisali?
Učenik: Postoji znak jednakosti.
Učitelj: Zapišimo to.
Učenici zapisuju **x – 7 = 4**.
Učitelj: Šta nam označava slovo x u zadatku?
Učenik: Ono nam označava ukupan broj bombona koji su bili u kesi.

Učitelj: Šta nam predstavlja x u izrazu?
Učenik: x je u izrazu umanjenik.
Učitelj: Čemu smo rekli da je jednak umanjenik?
Učenik: Umanjenik je jednak zbiru razlike i umanjioca.
Učitelj: Kako bi to matematički zapisali u ovom slučaju?
Učenik: $x = 4 + 7$ (usmeno odgovara).
Učitelj: Zapišimo to.
Učenici zapisuju $\mathbf{x = 4 + 7}$.
Učitelj: Koliko je bombona bilo u kesi?
Učenik: U kesi je bilo 11 bombona.
Učitelj: Kako smo to izračunali?
Učenik: To smo izračunali tako što smo sabrali broj bombona koji su ostali u kesi sa brojem bombona koje smo izvadili iz kese.
Učitelj: Zapišimo to.
Učenici zapisuju $\mathbf{x = 11}$.

Zatim slijedi postupak provjere tačnosti rješenja date jednačine. Provjera se vrši tako što se vratimo u polaznu jednačinu i umjesto nepoznatog umanjenika upisujemo njegovu vrijednost. Ako dobijena jednakost bude tačna rješenje jednačine je ispravno. Zapis rješenja jednačine i njegove provjere će imati sljedeći izgled:

Rješenje: $x - 7 = 4$	**Provjera**: $x - 7 = 4$
$x = 4 + 7$	$11 - 7 = 4$
$x = 11$	$4 = 4$ (T)

Odgovor: U kesi je bilo 11 bombona.

3.4.1.3. Jednačine sa nepoznatim umanjiocem

Kada učenici ovladaju postupkom rješavanja jednačina sa nepoznatim sabirkom i umanjenikom može se preći na realizaciju jednačina sa nepoznatim umanjiocem. Rješavanje ovih oblika jednačina ($a - x = b$) je, takođe, potrebno započeti primjenom postupka pomoćnog zadatka.

Primjer 1: Riješi jednačinu $15 - x = 5$

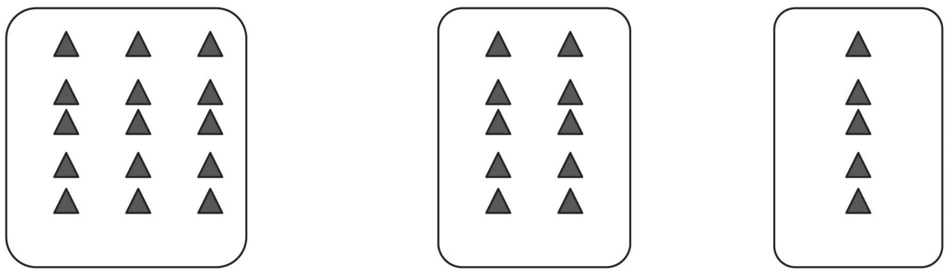
Pomoćni zadatak: Broj 5 napiši u obliku razlike brojeva čiji je umanjenik 15.

Objašnjenje: Učenici razmišljaju koji broj treba oduzeti od broja 15 pa da razlika bude broj 5. Kada odrede da je to broj 10, dobijenu jednakost zapisuju ispod jednačine. Zatim na osnovu jednakosti obje razlike i oba umanjenika izvode jednakost oba umanjioca, koja određuje nepoznati umanjilac.
Zapis rješenja će imati sljedeći izgled:

Rešenje: $15 - x = 5$	$5 = 5 \rightarrow$ razlike
$15 - 10 = 5$	$15 = 15 \rightarrow$ umanjenici
$x = 10$	$x = 10 \rightarrow$ umanjioci

Da bi učenici shvatili odnos nepoznate komponente – umanjioca prema umanjeniku i razlici, potrebno je grafički predstaviti razliku.

Primjer 2:



umanjenik (15) umanjilac (10) razlika (5)

15 - 10 = 5

Analizirajući datu jednakost **15 – 10 = 5** i posmatrajući njen grafički prikaz učenici će shvatiti odnos umanjioca prema umanjeniku i razlici. Učenici uočavaju da je:

15 > 10 za **5** (umanjenik (15) je veći od umanjioca (10) za razliku (5))
10 < 15 za **5** (umanjilac (10) je manji od umanjenika (15) za razliku (5))

Iz navedenog učenici će sami izvesti zaključak: **Umanjilac je jednak razlici umanjenika i razlike**. Matematički zapisano to bi imalo sljedeći izgled:

$$a - x = b \Rightarrow x = a - b$$

Ovaj zaključak treba potvrditi na nekoliko primjera kako bi svim učenicima bilo u potpunosti jasno da se umanjilac uvijek dobija ako od umanjenika oduzmemo razliku. Zato ćemo dati dva zapisa od kojih prvi predstavlja jednakost, a drugi jednačinu. Učenici će sami da imenuju zapise, komponente u zapisu i rezultat, kao na sljedećem primjeru:

<u>**jednakost**</u>					<u>**jednačina**</u>				
15	**–**	**4**	**=**	**11**	**15**	**–**	**x**	**=**	**11**
↓		↓		↓	↓		↓		↓
umanjenik		umanjilac		razlika	umanjenik		nepoznati umanjilac		razlika

Posmatrajući jednakost učenici primjećuju da je 4 = 15 – 11, a zatim primjenjujući to saznanje na jednačinu zapisuju čemu je jednak nepoznati umanjilac x = 15 – 11. Zatim je potrebno stečeno znanje primijeniti na adekvatnom primjeru rješavanja problemskog zadatka primjenom jednačine sa nepoznatim umanjiocem.

Postupak rješavanja jednačine sa nepoznatim umanjiocem je sličan rješavanju jednačina sa nepoznatim umanjenikom, pa ga u ovom slučaju nećemo detaljnije objašnjavati.

3.4.2. Jednačine sa množenjem i dijeljenjem

Jednačine sa množenjem i jednačine sa dijeljenjem takođe spadaju u red jednačina sa prostim izrazima, odnosno jednačina sa jednom operacijom. Riječ je o jednačinama oblika:

$$\boldsymbol{x \cdot a = b}$$
$$\boldsymbol{x : a = b} \quad (a \neq 0)$$
$$\boldsymbol{a : x = b}$$

Učenici se upoznaju sa navedenim oblicima jednačina neposredno poslije usvojenih aritmetičkih operacija množenja i dijeljenja. Realizacija ovih jednačina ima za cilj da osposobi učenike za uočavanje nepoznate i samostalno njihovo rješavanje. Tako se kod učenika razvija upornost, istrajnost, preciznost, pažnja i iznad svega logičko mišljenje i zaključivanje.

Dakle, nakon što su obrađene operacije množenja i dijeljenja, operišući brojevima prve stotine učenici rješavaju:

- jednačine sa nepoznatim činiocem,
- jednačine sa nepoznatim djeljenikom i
- jednačine sa nepoznatim djeliocem.

Da bi rješavali ove jednačine učenici najprije treba da prošire znanja o međusobnim vezama suprotnih računskih operacija, usvojenih za sabiranje i oduzimanje, na ”nove” računske operacije, tj. množenje i dijeljenje. Ovdje učenici utvrđuju termine jednačina, rješenje jednačine i postupak rješavanja jednačine, koji su bili u prilici da koriste prilikom rješavanja jednačina sa sabiranjem i oduzimanjem.

3.4.2.1. Jednačine sa nepoznatim činiocem

U trećem razredu, neposredno poslije realizacije množenja i dijeljenja slijedi realizacija jednačina oblika $\boldsymbol{x \cdot a = b}$ pomoću tih operacija.

Prije realizacije jednačina sa nepoznatim činiocem, potrebno je uraditi više pripremnih zadataka koji svojim sadržajem najavljuju izučavanje jednačina sa množenjem.

Primjer 1: Broj 12 napiši na više načina u obliku proizvoda dva broja.
Rješenje: $12 = 1 \cdot 12$
$12 = 2 \cdot 6$
$12 = 3 \cdot 4$

Primjer 2: Broj 12 napiši kao proizvod nepoznatog broja x i broja 4.
Rješenje: $x \cdot 4 = 12$

Poželjno je od učenika zahtijevati da zapišu više jednačina sa nepoznatim činiocem. Zatim je potrebno uočiti povezanost množenja i dijeljenja na konkretnom primjeru, kako bi učenici shvatili da se iz proizvoda dva broja mogu zapisati dva količnika.

Primjer 3:

Iz											
4	·	**5**	=	**20**	⇒	**20**	:	**5**	=	**4**
						20	:	**4**	=	**5**
↓		↓		↓		↓		↓		↓
prvi činilac		drugi činilac		proizvod		djeljenici (20, 20)		djelioci (5, 4)		količnici (4, 5)

Iz navedenog primjera učenici uočavaju da je vrijednost jednog činioca jednaka količniku proizvoda i drugog činioca.

Rješavanje jednačina sa nepoznatim činiocem započinjemo primjenom postupka pomoćnog zadatka.

Primjer 4: Odredi vrijednost nepoznatog činioca u jednačini ***x · 4 = 24***.

Pomoćni zadatak: Zapiši broj 24 u obliku proizvoda čiji je drugi činilac broj 4.

Objašnjenje: Učenici razmišljaju koji je to broj i koristeći se tablicom množenja pronalaze prvi činilac (6) koji pomnožen sa brojem 4 daje broj 24. Zapisuju dobijenu jednakost ispod jednačine, a potom upoređuju istoimene elemente jednačine i jednakosti. Na osnovu jednakosti proizvoda (24 = 24) i jednakosti drugih činilaca (4 = 4) izvode zaključak o jednakosti prvih činilaca (x = 6) na osnovu čega se i određuje vrijednost nepoznatog činioca. To bi u zapisu imalo sljedeći izgled:

jednačina:	**x · 4 = 24**	**24 = 24**	→ proizvodi
pomoćni zadatak:	**6 · 4 = 24**	**4 = 4**	→ drugi činioci
rješenje:	**x = 6**	**x = 6**	→ prvi činioci

Da bi učenici shvatili postupak pomoćnog zadatka, potrebno je uraditi više primjera.

Primjer 5: Riješi jednačinu **3 · x = 27**.

Rješenje: 3 · x = 27 ***Pomoćni zadatak***: Zapiši broj 27 u obliku proizvoda čiji je prvi činilac broj 3.

3 · 9 = 27
x = 9

27 = 27	→ **proizvodi**
3 = 3	→ **prvi činioci**
x = 9	→ **drugi činioci**

Rješavajući jednačine postupkom pomoćnog zadatka učenici shvataju njegovu suštinu u određivanju nepoznatog činioca izjednačavajući odgovarajuće komponente u datoj jednačini i dobijenoj jednakosti.

Ako analiziramo prethodni primjer i imenujemo komponente i rezultat operacije učenici će uočiti da se nepoznati činilac može odrediti na osnovu veze koja postoji između množenja i dijeljenja. To ćemo ilustrovati sljedećim primjerom:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \cdot & 8 & = & 32 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{činioci} & & & \text{proizvod} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 32 & : & 4 & = & 8 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{djeljenici} & & \text{djelioci} & & \text{količnici} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 32 & : & 8 & = & 4 \end{array}$$

Iz navedenog primjera učenici samostalno dolaze do zaključka: **Ako proizvod podijelimo sa jednim činiocem dobijamo drugi činioc**.

Ako sada navedemo jedan primjer jednačine sa nepoznatim činiocem:

$$\begin{array}{lllllcllllll} \mathbf{x} & \cdot & \mathbf{5} & = & \mathbf{30} & \text{ili} & \mathbf{6} & \cdot & \mathbf{x} & = & \mathbf{30} \\ \mathbf{30} & : & \mathbf{5} & = & \mathbf{x} & & \mathbf{30} & : & \mathbf{6} & = & \mathbf{x} \end{array}$$

učenici će primjenjujući zaključak iz prethodnog primjera zaključiti: Nepoznati činioc dobijamo ako proizvod podijelimo poznatim činiocem.

Pošto smo objasnili postupak rješavanja jednačina sa nepoznatim činiocem stečeno znanje ćemo primijeniti na konkretnim primjerima.

Primjer 6: Nikola je zamislio neki broj koji pomnožen sa 7 daje 42.
Koji je broj Nikola zamislio?

Rješenje: $x \cdot 7 = 42$
$x = 42 : 7$
$x = 6$

Učenicima treba objasniti da provjeru tačnosti rješenja izvodimo tako što u polaznu jednačinu umjesto nepoznatog činioca upisujemo njegovu vrijednost. Ako je dobijena jednakost zadovoljena, rješenje jednačine je tačno, npr.:

Provjera: $x \cdot 7 = 42$
$6 \cdot 7 = 42$
$2 = 42$ (**T**)

Odgovor: Nikola je zamislio broj 6.

Napomena: Čitav postupak rješavanja jednačine je praćen učiteljevim objašnjavanjem.

Primjer 7: Proizvod broja 8 i nepoznatog broja je 56. Odredi vrijednost nepoznatog broja.

Rješenje: $8 \cdot x = 56$
$x = 56 : 8$
$x = 7$

Provjera: $8 \cdot x = 56$
$8 \cdot 7 = 56$
$56 = 56$ (**T**)

U školi je potrebno uraditi više sličnih zadataka kako bi se kod učenika razvila sposobnost tačnog rješavanja jednačina oblika $\boldsymbol{x \cdot a = b}$.

3.4.2.2. Jednačine sa nepoznatim djeljenikom

Da bi uspješno realizovali jednačine sa nepoznatim djeljenikom, u skupu dvocifrenih brojeva, neophodno je uraditi više pripremnih zadataka.

Primjer 1: Broj 3 napiši na više načina u obliku količnika dva broja.
Rješenje: $3 = 6 : 2$
$3 = 9 : 3$
$3 = 12 : 4$
$3 = 15 : 5$ i sl.

Primjer 2: Količnik nepoznatog broja i broja 6 je broj 5. Zapiši izraz.
Rješenje: $x : 6 = 5$

Objašnjenje: Učenici će čitajući zadatak prevoditi njegov sadržaj na matematički jezik. Dakle, prvo pišu nepoznati broj x kao djeljenik, stavljaju znak :, pišu broj **6** kao djelilac, stavljaju znak = i pišu broj **5** kao količnik.

Posle ovakve pripreme možemo istaći pojavu nepoznatog djeljenika, odnosno jednačine sa nepoznatim djeljenikom. Poželjno je da na jednom primjeru učenici imenuju komponente i rezultat operacije, npr.:

x	:	6	=	5	→ jednačina sa nepoznatim djeljenikom
↓		↓		↓	
nepoznati djeljenik		djelilac		količnik	

Rješavanje jednačina oblika ***x : a = b*** počećemo primjenom postupka pomoćnog zadatka.

Primjer 3: Riješi jednačinu $x : 4 = 9$.
Rješenje: $x : 4 = 9$ → ***Pomoćni zadatak***: Broj 9 napiši u obliku količnika čiji je djelilac 4.

Objašnjenje: Pošto su u pripremnom periodu rješavali slične zadatke, učenici će s lakoćom pronaći djeljenik i zapisati dobijenu jednakost $36 : 4 = 9$ ispod jednačine. Upoređujući istoimene elemente u jednačini i jednakosti, a na osnovu jednakosti oba količnika i jednakosti oba djelioca slijedi jednakost oba djeljenika koja određuju nepoznati djeljenik.

Matematički zapis bi imao sljedeći izgled:

x : 4 = 9	***9 = 9*** → količnici
36 : 4 = 9	***4 = 4*** → djelioci
x = 36	***x = 36*** → djeljenici

Posle nekoliko urađenih primjera i njihove analize učenici uočavaju da se do rješenja jednačine može doći na osnovu veze između dijeljenja i množenja, tj. primjenom operacije suprotne operaciji datoj u jednačini. To se može objasniti na prethodnom primjeru:

iz **36 : 4 = 9** $\Rightarrow$ **36 = 9 · 4**, odnosno
iz ***x*** **: 4 = 9** $\Rightarrow$ **x = 9 · 4**

Posmatrajući datu jednakost i uočavajući vezu koja postoji između komponenti i rezultata operacije učenici zaključuju: **Ako količnik pomnožimo sa djeliocem dobijamo djeljenik**. Uopštavajući to pravilo na datu jednačinu zaključak bi glasio: **Nepoznati djeljenik dobijamo ako količnik pomnožimo sa djeliocem**.

Ovaj postupak se u buduće koristi u rješavanju jednačina oblika:

$$x : a = b \quad (a \neq 0)$$

Primjer 4: Količnik nepoznatog broja i broja 6 je 9. Odredi nepoznati broj.
Rješenje: x : 6 = 9
x = 9 · 6
x = 54

Tačnost rješenja jednačine se provjerava tako što se u polaznu jednačinu umjesto nepoznatog djeljenika (x) upisuje njegova dobijena vrijednost (54). Ako dobijena jednakost bude zadovoljena rješenje jednačine je tačno, npr.:

Provjera: x : 6 = 9
54 : 6 = 9
9 = 9 (**T**)

U toku daljeg rada potrebno je vježbati rješavanje tekstualnih zadataka primjenom jednačina s nepoznatim djeljenikom kako bi učenici u što većoj mjeri usvojili date jednačine.

3.4.2.3. Jednačine sa nepoznatim djeliocem

Analogno realizaciji prethodnih oblika jednačina i ovdje je potrebno prethodno uraditi nekoliko pripremnih zadataka.

Primjer 1: Broj 6 napiši u obliku količnika čiji je djeljenik broj 42.
Rješenje: 6 = 42 : 7

Objašnjenje: Učenici razmišljaju kojim brojem treba podijeliti broj 42 da bi dobili broj 6 i koristeći se tablicom dijeljenja pronalaze nepoznati djelilac (7).

Na osnovu urađenih nekoliko sličnih primjera učenici uvježbavaju da usmeno pronalaze nepoznati djelilac. Zatim je potrebno uraditi nekoliko primjera u kojima se traži pisanje (zapisivanje) jednačine sa nepoznatim djeliocem.

Primjer 2: Količnik brojeva 56 i nepoznatog broja je 8. Zapiši izraz.
Rješenje: 56 : x = 8

Nakon zapisivanja datog izraza od učenika se traži da imenuju komponente i rezultat operacije, kao i zapisani izraz u cjelini, npr.:

$$\underset{\text{djeljenik}}{\underset{\downarrow}{56}} \; : \; \underset{\text{nepoznati djelilac}}{\underset{\downarrow}{x}} \; = \; \underset{\text{količnik}}{\underset{\downarrow}{8}} \rightarrow \text{jednačina sa nepoznatim djeliocem}$$

Poželjno je da učenici sami smisle i zapišu po nekoliko jednačina sa nepoznatim djeliocem.

Kao početni postupak za rješavanje jednačina sa nepoznatim djeliocem koristimo, takođe, pomoćne zadatke.

Primjer 3: Riješi jednačinu $32 : x = 8$.
Rješenje: $32 : x = 8 \rightarrow$ ***Pomoćni zadatak***: Broj 8 napiši u obliku količnika čiji je djeljenik 32.

Objašnjenje: Na osnovu datog količnika i djeljenika učenici će, koristeći se tablicom dijeljenja, izračunati nepoznati djelilac. Zatim zapisuju ispod jednačine traženu jednakost i upoređuju istoimene elemente u njima.

Na osnovu jednakosti oba količnika i jednakosti oba djeljenika slijedi jednakost oba djelioca koja istovremeno određuje nepoznati djelilac. To bi u matematičkom zapisu imalo sljedeći izgled:

$$\begin{array}{lll} 32 : x = 8 & 8 = 8 & \rightarrow \textbf{količnici} \\ 32 : 4 = 8 & 32 = 32 & \rightarrow \textbf{djeljenici} \\ x = 4 & x = 4 & \rightarrow \textbf{djelioci} \end{array}$$

Suština primjenjivanog postupka je u tome da iz jednakosti oba količnika i jednakosti oba djeljenika slijedi jednakost poznatog i nepoznatog djelioca koja određuje vrijednost nepoznatog djelioca.

Kada učenici ovladaju postupkom pomoćnog zadatka, kroz rješavanje više zadataka oblika $a : x = b$, potrebno im je na nekom od tih primjera objasniti odnos djeljenika i količnika. Cilj je da učenici uoče da se do rješenja jednačine sa nepoznatim djeliocem može doći i bez pomoćnog zadatka, na osnovu odnosa količnika prema djeljeniku, npr.:

$$\begin{array}{ccccccl} \mathbf{32} & \mathbf{:} & \mathbf{4} & \mathbf{=} & \mathbf{8} & \Rightarrow & \mathbf{4 = 32 : 8} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{djeljenici} & & \text{djelioci} & & \text{količnici} & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{32} & \mathbf{:} & \mathbf{x} & \mathbf{=} & \mathbf{8} & \Rightarrow & \mathbf{x = 32 : 8} \end{array}$$

Posmatrajući odnos djeljenika i količnika u datoj jednakosti učenici uočavaju: **Ako djeljenik podijelimo količnikom dobijemo djelilac**. Uopštavajući to pravilo na posmatranu jednačinu slijedi zaključak: **Nepoznati djelilac dobijamo dijeljenjem djeljenika sa količnikom**.

Učenici na taj način uspješno ovladavaju postupkom rješavanja jednačina sa nepoznatim djeliocem. Stečeno znanje dalje upotpunjuju rješavanjem jednačina oblika:

$$\boldsymbol{a : x = b}$$

Primjer 4: Ako broj 63 umanjimo nekoliko puta dobijamo broj 7. Odredi koliko smo puta umanjili broj 63.

Rješenje:	$63 : x = 7$	**Provjera**:	$63 : x = 7$
	$x = 63 : 7$		$63 : 9 = 7$
	$x = 9$		$7 = 7$ (**T**)

Napomena: Rješavanje jednačine je praćeno kontinuiranim objašnjavanjem, a postupak provjere tačnosti rješenja jednačine je analogan postupcima provjere tačnosti rješenja drugih oblika jednačina koje su učenici već usvojili.

3.5. JEDNAČINE SA SLOŽENIM IZRAZIMA OD VIŠE OPERACIJA

Jednačine sa složenim izrazima od više operacija čine korak naprijed od ”prostih” jednačina, tj. jednačina sa prostim izrazima, ka ”složenim” jednačinama, tj. jednačinama sa složenim izrazima od dvije i više računskih operacija. Riječ je , dakle, o realizaciji:

- jednačina sa složenim izrazima od dvije operacije i
- jednačina sa složenim izrazima od više operacija.

Neposredno poslije realizacije složenih izraza bez zagrada i sa zagradama, usvojenosti prioriteta zagrada, odnosno redosljeda računskih radnji prelazi se na rješavanje prvo jednačina sa složenim izrazima od dvije operacije, a zatim i jednačina sa složenim izrazima od više računskih operacija.

Postupak realizacije jednačina ovog tipa je isti kao da se rade zadaci sa jednom računskom operacijom. Bitno je da učenici shvate redosljed računskih operacija i prioritet zagrada u složenim izrazima. Razlika u rješavanju brojevnih izraza sa više operacija i jednačina sa složenim izrazima od više operacija je samo u traženom. U brojevnom izrazu sve je poznato i traži se njihova brojevna vrijednost, dok kod jednačina postoji nepoznati broj čiju vrijednost treba da izračunamo na osnovu poznatog rezultata.

Osnovu rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više operacija predstavlja postupak rješavanja jednačina sa složenim izrazima od dvije operacije oblika:

1) $a \cdot x \pm b = c$
2) $x : a \pm b = c \quad (a \neq 0)$
3) $a : x \pm b = c$

Po Nastavnom planu i programu za osnovnu školu, jednačine sa složenim izrazima od više operacija se obrađuju u IV i V razredu. Tu se obično dijele jednačine u dvije grupe:

1) jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije bez zagrada;
2) jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije sa zagradama.

Dakle, postupak rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više operacija predstavlja sintezu postupaka rješavanja jednačina sa sabiranjem, odnosno oduzimanjem i jednačina sa množenjem, odnosno dijeljenjem.

3.5.1. Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije

Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije se po nastavnom planu i programu rješavaju u četvrtom i petom razredu početne nastave matematike. Riječ je o jednačinama s kojim se proširuju, utvrđuju, sistematizuju, upotpunjuju i uopštavaju stečena znanja na skupu prirodnih brojeva do 1000 u četvrtom, odnosno preko 1000 u petom razredu.

Dakle, nakon realizacije jednačina sa prostim izrazima na skupu prirodnih brojeva do 100 u trećem razredu prelazi se na rješavanje jednačina sa složenim izrazima od dvije operacije u četvrtom i petom razredu. Njima, razumije se, prethodi realizacija složenih matematičkih izraza bez zagrada i sa zagradama. "Razlika u rješavanju izraza i jednačina sa više operacija je samo u tome što je u izrazu sve poznato i traži se brojevna vrijednost izraza, a kod jednačina postoji nepoznata (nepoznati broj), a zna se rezultat" (Goranović, 1995:135). Postoji više oblika jednačina sa složenim izrazima od dvije operacije koje se u toku rješavanja svode na jednačine sa prostim izrazima čiji dobro usvojen postupak rješavanja predstavlja osnovu za njihovo rješavanje.

Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije možemo svrstati u dvije grupe:
- jednačine sa složenim izrazima od dvije iste operacije i
- jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije.

3.5.1.1. Jednačine sa složenim izrazima od dvije iste operacije

Analogno složenim izrazima sa dvije iste operacije postoje i jednačine sa složenim izrazima od dvije iste operacije. Riječ je o četiri poznate aritmetičke operacije (sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) koje se pojavljuju samostalno u jednačini, a nepoznata komponenta se može javiti u različitim pozicijama.

Jednačine sa složenim izrazima od dvije iste operacije, bilo kojeg oblika, rješavaju se analogno brojevnim izrazima sa dvije istovjetne operacije. Prema vrsti operacije jednačine ovoga tipa se klasifikuju na:
- jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije sabiranja,
- jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije oduzimanja,
- jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije množenja i
- jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije dijeljenja.

<u>Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije sabiranja</u> se mogu javiti u tri oblika:

$\boldsymbol{x + a + b = c}$,
$\boldsymbol{a + x + b = c}$ i
$\boldsymbol{a + b + x = c}$

Ove jednačine se mogu rješavati na tri načina analogno izrazima sa dvije operacije sabiranja.

Primjer 1: Riješi jednačinu $8 + x + 9 = 34$.

Rješenje: Uvažavajući svojstvo asocijativnosti sabiranja, jednačina se može rješavati na tri načina:

I način	**II način**	**III način**	**Provjera**
8 + x + 9 = 34	8 + x + 9 = 34	8 + x + 9 = 34	8 + x + 9 = 34
(8 + x) + 9 = 34	8 + (x + 9) = 34	(8 + 9) + x = 34	8 + 17 + 9 = 34
8 + x = 34 – 9	x + 9 = 34 – 8	17 + x = 34	25 + 9 = 34
8 + x = 25	x + 9 = 26	x = 34 – 17	34 = 34 (T)
x = 25 – 8	x = 26 – 9	x = 17	
x = 17	x = 17		

Učenici uočavaju da se na sva tri načina dolazi do istog rješenja, ali da je najlakši treći način. Od učenika treba zahtijevati da ubuduće jednačine ovoga tipa rješavaju na najlakši način uz obavezno provjeravanje tačnosti rješenja.

Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije oduzimanja mogu se javiti u tri oblika:

x – a – b = c,
a – x – b = c i
a – b – x = c

Potrebno je učenicima objasniti da nije bitan redosljed oduzimanja od većeg broja dva manja broja, tj. svejedno je da li ćemo prvo oduzeti prvi pa drugi ili drugi pa prvi ili ćemo oduzeti sabrano oba broja. Pošto su učenici rješavali izraze sa dva oduzimanja to će lakše shvatiti rješavanje ovih oblika jednačina.

Primjer 2: Riješi jednačinu 90 – 21 – x = 52.
Rješenje:

I način	II način	III način	Provera
90 – 21 – x = 52	90 – 21 – x = 52	90 – 21 – x = 52	90 – 21 – x = 52
(90 – 21) – x = 52	(90 – x) – 21 = 52	90 – (21 + x) =52	90 – 21 – 17=52
69 – x = 52	90 – x = 52 + 21	21 + x = 90 – 52	69 – 17 = 52
x = 69 – 52	90 – x = 73	21 + x = 38	52 = 52 (T)
x = 17	x = 90 – 73	x = 38 – 21	
	x = 17	x = 17	

Pri rješavanju date jednačine potrebno je davati nužna objašnjenja kako bi učenici shvatili da se rješavanjem jednačina sa dvije operacije svodi na jednačinu sa jednom operacijom.

Uopštavanje jednačina sa dva oduzimanja vršimo na sljedeći način:

	I način	II način	III način
I oblik: x – a – b = c ⇒	(x – a) – b = c	(x – b) – a = c	x – (a + b) = c
II oblik: a – x – b = c ⇒	(a – x) – b = c	(a – b) – x = c	a – (x + b) = c
III oblik: a – b – x = c ⇒	(a – b) – x = c	(a – x) – b = c	a – (b + x) = c

Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije množenja mogu se pojaviti u tri oblika:

$x \cdot a \cdot b = c$,
$a \cdot x \cdot b = c$ i
$a \cdot b \cdot x = c$

Da bi učenici shvatili postupak rješavanja ovih oblika jednačina potrebno je uraditi nekoliko brojevnih izraza sa dva množenja, jer se jednačine rješavaju analogno njima.

Primjer 3: Riješi dati izraz: $3 \cdot 10 \cdot 7 =$
Rješenje:

I način:	$3 \cdot 10 \cdot 7 = (3 \cdot 10) \cdot 7 = 30 \cdot 7 = 210$
II način:	$3 \cdot 10 \cdot 7 = (3 \cdot 7) \cdot 10 = 21 \cdot 10 = 210$
III način:	$3 \cdot 10 \cdot 7 = (10 \cdot 7) \cdot 3 = 70 \cdot 3 = 210$

Učenici prilikom izračunavanja proizvoda $a \cdot b \cdot c$ uočavaju i primjenjuju svojstva komutativnosti i asocijativnosti kod množenja, pa je isto da li će prvo pomnožiti $a \cdot b$ ili $a \cdot c$ ili $b \cdot c$. Učenicima je potrebno objasniti da se rješavanje svakog od navedenih oblika jednačina zasniva na združivanju bilo koja dva činioca pa tek onda množimo sa trećim činiocem. Na koji god od tri moguća načina budu se rješavali zadaci s jednačinama dobija se isto rješenje. To potvrđuje i kasnija provjera tačnosti rješenja jednačine.

Primjer 4: Riješi jednačinu $x \cdot 4 \cdot 8 = 96$.
Rješenje:

<u>I način</u>	<u>II način</u>	<u>III način</u>	<u>Provjera</u>
$x \cdot 4 \cdot 8 = 96$	$x \cdot 4 \cdot 8 = 96$	$x \cdot 4 \cdot 8 = 96$	$x \cdot 4 \cdot 8 = 96$
$(x \cdot 4) \cdot 8 = 96$	$(x \cdot 8) \cdot 4 = 96$	$(4 \cdot 8) \cdot x = 96$	$3 \cdot 4 \cdot 8 = 96$
$x \cdot 4 = 96 : 8$	$x \cdot 8 = 96 : 4$	$32 \cdot x = 96$	$12 \cdot 8 = 96$
$x \cdot 4 = 12$	$x \cdot 8 = 24$	$x = 96 : 32$	$96 = 96$ (T)
$x = 12 : 4$	$x = 24 : 8$	$x = 3$	
$x = 3$	$x = 3$		

Postupak rješavanja jednačina druga dva oblika ($a \cdot x \cdot b = c$ i $a \cdot b \cdot x = c$) je isti kao u prethodnom primjeru. Učenici će prihvatiti da je najlakši onaj način rješavanja jednačine kod kojih združujemo poznate činioce. U početku je potrebno od učenika zahtijevati da jednačinu rješavaju na tri načina uz obaveznu provjeru tačnosti rješenja, dok se kasnije taj zahtjev svodi na rješavanje jednačina na njima najlakši način.

U četvrtom, odnosno petom razredu ovi oblici jednačina se rješavaju u skupu trocifrenih, odnosno višecifrenih brojeva. Zato je potrebno izvršiti njihovo uopštavanje na sljedeći način:

		I način	II način	III način
I oblik:	$x \cdot a \cdot b = c \Rightarrow$	$(x \cdot a) \cdot b = c$	$(x \cdot b) \cdot a = c$	$(a \cdot b) \cdot x = c$
II oblik:	$a \cdot x \cdot b = c \Rightarrow$	$(a \cdot x) \cdot b = c$	$(a \cdot b) \cdot x = c$	$(x \cdot b) \cdot a = c$
III oblik:	$a \cdot b \cdot x = c \Rightarrow$	$(a \cdot b) \cdot x = c$	$(a \cdot x) \cdot b = c$	$(b \cdot x) \cdot a = c$

Jednačine sa složenim izrazima od dvije operacije dijeljenja mogu se javiti u tri oblika:

$\boldsymbol{x : a : b = c}$,

$\boldsymbol{a : x : b = c}$ i

$\boldsymbol{a : b : x = c}$

realizaciju jednačina sa dva dijeljenja najbolje je započeti rješavanjem brojevnih izraza sa dva dijeljenja, jer se analogno njima rješavaju i jednačine ovog tipa.

Primjer 5: Izračunaj vrijednost izraza $42 : 7 : 2 =$

Rješenje:

I način: $42 : 7 : 2 = (42 : 7) : 2 = 6 : 2 = 3$

II način: $42 : 7 : 2 = (42 : 2) : 7 = 21 : 2 = 3$

III način: $42 : 7 : 2 = 42 : (7 \cdot 2) = 42 : 14 = 3$

Jednačine sa dvije operacije dijeljenja mogu se rješavati na tri načina.

Primjer 6: Riješiti jednačinu $x : 9 : 3 = 2$

Rješenje:

I način	II način	III način	Provera
$x : 9 : 3 = 2$	$x : 9 : 3 = 2$	$x : 9 : 3 = 2$	$x : 9 : 3 = 2$
$(x : 9) : 3 = 2$	$(x : 3) : 9 = 2$	$x : (9 \cdot 3) = 2$	$54 : 9 : 3 = 2$
$(x : 9) = 2 \cdot 3$	$x : 3 = 2 \cdot 9$	$x : 27 = 2$	$6 : 3 = 2$
$x : 9 = 6$	$x : 3 = 18$	$x = 2 \cdot 27$	$2 = 2$ (**T**)
$x = 6 \cdot 9$	$x = 18 \cdot 3$	$x = 54$	
$x = 54$	$x = 54$		

Postupak rješavanja jednačina druga dva oblika ($a : x : b = c$ i $a : b : x = c$) je analogan prethodnom primjeru. Nakon urađenih više primjera jednačina sva tri oblika potrebno je izvršiti njihovo uopštavanje, npr.:

		I način	II način	III način
I oblik:	$x : a : b = c \Rightarrow$	$(x : a) : b = c$	$(x : b) : a = c$	$x : (b \cdot a) = c$
II oblik:	$a : x : b = c \Rightarrow$	$(a : x) : b = c$	$(a : b) : x = c$	$a : (b \cdot x) = c$
III oblik:	$a : b : x = c \Rightarrow$	$(a : b) : x = c$	$(a : x) : b = c$	$a \cdot:(x \cdot b) = c$

Dakle, jednačine sa složenim izrazima od dvije iste nepoznate najbolje je obrađivati uporedo sa izrazima sa dvije istovjetne operacije, kako bi se koristilo stečeno znanje o rješavanju izraza pri rješavanju jednačina. Posebno treba voditi računa da pri-mjeri jednačina sa dva dijeljenja i jednačina sa dva množenja imaju cjelobrojna rješenja. Kada se uvježbaju postupci rješavanja datih oblika jednačina sa složenim izrazima od dvije iste operacije na jednostavnijim primjerima, potrebno je rješavati tekstualne zadatke. Zadaci se mogu davati putem projekcije, na pripremljenim nastavnim listićima ili ih saopštavati usmeno.

3.5.1.2. Jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije

Realizacija jednačina sa složenim izrazima od dvije različite operacije se vrši uporedo sa rješavanjem brojevnih izraza sa dvije različite operacije ili neposredno poslije njih. Postupak rješavanja se zasniva na kombinaciji postupaka rješavanja jednačina sa sabiranjem, odnosno oduzimanjem i jednačina sa množenjem, odnosno dijeljenjem. Prilikom njihovog rješavanja treba obratiti pažnju na redosljed računskih operacija i prioritet zagrada. Nepoznata se javlja kao element sabirka, umanjenika, umanjioca, činioca, djeljenika i djelioca.

U jednačinama sa operacijama sabiranja i oduzimanja bez zagrada nepoznatu određujemo analizom jednačine. Prilikom određivanja nepoznate treba voditi računa da sabirci budu manji od zbira, odnosno umanjenik veći od umanjioca i razlike, a umanjilac manji od umanjenika. Kada odredimo nepoznatu stavljamo je u zagradu i pristupamo rješavanju jednačine.

Primjer 1: Riješi jednačinu $56 - x + 18 = 70$.

Rješenje:

$56 - x + 18 = 70$

$(\underline{56 - x}) + 18 = 70$

↓

nepoznata element sabirka

$(56 - x) = 70 - 18$

$56 - \underline{x} = 52$

nepoznati umanjilac

$x = 56 - 52$

$x = 4$

Provjera:

$56 - x + 18 = 70$

$56 - 4 + 18 = 70$

$52 + 18 = 70$

$70 = 70$ (T)

Primjer 2: Riješi jednačinu $34 : x + 3 = 20$

Rješenje:

$34 : x + 3 = 20$

$(\underline{34 : x}) + 3 = 20$

nepoznata element sabirka
(nepoznati sabirak sa nepoznatim djeliocem)

$(34 : x) = 20 - 3$

$34 : \underline{x} = 17$

nepoznati djelilac

$x = 34 : 17$

$x = 2$

Provjera:

$34 : x + 3 = 20$

$34 : 2 + 3 = 20$

$17 + 3 = 20$

$20 = 20$ (**T**)

Realizacija jednačina sa složenim izrazima od dvije različite operacije ima posebnu vrijednost, jer svojim sadržajem doprinosi razvoju matematičkog mišljenja. Učenici se, rješavajući date jednačine, navikavaju da zadatku prilaze analitički uvažavajući prioritet računskih radnji, množenja i dijeljenja u odnosu na sabiranje i oduzimanje.

Ovom prilikom ćemo navesti nekoliko oblika jednačina sa složenim izrazima od dvije različite operacije koje se rješavaju u četvrtom i petom razredu, npr.:

<u>Oblici jednačina sa složenim izrazima od dvije različite operacije:</u>

I $a \cdot x + b = c$
$x \cdot a + b = c$
$a + b \cdot x = c$
$a + x \cdot b = c$ → nepoznata element sabirka (nepoznati sabirak sa nepoznatim činiocem)

II $a \cdot x - b = c$
$x \cdot a - b = c$ → nepoznata element umanjenika (nepoznati umanjenik sa nepoznatim činiocem)

III $a - b \cdot x = c$
$a - x \cdot b = c$ → nepoznata element umanjioca (nepoznati umanjilac sa nepoznatim činiocem)

IV $x : a + b = c \ \ (a \neq 0)$ → nepoznata element sabirka (nepoznati sabirak sa nepoznatim djeljenikom)

$a : x + b = c$ → nepoznata element sabirka (nepoznati sabirak sa nepoznatim djeliocem)

$a + b : x = c$ → nepoznata element sabirka (nepoznati sabirak sa nepoznatim djeliocem)

$a + x : b = c$ → nepoznata element sabirka (nepoznati sabirak sa nepoznatim djeljenikom)

V $x : a - b = c$ → nepoznata element umanjenika (nepoznati umanjenik sa nepoznatim djeljenikom)

$a : x - b = c$ → nepoznata element umanjenika (nepoznati umanjenik sa nepoznatim djeliocem)

$a - x : b = c$ → nepoznata element umanjioca (nepoznati umanjilac sa nepoznatim djeljenikom)

$a - b : x = c$ → nepoznata element umanjioca (nepoznati umanjilac sa nepoznatim djeliocem)

3.5.2. Jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija

Analogno rješavanju jednačina sa složenim izrazima od dvije različite operacije, jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija (tri i više) se rješavaju neposredno poslije rješavanja složenih matematičkih izraza u kojima su zastupljene sve četiri računske operacije. Naime, učenici će lakše shvatiti postupak rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija, ako su dobro usvojili prioritet računskih radnji. Zato se rješavanje jednačina ovog tipa u četvrtom razredu vrši neposredno poslije rješavanja jednačina sa složenim izrazima od dvije različite operacije, jer se u osnovi postupak rješavanja ovih jednačina svodi na rješavanje prvo jednačina sa dvije, a zatim jednom operacijom sve do konačnog njenog rješenja. Rješavanje jednačina ovoga tipa u petom razredu vrši se na skupu prirodnih brojeva preko 1000, gdje se stečena znanja u četvrtom razredu obnavljaju, upotpunjuju i proširuju.

Dakle, postupak rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija je ”spoj” postupaka rješavanja jednačina sa sabiranjem i oduzimanjem i jednačina sa množenjem i dijeljenjem.

Realizacija jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija se svodi pri rješavanju na poznate oblike jednačina sa složenim izrazima od dvije operacije, a zatim na proste oblike jednačina sa jednom operacijom. Njihovo rješavanje zahtijeva obnavljanje više kontinuiranih radnji:

- uočavanje nepoznate,
- rješavanje jednačine,
- zapis rješenja i
- provjeru tačnosti rješenja.

Primjer 1: Riješi jednačinu $63 : 7 + x \cdot 3 = 21$.

Rješenje:
$$63 : 7 + x \cdot 3 = 21$$
$$9 + x \cdot 3 = 21$$
$$x \cdot 3 = 21 - 9$$
$$x \cdot 3 = 12$$
$$x = 12 : 3$$
$$x = 4$$

Provjera:
$$63 : 7 + x \cdot 3 = 21$$
$$63 : 7 + 4 \cdot 3 = 21$$
$$9 + 12 = 21$$
$$21 = 21 \quad (\mathbf{T})$$

Iz navedenog primjera se uočava da se jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija, izvršavanjem aritmetičkih operacija, svodi prvo na jednačinu sa složenim izrazima od dvije različite operacije, a zatim na prosti oblik jednačine sa jednom operacijom.

Jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija dosta su zastupljene u četvrtom i petom razredu. Njihovo rješavanje ima višestruku korist za učenike. Učenici uvježbavaju izvođenje aritmetičkih operacija, uviđaju zavisnost rezultata operacija od komponenti, upotpunjuju znanje o prioritetu zagrada i aritmetičkih operacija i sl.

3.6. PRIMJENA JEDNAČINA U RJEŠAVANjU TEKSTUALNO – PROBLEMSKIH ZADATAKA

Da bi kod učenika u početnoj nastavi matematike razvili sposobnost logičkog mišljenja i matematičkog rasuđivanja, snalažljivosti i preciznosti u radu, u nastavi se primjenjuju tekstualno – problemski zadaci. Primjena ovih zadataka kod učenika izaziva radoznalost, njihovu aktivnost podiže na viši nivo, a samim tim nastavu matematike čine kreativnom i interesantnom.

Primjena jednačina u rješavanju tekstualno – problemskih zadataka omogućuje učenicima da primijene stečena znanja u rješavanju konkretnih problemskih situacija, a ujedno ih osposobljava za samostalno proširivanje i produbljivanje matematičkog znanja. Tako se učenici podstiču na rad, tj. na samostalno otkrivanje rješenja i rješavanje problemske situacije. Zato učenicima treba kontinuirano postavljati problemske situacije. Naravno prilikom rješavanja tekstualno – problemskih zadataka primjenom jednačina treba voditi računa o zahtjevima koji se pred učenike postavljaju. Učenici treba da razumiju zadatak, a i da ulože ozbiljan napor da bi ga riješili, ali taj napor, odnosno zahtjev ne smije biti visoko iznad njihovih realnih intelektualnih mogućnosti. Zato su potrebne vještine nastavnika za planiranje i efikasno upravljanje aktivnostima učenika, da koriste potrebnu tehnologiju (Darling-Hammond, 2006).

Za uspješnu primjenu jednačina u toku rješavanja tekstualno – problemskih zadataka neophodno je ostvariti nekoliko ”koraka”:

- zapamćivanje zadatka;
- uočavanje i shvatanje poznatih i nepoznatih veličina;
- uočavanje i shvatanje uzajamne povezanosti poznatih i nepoznatih veličina;
- zapisivanje odgovarajuće jednačine (prevođenje govorne interpretacije zadatka na jezik matematike);
- rješavanje zapisane jednačine;
- provjeru tačnosti rješenja.

Ovdje je neophodno napomenuti da se primjena jednačina u rješavanju tekstualno – problemskih zadataka praktikuje u četvrtom i petom razredu u znatno većem obimu u odnosu na treći razred. Navešćemo nekoliko primjera mogućnosti korišćenja jednačina u rješavanju tekstualnih zadataka.

Primjer 1: Ivan je imao nekoliko sličica, u prodavnici je kupio još 19. Kada je sestri dao 20 ostalo mu je 36 sličica. Koliko je Ivan imao sličica?

Odgovarajuća jednačina:

$x + 19 – 20 = 36$
$(x + 19) = 36 + 20$
$x + 19 = 56$
$x = 56 – 19$

Rješenje: $x = 37$

Provjera:

$37 + 19 – 20 = 36$
$56 – 20 = 36$
$36 = 36$ (**T**)

Primjer 2: Na pijacu su dovezena tri kamiona banana. Na jednom kamionu je bilo 12500 kg, na drugom 16000 kg, a na trećem 14550 kg banana. Koliko je ukupno paketa banana bilo, ako svaki paket sadrži 25 kg banana?

Odgovarajuća jednačina: $25 \cdot x = 12\,500 + 16\,000 + 14\,550$
$25 \cdot x = 28\,500 + 14\,550$
$25 \cdot x = 43\,050$
$x = 43\,050 : 25$

Rješenje: $x = 1\,722$

Provjera: $25 \cdot 1\,722 = 12\,500 + 16\,000 + 14\,550$
$43\,050 = 43\,050$ (T)

Primjer 3: U školu u prirodi je otišlo u dvije brojčano jednake smjene 190 dječaka, a ostalo su djevojčice. Koliko je devojčica otišlo u školu u prirodi ako je u jednoj smjeni bilo ukupno 180 učenika?

Odgovarajuća jednačina: $(190 + x) : 2 = 180$
$190 + x = 180 \cdot 2$
$190 + x = 360$
$x = 360 - 190$

Rješenje: $x = 170$

Provjera: $(190 + 170) : 2 = 180$
$360 : 2 = 180$
$180 = 180$ (T)

4. TEORIJSKA RAZMATRANjA PROBLEMA SAVREMENOG PRISTUPA REALIZACIJI JEDNAČINA

Savremene tendecije na polju razvoja nauke i tehnike ne mogu zaobići ni nastavni proces kao jedan od najvažnijih koraka pokretačke snage savremenog razvoja čovječanstva.

Savremeno organizovana početna nastava matematike kao dio nastave u širem smislu te riječi je složena pojava koja objedinjuje znanja, misaone aktivnosti i stvaralačku inventivnost učenika i nastavnika u svom organizacionom obliku. Harmonija navedenih komponenti je preduslov za uspješnu nastavu u kojoj će učenici aktivno učestvovati, a nastavnici ih spretno voditi u razvoju matematičkog mišljenja. U istom odjeljenju učenici se ne biraju na način da formiraju homogenu grupu u odnosu na sposobnosti. U pitanju je heterogena grupa koja zahtijeva inkluzivan pristup. Iako istraživanja potvrđuju da inkluzivne intervencije koje važe u prosjeku ne znači da će biti uspješne u svakom slučaju za svakog učenika (Johnston, 2010) ipak treba uvijek voditi računa o individualnim mogućnostima i potrebama. Dobro razumijevanje nastavne prakse, razvijena komunikacija između nastavnika i između učenika i nastavnika, kao i izbor zadataka čine osnovu uspješog učenja (Olteanu, 2015).

Uspješnost savremeno organizovane početne nastave matematike zavisi od više činilaca među kojima su ključni: učenik, nastavnik i nastavni sadržaji. Intenzivan razvoj nauke i tehnike izazvao je za sobom pravi ”bum” u pogledu razvoja informacija. Mogućnost korišćenja njihovih različitih izvora s jedne i različiti saznajni kapaciteti učenika s druge strane toliko su neujednačeni da postaju ozbiljan problem za nastavnike u pogledu usaglašavanja i realizacije planiranih nastavnih sadržaja sa postojećim kognitivnim sposobnostima učenika. Djeca već u predškolskom periodu formiraju veliki broj početnih matematičkih pojmova i predstava tako da u školu dolaze s različitim nivoom predznanja. Zato prilikom upisa učenika u prvi razred osnovne škole izvjestan broj djece još ne shvata pojam broja, dok su druga djeca ovladala ne samo pojmom broja, već shvataju i njihove odnose ili pak uspješno izvršavaju računske radnje sabiranja i oduzimanja.

Matematički sadržaji su često predmet kritike šire javnosti. Kritika je pretežno upućena na račun težine matematičkih sadržaja i njihove neprimjerenosti sposobnostima i mogućnostima postignuća učenika. To se naročito odnosi na algebarske sadržaje ili konkretno na jednačine kao dio tih sadržaja. Zato su reformisani postojeći nastavni planovi i jednačine povučene iz prvog i drugog razreda, a zatim se zagovara povlačenje ovih sadržaja i iz trećeg razreda.

Budući da sadržaji o jednačinama zauzimaju veoma značajno mjesto u početnoj nastavi matematike to im se mora ozbiljnije prići u samoj realizaciji. Savremeno organizovana nastava matematike jednačinama pristupa ozbiljno, kako u njihovom neposrednom planiranju tako i u realizaciji ovih sadržaja u samom nastavnom procesu.

Uspješna realizacija jednačina u početnoj nastavi matematike zavisi, u prvom redu, od poznavanja i uvažavanja različitih individualnih sposobnosti učenika. Savremeni pristup realizaciji jednačina, uvažava saznanja do kojih se došlo istraživanjem individualnih i grupnih razlika među učenicima i nalaže da se ne samo programski sadržaji, nivoi njihove realizacije i zahtjevi prema učenicima, već i oblici, metode i organizacija vaspitno – obrazovnog rada usklade sa važnim individualnim i grupnim karakteristikama svakog učenika. Takav pristup realizaciji jednačina nastoji da tradicionalni oblik frontalne nastave zamijeni različitim modelima individualizovane nastave i učenja, kako bi se stvorile veće predispozicije za usvajanje ovih sadržaja i primjenu stečenih znanja u praktičnom rješavanju problemskih situacija iz svakodnevnog života.

Dakle, postojanje različitih individualnih i grupnih razlika u različitim sferama razvoja ličnosti učenika dovoljan je razlog za pokretanje inicijative da različitom sklopu individualnih i grupnih kognitivnih sposobnosti učenika treba obezbijediti različiti metodički pristup u realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike. Naime, poznavanje individualnih i grupnih kognitivnih mogućnosti svakog učenika doprinosi adekvatnom odmjeravanju sadržaja i zahtjeva njihovom stvarnom nivou postignuća. Takvu klimu moguće je postići u savremeno organizovanoj nastavi matematike, koja se ostvaruje kroz primjenu sljedećih pristupa:

- diferenciranoj nastavi,
- individualizovanoj nastavi,
- problemskoj nastavi,
- kibernetičkoj nastavi i
- aktivnoj nastavi.

Svaki od navedenih savremenih pristupa polazi od postojećih individualnih sposobnosti učenika u realizaciji nastavnih sadržaja o jednačinama, ali se međusobno razlikuju u stepenu individualizacije. Navedeni savremeni pristupi se toliko međusobno prožimaju da je teško povući granicu između njih. Uzmimo na primer aktivnu nastavu, ona u sebi sadrži podjednako međusobno prožetih elemenata diferencirane, individualizovane, problemske i kibernetičke nastave. Ovo se, naravno, odnosi i na ostale pristupe, jer cilj svih navedenih pristupa u realizaciji jednačina je da nastavu učini aktivnom, a to je jedino moguće, ako svaki učenik može da radi zadatke koji su mu ponuđeni. Na osnovu toga može se zaključiti da dosada i nemarnost iščezavaju ukoliko svaki učenik razumije zadatak koji rješava. Znači zadaci o jednačinama moraju biti individualizovani i diferencirani kako po sadržaju, tako i po zahtjevima.

Dakle, za razliku od tradicionalnog, savremeni pristup realizaciji jednačina sadrži sljedeće elemente:

- učenici rješavaju svoje zadatke prema svojim sposobnostima,
- učenici se osposobljavaju za uočavanje problema i njegovo rješavanje,
- podsticaj za dalji napredak je češći i efikasniji,
- vođenje učenika pravim putem, tj. ka pronalaženju rješenja,
- veću samostalnost i inicijativnost u radu.

Savremeno organizovana nastava matematike, svojim pristupima realizaciji jednačina, pretenduje na primjeni savremenih metoda, oblika i tehnologije rada. Otuda se u tako organizovanoj nastavi matematički sadržaji o jednačinama, iako apstraktni po svojoj prirodi, prilagođavaju intelektualnim sposobnostima učenika.

4.1. NEKA SAVREMENA SHVATANjA O RAZLIČITIM SPOSOBNOSTIMA UČENIKA

Saznanja do kojih su došla savremena istraživanja individualnih i grupnih razlika među učenicima nalažu da se ne samo programski sadržaji, nivoi njihove realizacije i zahtjevi, već i oblici, metode i organizacija vaspitno – obrazovnog rada usklade sa važnim individualnim i grupnim specifičnostima svakog učenika.

Jednačine su veoma apstraktni sadržaji do čijeg rješenja učenici treba da dolaze postupno uz vlastito angažovanje misaonih sposobnosti. Glavni činioci uspješne realizacije matematičkih sadržaja uopšte, pa i sadržaja o jednačinama, i školskog postignuća su različite predispozicije učenika. Potrebno je nastavu organizovati tako da podstičemo pismenost učenika u kojoj će rezultati biti mnogo bolji od uobičajenih (Kennedy & Shiel, 2010). Northrop i Killeen bavili su se okvirima za izgradnju rane pismenosti i vještina čitanja (Northrop & Killeen, 2013) jer su oni od posebnog značaja za razvoj obrazovanja učenika. Savremena organizacija nastave matematike sve više poklanja pažnju istraživanju učenika, njihovih kognitivnih sposobnosti. Uglavnom postoji saglasnost među istraživačima da individualne različitosti imaju presudnu ulogu za uspješnost nastavnog procesa.

Sva psihološka istraživanja pokazuju da se djeca iste starosne dobi međusobno razlikuju jer u svom razvoju prolaze kroz određene stadijume, ali se u njima ne zadržavaju isto vrijeme. Neka djeca se brže mentalno i fizički razvijaju od druge djece. Po ovim istraživanjima postoje spoljašnje i unutrašnje individualne razlike djece istog uzrasta. Konkretno, na stadijumu početnog školskog uzrasta spoljašnje individualne razlike se ispoljavaju u stavovima djece prema učenju u školi, a unutrašnje individualne razlike su sposobnosti učenika, njihove osobine ličnosti i sl.

Proučavajući individualne razlike djece u svom razvoju Pijaže je definisao osnovna četiri stadijuma (faze) kognitivnog razvoja:
- stadijum senzo – motorne iteligencije
- preoperacioni sadijum
- stadijum konkretnih operacija i
- stadijum formalnih operacija.

Na osnovu pomenutih stadijuma intelektualnog razvoja djeteta možemo objasniti zašto sva djeca u školi ne mogu u istom obimu i dubini usvajati nastavne sadržaje koji su planirani nastavnim planom i programom, bez obzira što su kalendarski približne starosti. Naime, svako dijete posjeduje različite psihofizičke sposobnosti u zavisnosti od kojih se različito zadržava u pomenutim razvojnim stadijumima. Tako se neko dijete može nalaziti u poodmaklom stadijumu konkretnih operacija, dok se drugo dijete može nalaziti na granici (na prelazu) tog stadijuma, a neko se opet može nalaziti u prethodnom preoperacionom stadijumu. Prirodno je da ovakve različitosti povlače za sobom i određene specifičnosti u organizaciji nastavnog procesa. Otuda, efikasnost nastavnog procesa zavisi od uvažavanja individualnih sposobnosti učenika.

Savremeni pristupi organizaciji nastavnog procesa i realizaciji matematičkih sadržaja polaze od novijih psiholoških saznanja osobina i sposobnosti ličnosti i teže da nastavu uravnoteže i prilagode realnim mogućnostima psihofizičkog razvoja učenika.

Istraživanja individualnih različitosti i sposobnosti rješavanja problema dovela su do identifikovanja različitih sposobnosti rješavanja problema. Kvaščev (1980) je ukazao na sedam identifikovanih sposobnosti rješavanja problema:

1. sposobnost manipulisanja simbolima i matematičkog rezonovanja,
2. osjetljivost za probleme,
3. sposobnost postavljanja i testiranja hipoteza,
4. sposobnost verbalnog shvatanja,
5. fleksibilnost mišljenja,
6. opšte rezonovanje i
7. faktor logičke evaluacije.

Istraživanja velikog broja autora ukazuju na činjenicu postojanja različitih kreativnih, kognitivnih i afektivnih sposobnosti kod sve djece. Pomenuta istraživanja pokazuju i veliku različitost u pogledu matematičkog znanja učenika, kako u početnoj nastavi tako i u starijim razredima osnovne, a pogotovu srednje škole. Veliki broj djece bez obzira što se nalazi u istom razredu nije, saglasno svom predznanju i intelektualnim sposobnostima, u mogućnosti da razumije matematički sadržaj koji se prezentuje na isti način i da ga usvoji u istom obimu, već im je potrebno različito metodički pristupiti kako bi ga adekvatno shvatili i usvojili. Znači, "na odeljenje treba gledati kao na grupu učenika nejednakih fizioloških osnova, fizičkog razvoja, intelektualnih i kreativnih sposobnosti, interpersonalističkih sklopova tih sposobnosti, sposobnosti učenja, motivacije, interesovanja, stavova i ostalih kognitivnih i konativnih struktura i procesa, opštih i posebnih znanja i drugih postignuća i individualnih obilježja" (Ilić, 1984:9). Savremeno organizovana nastava matematike mora uvažiti navedene individualne razlike i značajno modifikovati primjenu postojećih tradicionalnih oblika, metoda i tehnologije rada jednakih za sve učenike. Neophodno je otkrivati i primjenjivati novu strategiju u obrazovanju koja prevazilazi postojeće slabosti klasične frontalne razredne nastave.

Dakle, uvažavanje različitih sposobnosti učenika jedan je od ključnih uslova savremenosti nastave i efikasnosti njenih produkata. Izbor matematičkih zadataka u savremeno organizovanoj nastavi zavisi, u prvom redu, od učeničkih sposobnosti. Zadaci svojim sadržajem i stepenom svoje složenosti treba da budu primjereni individualnim sposobnostima učenika.

Nema sumnje da je uspjeh učenika u nastavi matematike uslovljen kvalitetom organizacije nastavnog procesa. Nastava u kojoj svaki pojedinac razvija svoje sposobnosti, bez obzira na stepen tih sposobnosti, daleko je kvalitetnija od nastave u kojoj samo nekoliko učenika postiže mnogo, a velika većina stagnira u razvoju zbog nemogućnosti praćenja nastave ili nezainteresovanosti za nju. Mnogi potencijalni talentovani matematičari još u početnoj nastavi izgube volju za matematičke sadržaje jer im se isti prezentiraju na "nerazumljiv" način ne pobuđujući njihova interesovanja (Dević, 1975:27).

Može se reći da se u poslednje vrijeme javlja sve veće interesovanje istraživača (teoretičara i praktičara) za proučavanje različitih sposobnosti učenika i mogućnosti prilagođavanja savremene nastave matematike njihovim sposobnostima.

4.2. POTREBA ORGANIZOVANjA NASTAVE MATEMATIKE NA RAZLIČITIM NIVOIMA TEŽINE

Heterogena intelektualna sredina u odjeljenju dovela je do sveobuhvatnijeg proučavanja ovog problema. U postojećem nastavnom procesu frontalnog rada, odmjerenog prosječnom učeniku, dosada je neprevaziđen problem kako onih koji brže rješavaju zadatke i usvajaju nove sadržaje tako i onih koji sporije uče. Prvi se dosađuju usljed neodmjerenosti zadataka (njihove lakoće), a drugi se obeshrabruju usljed nemogućnosti praćenja nastave (preteških zadataka) pa posustaju u radu. Pravo i jednih i drugih na adekvatan vaspitno – obrazovni tretman pokušava se nadoknaditi tzv. dodatnim i dopunskim nastavnim radom. Međutim, dodatna i dopunska nastava nije dovoljno efikasna pa samim tim nije ni rješenje za postojeće probleme koji se javljaju u redovnoj nastavi. Rješenje se nalazi u diferencirano organizovanoj nastavi koja nastoji da matematičke sadržaje, iako apstraktne po svojoj prirodi, prilagodi kognitivnim sposobnostima svakog učenika, naravno u granicama njihovih intelektualnih mogućnosti. To znači da se određeni matematički sadržaji mogu različito interpretirati i predstaviti učenicima.

Budući da je svaki učenik individua za sebe, tj. spoj različitih psiho – fizičkih struktura koje ga čine različitim od drugih to je neophodno, u prvom koraku, prilagoditi nastavne sadržaje njihovim različitim nivoima saznajnih sposobnosti. U takvoj klimi omogućuje se učenicima aktivno učešće u rješavanju matematičkih zadataka, bilo da se radi o istim ili različitim zadacima, čime nastava matematike poprima dimenziju moderne nastave.

Svi učesnici nastavnog procesa, neposredni i posredni, od onih koji ga organizuju preko neposrednih realizatora (nastavnika) pa do posrednih aktera, svjesni su činjenice da je neophodno mijenjati nastavni proces, postojeće odnose u nastavi, sadržaje, oblike i metode rada. Savremena organizacija nastave matematike sa svim svojim pristupima podstiče nastavnike da ih primjenjuju u realizaciji matematičkih sadržaja, jer ovako organizovana nastava motiviše učenike da ulažu maksimalne napore u radu, a samim tim postignu veći kvalitet znanja. Mandić (1972) smatra da se materijalna ulaganja i napori koji se čine u obrazovanju brzo isplate zbog toga što u relativno kratkom vremenskom razdoblju pokažu pozitivne efekte u kvalitetu organizacije i izvođenja nastave.

Diferencirani pristup organizaciji nastave matematike na više nivoa težine polazi od dijagnoze postojećih znanja i sposobnosti učenika i omogućava podjelu učenika prema utvrđenim nivoima znanja i sposobnosti za usvajanje novih matematičkih znanja. Ovako organizovana nastava matematike pruža veću šansu učenicima da iskoriste postojeće mogućnosti i otkriju latentne sposobnosti kreativnog matematičkog mišljenja. Učenici se na taj način motivišu na sopstvenu aktivnost u rješavanju matematičkih problema.

Diferenciranim pristupom organizaciji nastave matematike nastoje se prevazići ograničenosti postojeće nastave koje proističu iz uniformnosti frontalnog pristupa rješavanju problemskih zadataka. Zadaci koje učenici rade ne bi trebalo da budu jednake težine, a pogotovu od učenika se ne može zahtijevati da postavljene zadatke rade istim tempom. Ne mogu se postići istovjetni rezultati svih učenika, a naročito ne u istom vremenskom razdoblju.

Dakle, tradicionalna nastava pruža male mogućnosti da se svaki učenik razvija prema svojim predispozicijama. Iako su saznanja o individualnim i grupnim razlikama učenika dosta stara njima se ipak nije pridavala važnost koja im realno pripada, pa otuda se ne treba ni čuditi zašto su izostale mogućnosti optimalnog razvoja intelektualnih sposobnosti učenika. Da bi prevazišli pomenute slabosti klasične nastave neophodno je učenicima primjeriti zadatke njihovim realnim sposobnostima, tj. diferencirati ih po nivoima težine.

Potreba organizovanja nastave matematike na različitim nivoima težine proizašla je iz:

- novijih saznanja o individualnim razlikama među učenicima,
- novije strategije obrazovnog sistema,
- novijeg metodološkog pristupa i
- novije obrazovne tehnologije.

Novija saznanja o individualnim razlikama među učenicima iste starosne dobi krucijalno je pitanje za organizaciju savremene škole. Savremena škola se mora temeljiti na realnim individualnim različitostima u pogledu inteligencije, specifičnih sposobnosti, motivacionih, emocionalnih, socijalnih i drugih osobina ličnosti jer se sve to odražava na školsko postignuće. Nastava koja uvažava pomenute različitosti obezbeđuje optimalnu relaksaciju učenika u nastavnom procesu. Učenici rade zadatke koje razumiju i razvijaju matematičke sposobnosti shodno svojim realnim mogućnostima.

Dakle, strategija savremene škole u eri intenzivnog razvoja nauke i tehnike i primjene matematičkih znanja u svakodnevnom životu mora suštinski prići reorganizaciji i modernizaciji nastave matematike. Posebnu pažnju treba usmjeriti na stvaranje optimalnih uslova za diferencijaciju jer su individualne razlike među učenicima u tendeciji stalnog porasta.

5. *MODELI DIFERENCIRANOG PRISTUPA REALIZACIJI JEDNAČINA*

(organizacija diferenciranog rada u početnoj nastavi matematike)

Kao reakcija na uvažavanje različitih karakteristika učenika kao što su uzrast, inteligencija, predznanje, tempo učenja u nastavi nastala je potreba za diferencijacijom sadržaja, oblika i metoda rada u procesu realizacije matematičkih sadržaja, koja ima za cilj da kod učenika maksimalno iskoristi i razvije postojeće intelektualne sposobnosti (Zech, 1999).

Podjela učenika na razrede predstavlja diferencijaciju po uzrastu i u dosadašnjoj nastavnoj praksi prepoznatljiva je kao spoljašnja diferencijacija. Ovakvim vidom diferencijacije postiglo se dosta, ali ne i onoliko koliko to nalažu postojeće individualne različitosti učenika istog uzrasta. Zbog toga se često pribjegava transformaciji, odnosno diferencijaciji postojeće uzrasne kategorije učenika na manje potkategorije ili tzv. unutrašnjoj diferencijaciji.

Kad je riječ o unutrašnjoj diferencijaciji učenika u početnoj nastavi matematike naročito se skreće pažnja na uvažavanje razlika u pogledu ostvarenog uspjeha u rješavanju zadataka. U početnoj nastavi matematike se te razlike djelimično razrađuju kroz izvjesne varijacije u ponudi nastavnog gradiva (sadržajna diferencijacija) kroz različitu motivaciju, različite zadatke i kroz različite vrste pomoći i sredstava (za učenje). Svakom učeniku u početnoj nastavi matematike omogućiće se individualno napredovanje i uvažiti njegove predispozicije, ako se izvrši valjana sadržajna diferencijacija, naravno povezana sa uobičajenim razumljivim materijalom za učenje više orijentisanim na samostalno učenje. U svakom slučaju cilj diferencijacije je da se učeniku pomogne da savlada, odnosno usvoji planirani nastavni sadržaj kroz različite nivoe pomoći koji uključuju različit stepen primjene očiglednosti i motivacije.

5.1. SUŠTINA DIFERENCIJACIJE NASTAVE MATEMATIKE

Novija istraživanja iz oblasti psihologije i pedagogije djeteta ukazuju na veliku grešku postojeće školske pedagogije koja se, uglavnom, orijentiše na prosječne sposobnosti učenika, zanemarujući objektivnu individualnost. Naučna otkrića o objektivnim razlikama među učenicima istog uzrasta dovela su do sveobuhvatnijeg sagledavanja postojeće nastavne prakse i njenog transformisanja ka modernoj diferenciranoj nastavi. Dakle, jedna od inovacija moderne nastave matematike je diferencirana nastava. Ona ne samo da doprinosi potpunijem razvoju matematičke kreativne sposobnosti učenika kao bitnog elementa njegove stvaralačke djelatnosti, već i omogućava potpunije planiranje, realizovanje i verifikovanje vaspitno – obrazovnog rada u početnoj nastavi matematike.

U diferenciranoj nastavi matematike neophodno je planirati, organizovati i realizovati nastavni program koji polazi od realnih predispozicija, interesovanja i potreba svakog učenika. Potrebno je podstaći razvoj učeničke postojeće matematičke sposobnosti i stvoriti uslove za njihovo aktivnije uključivanje u nastavni proces. Da bi se to postiglo nužno je izabrati adekvatne nastavne metode kojim bi se diferencirani matematički sadržaj prilagodio različitim učeničkim sposobnostima, mogućnostima i interesovanjima.

"Savremena nastava matematike podrazumeva, sa jedne strane, uvažavanje individualnih i grupnih razlika među učenicima, a sa druge strane nudi velike mogućnosti za razvoj njihovih pozitivnih osobina i sposobnosti. To znači da metodika nastave matematike, uz princip svesne aktivnosti, ističe kao značajan didaktički princip diferencijaciju i individualizaciju, koji obavezuje da se posebno u osnovnoj školi, primenjuju nastavni modeli usklađeni sa naučno priznatim razlikama među učenicima" (Petrović. 1997:110).

Dakle, svrha diferencijacije je, bez obzira što razni autori je različito definišu, zavisno od toga da li stavljaju u prvi plan organizacione, sadržajne ili didaktičke aspekte, da učenicima, saglasno njihovim sposobnostima, mogućnostima i interesovanjima, obezbijedi uslove za uspješnije napredovanje. U tom smislu diferencijacija potpomaže brži i prosperitetniji razvoj i napredovanje ljudske civilizacije.

Budući da matematika kao predmet u početnoj nastavi zauzima centralno mjesto to se primjenom diferencijacije u realizaciji njenih sadržaja želi transformisati postojeća, nedovoljno efikasna, nastava matematike koja se ogleda u uniformnosti. Naime, strategija diferencirane početne nastave matematike je aktivno uključivanje svih učenika u nastavni proces u privremeno ili stalno profilisane približno homogene grupe. Te grupe se formiraju na osnovu predznanja, sposobnosti, interesovanja, tempa napredovanja i sl. Znači da je za realizaciju diferencirane nastave matematike potrebno obezbijediti odgovarajuće diferencirane nastavne programe na osnovu kojih će se izvršiti višesmjerno planiranje i diferenciranje sadržaja i zahtjeva. Primjena diferenciranih zadataka u početnoj nastavi matematike prilagođenih učenicima različitih sposobnosti i brzine napredovanja predstavlja takvu relaksaciju u nastavi koja nastavne sadržaje prilagođava kognitivnim mogućnostima učenika.

5.2. DIFERENCIRANjE PROGRAMSKIH SADRŽAJA I ZAHTJEVA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Nastojanje da se početna nastava matematike uskladi sa naučno priznatim razlikama među učenicima proizilazi iz:

- novijih naučnih saznanja o sposobnosti i osobinama ličnosti djeteta ovog uzrasta, te njihovim individualnim razlikama, utvrđenih u raznim oblastima psihičkog života;
- novijih teorijsko – metodičkih saznanja o mogućnosti organizovanja nastave na diferenciranim programskim sadržajima i zahtjevima;
- novije strategije nastave, zasnovane na uvažavanju prethodno pomenutih naučno priznatih saznanja o individualnim i grupnim razlikama među učenicima, kao i saznanja o psihološkoj prirodi i zakonitostima učenja, koja bitnije mijenja ulogu nastavnika i učenika u nastavnom procesu uz adekvatan odabir oblika i metoda rada kao i funkcionalno korišćenje neophodne nastavne tehnologije.

U intelektualnoj, motivacionoj, afektivnoj i socijalnoj sferi utvrđene su velike razlike među učenicima kako u pogledu tempa i nivoa razvoja intelektualnih sposobnosti, tako i u pogledu motivisanosti učenika za matematičke sadržaje. Utvrđene su razlike i u stavovima učenika prema učenju i samom predmetu matematika i sl.

Dakle, opravdan je zahtjev za primjenu diferencirane nastave matematike zasnovane na diferenciranim programskim sadržajima. Da bi se diferencirali programski sadržaji matematike mora se poći od propisanog programa, cilja i zadataka nastave matematike, koji su u našem obrazovnom sistemu za početnu nastavu matematike dobro odmjereni. No uprkos činjenici da su programski sadržaji, zadaci i zahtjevi u početnoj nastavi matematike odmjereni uzrasnoj dobi djeteta, to ne znači da su ti sadržaji, odnosno zadaci i zahtjevi primjereni kognitivnim mogućnostima svih učenika istog uzrasta. Znači opravdani su zahtjevi da se postojeći nastavni sadržaji, zadaci i zahtjevi diferenciraju prema kategoriji postignuća različitih grupa učenika istog razreda.

Dakle, iz metodičkih i kognitivnih potreba i mogućnosti učenika opravdano je utvrditi individualne i grupne razlike učenika istog razreda i na osnovu toga diferencirati programske sadržaje, zadatke i zahtjeve. Za uspješnu diferencijaciju matematičkih sadržaja, posebno jednačina, o čemu će u daljem radu biti riječi, neophodno je stvoriti određenu problemsku situaciju, a zatim same sadržaje diferencirati na tri ili više nivoa, zavisno od diferenciranih grupa učenika. Istraživanja su pokazala da se, s obzirom na nivo postignuća, u svakom razredu mogu diferencirati najmanje tri grupe učenika i to:

- učenici sa izuzetnim stepenom postignuća (odlični učenici),
- učenici sa prosječnim stepenom postignuća (vrlodobri i dobri učenici),
- učenici sa nižim stepenom postignuća (učenici sa lošijim uspjehom).

Svaka od navedenih grupa ima svoju specifičnost i zahtijeva njeno bliže upoznavanje kako bi se adekvatno odmjerili matematički sadržaji i omogućio nesmetan kognitivni i kreativni razvoj pripadnika grupe. U toku realizacije sadržaja treba stvoriti takvu ”klimu” u razredu gdje učenici istovremeno rješavaju više zadataka koji se razlikuju po težini, ali koji zahtijevaju približno jednake misaone napore od učenika kojima su namijenjeni. Tako, recimo, jedan matematički zadatak namijenjen učenicima koji u znatno manjem obimu usvajaju matematičke sadržaje neće predstavljati poteškoću za odlične učenike, pa je stoga njima potrebno davati problemske zadatke koji zahtijevaju izvjesnu misaonu aktivnost na višem nivou znanja.

U nastavnoj praksi je moguće sprovesti diferencijaciju matematičkih sadržaja na sljedeći način:

- Diferenciranjem matematičkih zadataka. Svaka grupa učenika dobija zadatke različite težine, odmjerene njihovom stvarnom nivou postignuća;
- Diferenciranjem zahtjeva. Svaka grupa učenika dobija zadatke koji su diferencirani na nivou zahtjeva (šta se treba uraditi);
- Diferenciranjem nivoa pomoći. Učenici svih grupa rade iste zadatke, ali u toku rješavanja dobijaju određenu pomoć koja se razlikuje zavisno od grupe kojoj pripadaju.

Dakle, diferenciranje matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike se vrši na osnovu uvida u mogućnosti postignuća svakog učenika. Tako se stvara potrebna konfliktna situacija u razredu prilagođena određenoj kategoriji učenika koja ih podstiče na samostalnost i inicijativnost u radu. Naravno, pri diferenciranju matematičkih sadržaja i izboru zadataka ne treba zaboraviti ni ”zonu narednog razvoja” kako bi se smanjio raskorak između onoga što učenik zna i onoga što može da postigne zahvaljujući tom predznanju. Na taj način se sprečava neuspjeh učenika u početnoj nastavi matematike, s jedne, a postiže optimalni razvoj matematičkog mišljenja, s druge strane.

5.3. OBLICI RADA U DIFERENCIRANOJ POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Osnovno polazište diferencirane početne nastave matematike je organizacija i izvođenje na različitim nivoima težine. To je, ustvari, preduslov za primjenu savremeno organizovanih metoda i oblika rada. Zavisno od broja učenika u odjeljenju postojeća metodika nastave matematike prepoznaje tri oblika rada: frontalni, grupni i individualni, a u okviru grupnog oblika rada može se izdvojiti rad u parovima. Diferencirana početna nastava matematike, takođe, ne zapostavlja ni jedan od pomenutih oblika rada prepoznatljiv u klasičnoj nastavi. Međutim, diferencirana početna nastava matematike iako prepoznaje sve pomenute oblike rada ona ih u različitom stepenu primjenjuje. Tako, na primjer, frontalni rad je u ovoj nastavi sveden na minimum, dok je grupni i individualni oblik rada zastupljen u većem stepenu. To je i očekivano ako se uzme u obzir izmijenjena pozicija nastavnika i učenika u ovako organizovanoj nastavi. S obzirom na cilj i predmet istraživanja ovog rada, razmotrićemo mogućnosti primjene navedenih oblika rada u modelima diferencirane nastave matematike, uzimajući pri tome u obzir unutrašnju diferencijaciju.

U diferenciranoj početnoj nastavi matematike frontalni oblik rada je našao svoju primjenu. Ovaj oblik rada se iz objektivnih okolnosti (ekonomičnosti s obzirom na utrošeno vrijeme i sl.) ne može zapostaviti ni u nastavi na različitim nivoima težine. Iako ovaj oblik rada nije pogodan za diferenciranu nastavu matematike, ”ipak, i u najnepovoljnijim uslovima, kada jedan nastavnik frontalno radi sa više od trideset učenika, postoje mogućnosti diferencijacije i individualizacije, uz diferencirane programske sadržine i zahteve” (Petrović, 1997:115).

Grupni oblik rada uz primjenu pomoćnih nastavnih sredstava (nastavni listići, višeslojne folije i sl.) u diferenciranoj početnoj nastavi matematike je dosta čest. Efikasnost primjene pomenutih nastavnih sredstava zavisi od broja učenika pa se u cilju diferencijacije i individualizacije nalaže podjela odjeljenja sa većim brojem učenika na grupe. Učenici podijeljeni u grupe na nivou iste grupe rješavaju zadatke približno iste težine.

Grupni oblik rada u diferenciranoj početnoj nastavi matematike može se ostvariti u dvije varijante:

- podjelom učenika na grupe prema iskazanim sposobnostima usvajanja matematičkih sadržina, tj. unutar grupe se rješavaju zadaci iste težine i
- podjelom učenika na grupe nezavisno od njihovih sposobnosti usvajanja matematičkih sadržina, a zatim se unutar grupe izvrši diferencijacija prema uočenim učeničkim predispozicijama, tj. unutar grupe se rješavaju zadaci različite težine.

S obzirom na ekonomičnost vremena, energije i nastavnih sredstava više se pribjegava prvoj varijanti grupnog oblika rada. Naime, mnogo je praktičnije i lakše pripremiti nastavu za unaprijed diferencirane učeničke grupe, gdje unutar grupe učenici dobijaju homogena zaduženja.

Dakle, ”u uslovima diferenciranih programskih sadržina i zahteva početne nastave matematike postoje brojni razlozi koji nas opredeljuju za podelu na homogene grupe, u skladu sa nivoima diferenciranja” (Petrović, 1997:116). Najčešće se u odjeljenju, prema sposobnostima učenika za praćenje i usvajanje matematičkih sadržaja, mogu izdvojiti tri grupe učenika, pa se, otuda, najčešće primjenjuje diferenciranje na tri nivoa prema minimalnim, optimalnim i maksimalnim zahtjevima.

Individualni rad učenika je ne samo poželjan već i s obzirom na lakoću njegovog individualizovanja u velikom stepenu zastupljen u diferenciranoj početnoj nastavi matematike. Primjena ovog oblika rada se najčešće ostvaruje korišćenjem više nastavnih listića ili drugog sličnog didaktičkog materijala. Ovaj oblik rada se naročito primjenjuje u korišćenju savremene nastavne tehnologije.

Budući da diferencirana početna nastava matematike zahtijeva primjenu savremene nastavne tehnologije, to je u cilju diferencijacije i individualizacije od izuzetnog značaja obrazovni softver, koji pruža velike mogućnosti kompjuterske tehnike u zadovoljavanju principa diferencijacije i individualizacije. To znači da su primjenom kompjutera u početnoj nastavi matematike stvoreni uslovi za realizaciju dva modaliteta individualnog oblika rada i to:

- individualni oblik rada učenika pod kontrolom nastavnika i
- samostalni oblik rada učenika.

Navedeni oblici rada su, dakle, našli svoju primjenu u diferenciranoj početnoj nastavi matematike. Skoro da nema časa matematike gdje se u cilju diferencijacije i individualizacije ne smjenjuju pomenuti oblici rada. Na svakom času primjene modela diferencirane realizacije matematičkih sadržaja kombinuju se najmanje dva oblika rada (frontalni i grupni, frontalni i individualni i sl.).

5.4. METODE RADA U DIFERENCIRANOJ POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Klima ili atmosfera koja za vrijeme nastave vlada u odjeljenju kao i postupci rada nastavnika i učenika u toku realizacije cilja i zadataka nastave matematike od izuzetnog su značaja za misaono angažovanje i usvajanje matematičkih sadržaja od strane učenika. Uspješan nastavni rad i veća aktivnost učenika su direktno uslovljeni stepenom razumijevanja nastavnih sadržaja.

Svi načini i postupci rada, kako nastavnika tako i učenika, na planu realizacije cilja i zadataka nastave matematike u stručnoj literaturi se različito određuju i klasifikuju zavisno od kriterijuma koji se uzme za njihovu klasifikaciju. Adekvatan izbor postupaka rada je bitan preduslov za povećanje nivoa postignuća učenika.

Prema savremenoj metodici nastave matematike sve nastavne metode možemo podijeliti u dvije grupe:

- tradicionalne nastavne metode i
- savremene nastavne metode.

U tradicionalne nastavne metode ubrajamo:

- verbalno – tekstualne,
- ilustrativno – demonstrativne i
- laboratorijsko – eksperimentalne.

U savremene nastavne metode ubrajamo:

- kibernetičku metodu,
- programiranu nastavu,
- problemsku nastavu i
- nastavu na više nivoa težine.

U okviru svake navedene metode mogu se razlikovati i izdvojiti posebni metodski oblici i pojedinosti. Pravilnim izborom i primjenom matematičkih metoda, njihovih metodskih oblika i pojedinosti olakšavamo kod učenika razvoj matematičkog mišljenja i računskih sposobnosti i navika. Pojedine nastavne metode i njihovi različiti oblici pružaju manje mogućnosti za diferenciranu nastavu matematike pa se otuda i manje primjenjuju u diferenciranoj početnoj nastavi matematike.

Verbalno – tekstualne metode, odnosno njihovi metodski oblici se mogu koristiti u pojedinim segmentima diferencirane početne nastave matematike. Istina verbalni metodski oblici (usmeno izlaganje, razgovor, pričanje, predavanje i sl.) su manje primjenljivi od tekstualnih metodskih oblika u diferenciranoj nastavi. Znači tekstualni metodski oblici (rad sa udžbenikom, nastavnim listićima i sl., pismeni radovi i rješavanje zadataka i dr.) za ovu nastavu se diferencirano pripremaju i primjenjuju bez većih teškoća. Naročito pismeno rješavanje matematičkih zadataka nastavnik može koristiti u diferenciranoj nastavi, ali ih prethodno mora diferencirati uz pomoć dodatnih uputstava i objašnjenja.

Ilustrativno – demonstrativne metodske oblike uz korišćenje slika, crteža, tablica, grafikona, predmeta, modela i sl. moguće je primjenjivati u diferenciranoj početnoj nastavi matematike ukoliko se prethodno prilagodi ovom modelu nastave. Nastavnik ove metodske oblike može primjenjivati uz korišćenje dodatnih uputstava i objašnjenja.

Laboratorijsko – eksperimentalna metoda može se primjenjivati u diferenciranoj početnoj nastavi matematike uprkos činjenici da apstraktnost matematičkih pojmova isključuje eksperimente i manipulacije sa njima u fizičkom smislu. Međutim, upotreba didaktičkog materijala, kao npr.: logičkih blokova, štapića, računaljki i drugih učila i pomagala, a naročito upotreba računara i obrazovnog softvera u nastavi matematike sadrži u sebi elemente laboratorijsko – eksperimentalnog rada. Na osnovu toga ovoj metodi pripada značajno mjesto u diferenciranoj početnoj nastavi matematike.

Metoda kibernetike u diferenciranoj početnoj nastavi matematike je našla veliku primjenu. Formiranje novih matematičkih pojmova, operacija, relacija i struktura odvija se prema shemi upravljanja. Kibernetska metoda upravlja i reguliše kako tehnologiju nastave tako i efekte same nastave matematike i to diferencirano, tj. uz uvažavanje individualnih razlika među učenicima. Da bi se ova metoda efikasno sprovela u nastavi matematike nastavnik treba sistematski da prati ponašanje i napredovanje učenika pojedinačno i grupno. Na taj način nastavnik organizuje i realizuje matematičke sadržaje na različitim nivoima težine. Tako nastava matematike postaje fleksibilnija i raznovrsnija što je uz primjenu moderne računarske tehnike i obrazovnog softvera čini još efikasnijom.

Programirana nastava, s obzirom na tempo učenja, pruža velike mogućnosti u diferenciranju programskih sadržaja nastave matematike. Programiranu nastavu matematike karakteriše samostalan rad učenika na savlađivanju određenih matematičkih zadataka (sadržaja) koji su primjenom razgranatih ili kombinovanih programa diferencirani. Suština programirane nastave je u raščlanjivanju sadržaja (zadataka) na manje cjeline (porcije) koje sadrže kraća objašnjenja sa postavljenim pitanjem na koje treba odgovoriti. Ukoliko učenik tačno odgovori prelazi na sljedeću cjelinu, a ukoliko učenik nije tačno odgovorio upućuje se na ponovno izučavanje iste ili prethodne cjeline.

Nastavni rad primjenom programirane nastave može se organizovati i sprovesti putem dva sistema:

- linearnog sistema i
- razgranatog (račvastog) sistema

Linearni sistem, koji se vezuje za američkog psihologa Skinera, omogućava uglavnom individualni tempo rada učenika, dok cilj, zadatak i sadržaj ostaju isti za sve učenike. Ovde se svaka programska cjelina dijeli na dva dijela (lijevi i desni). Na lijevoj strani su data objašnjenja i tumačenja, a na desnoj su odgovori koje učenik upoznaje tek pošto odgovori na pitanje.

Krauderov razgranati (račvasti) sistem omogućava individualizaciju ne samo tempa rada već i sadržaja nastave primjenom tzv. razgranatih ili kombinovanih programa. Primjenom ovog sistema učenik se podrobnije informiše, a samim tim i više motiviše na razmišljanje. Ovdje programske cjeline sadrže pitanja sa više odgovora od kojih je samo jedan tačan, a ostali netačni. Netačni odgovori se biraju iz domena najverovatnije očekivanih odgovora od pojedinih učenika i kao takvi predstavljaju najvjerovatnije greške koje se mogu pojaviti u odgovoru kod učenika. Svaki netačan odgovor slijedi informacija na osnovu koje učenik dobija detaljnije objašnjenje na osnovu kojeg se ispravlja greška.

S obzirom da Krauderov sistem pruža mogućnosti diferencijacije matematičkih sadržaja, to je očigledno povoljniji za primjenu u diferenciranoj početnoj nastavi matematike. Ovako izrađene programe treba da pripremaju visoko stručne ekipe ili specijalizovane institucije uz primjenu savremene kompjuterske tehnologije.

Problemska nastava se u izuzetno velikom stepenu može primjenjivati u diferenciranoj početnoj nastavi matematike. Učenik usvaja matematičke sadržaje rješavanjem određenih problema koji su međusobno objedinjeni širim problemom. Znači da postavljeni problemi koji se razrješavaju moraju biti tako odmjereni i komponovani da izazivaju nove ideje i nove probleme što je pokazatelj dobrog heurističkog vođenja učenika.

Problemi za učenike predstavljaju neku novinu i stavljaju ih u tzv. problemsku situaciju, koja nastaje zbog prisutne protivurječnosti sadržine u problemu, a kod njih samih se pobuđuje interesovanje i želja za razrješavanjem problemske situacije. ”U početnoj nastavi matematike problemska situacija se najčešće stvara realnom i zanimljivom pričom, a matematičko modelovanje, koje sledi iza nje, ne sme zaseniti rešavanje problema. Pri tome treba imati u vidu da u tom dobu nije akcent na složenosti u matematičkom problemu, već na nečem korisnom, nepoznatom, a istovremeno zanimljivom“ (Petrović, 1997:118). Cilj problemske nastave je da učenici stiču znanja koja će biti primjenjiva u novim problemskim situacijama gde će se ne samo potvrđivati već i proširivati.

Diferencirana priprema i obrada matematičkih sadržaja primjenom problemske nastave mora proći kroz nekoliko faza:
- stvaranje problemske situacije i formiranje problema,
- postavljanje hipoteza;
- dekompezacija i rješavanje problema;
- analiza rezultata, izvođenje zaključaka i generalizacija i
- primjena stečenih znanja.

Dakle, ”sposobnost upoznavanja i procenjivanja mogućnosti, potreba, nivoa apstrakcije i predznanja učenika značajna je u svim fazama pripreme i izvođenja nastavnog rada“ (Janković, 1999:57).

Nastava na više nivoa težine je u savremeno organizovanoj nastavi najpoznatiji i najsigurniji put za ostvarivanje ideje diferencijacije i individualizacije nastave. U nastavnoj praksi moguća je nastava na više nivoa težine, ali se iz praktičnih razloga najčešće koristi nastava na tri nivoa težine. Kad je riječ o početnoj nastavi matematike zadaci se diferenciraju na tri nivoa težine. Istraživanja su pokazala da se najbolji rezultati postižu ako su postavljeni zahtjevi učenicima nešto iznad njihovih mogućnosti, tj. u zoni narednog razvoja. Na taj način se ne sputavaju učeničke sposobnosti, već, naprotiv, podstiče permanentni razvoj matematičkih sposobnosti učenika. Matematički sadržaji pružaju velike mogućnosti za primjenu diferencirane nastave na više nivoa težine. Skoro da nema sadržaja koji se ne bi mogao diferencirati po navedenom kriterijumu.

Neophodno je još pomenuti da se problemska i nastava na više nivoa težine toliko međusobno prožimaju da je skoro nemoguće razgraničiti ih u bilo kojem segmentu. Tako se budućnost diferencirane početne nastave matematike nalazi u primjeni problemske nastave organizovane na tri ili više nivoa težine.

5.5. NASTAVNA TEHNOLOGIJA U DIFERENCIRANOJ POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Za realizaciju diferencirane početne nastave matematike neophodno je obezbijediti savremenu nastavnu tehnologiju. Imperativ diferencirane početne nastave matematike je da se nastava matematike organizuje tako da omogući učenicima ne samo da primjenjuju stečeno znanje u praksi, već i da osposobi učenike za samostalno proširivanje i produbljivanje matematičkog znanja.

Nastavnik uz primjenu adekvatnih nastavnih sredstava i pomagala može uspješno realizovati matematičke sadržaje po modelu diferencirane nastave. Uz primjenu nastavnih listića ili pak grafoskopa i višeslojnih grafofolija moguće je istovremeno ponuditi više zadataka različite težine. Primjena grafoskopa i višeslojnih grafofolija omogućuje istovremeno nastavniku i učenicima da ispred sebe imaju zadatke, odnosno probleme koje treba rješavati, te je i mogućnost davanja instrukcija za njihovo rješavanje veća i jednostavnija.

Dakle, koristeći navedena sredstva i pomagala obezbeđuje se na jedan adekvatan način sticanje planiranog fonda matematičkog znanja neophodnog za taj uzrast učenika. Taj fond znanja se razlikuje i kvalitativno i kvantitativno. On se kreće od mogućnosti rješavanja prostih zadataka (zadaci sa jednom računskom radnjom) preko rješavanja složenih matematičkih zadataka (zadaci sa više računskih radnji, odnosno operacija) pa do kreativnog sastavljanja i rješavanja matematičkih problemskih zadataka.

Stepen efikasnosti primjene nastavnih listića i višeslojnih folija u cilju diferencijacije obrnuto je srazmeran brojnosti učenika. Iz tog razloga učenike jednog odjeljenja dijelimo na manje grupe.

Mogućnost primjene savremene nastavne tehnologije i kompjutera u diferenciranoj početnoj nastavi matematike je velika. ”Svaki kvalitetan obrazovni softver mora i može iskoristiti ogromne mogućnosti kompjuterske tehnike u zadovoljavanju principa diferencijacije i individualizacije nastave matematike” (Petrović, 1997:115). Rad učenika sa kompjuterima varira od samostalnog rada do rada pod kontrolom (nadzorom) nastavnika. Primjena kompjutera i kvalitetnog nastavnog softvera u početnoj nastavi matematike je dosta skupa bez obzira na prednosti koje ova tehnologija nudi pa se zbog nedostatka sredstava za opremanje učionica i ne koristi često u nastavi.

5.6. METODIKA IZRADE I PRIMJENE MODELA DIFERENCIRANE REALIZACIJE JEDNAČINA U V RAZREDU

Didaktičko metodički okviri za organizaciju i realizaciju početne nastave matematike po modelu diferencirane nastave razmotreni su u prethodnom dijelu ovog poglavlja, te ćemo ovdje samo bliže objasniti postupke izrade modela za diferenciranu realizaciju jednačina, tj. uopštićemo prethodno iznijeta saznanja na konkretnoj nastavnoj temi u V razredu.

Diferencirana početna nastava matematike diktira uslove za diferenciranje programskih sadržaja (jednačina) i zahtjeva. Učenici koji sporije napreduju i koji ne stižu da urade sve zadatke sa jednačinama iz operativne faze časa, na časovima gdje dominira obrada novog gradiva, dobijaju za dopunski rad kod kuće da samostalno urade zadatke koje nijesu stigli da urade na času.

Imajući u vidu skupu računarsku tehniku za primjenu kvalitetnog obrazovnog softvera, to je u ovom radu izostala njena primjena tokom izvođenja eksperimenta. Dosta kvalitetnu realizaciju diferencirane realizacije jednačina ostvarili smo upotrebom diferenciranih nastavnih listića, višeslojnih folija i drugog priručnog didaktičkog materijala.

Primjena diferencirane realizacije jednačina u početnoj nastavi matematike zahtijeva upotrebu programiranog materijala. Zadaci s jednačinama problemskog tipa naročito su pogodni za stvaranje problemskih situacija.

Diferencirana priprema i realizacija jednačina primjenom problemske nastave prolazi kroz pet faza, i to:

- stvaranje problemske situacije i formulisanje problema;
- postavljanje hipoteza;
- dekompezacija i rješavanje problema;
- analiza rezultata, izvođenje zaključaka i generalizacija i
- primjena stečenih znanja. (Petrović, 1998:114)

Prva faza odnosi se na izbor problemskih zadataka koji se rješavaju primjenom jednačina. Problem treba da bude jasan kako bi učenici jasno razgraničili poznato od nepoznatog i onog što se traži u zadatku. Ako je problemska situacija jasna nema ničeg spornog u pravilnom postavljanju hipoteza, tj. postavljanju numeričke jednakosti koja sadrži nepoznatu (jednačine). Dobro postavljena jednačina i sagledavanje nepoznate u njoj vode ka dekompezaciji problema i rješavanju jednačine. Samo rješenje jednačine, tj. izračunavanje vrijednosti nepoznate ne znači rješenje problema, jer time još uvijek u potpunosti nijesmo riješili problem, jer ne znamo da li je dobijeno rješenje tačno ili nije. Zato je neophodno preći na sledeću fazu, tj. izvršiti analizu rezultata provjerom tačnosti rješenja jednačine i tek na osnovu proverenog rješenja izvesti zaključak, odnosno odgovoriti na postavljeni problem.

Ukoliko su učenici dobro vođeni kroz navedene etape shvatiće postupak postavljanja i rješavanja problema, te će stečena znanja sigurno umjeti da primijene u novim situacijama. To je i cilj diferencirane realizacije matematičkim sadržaja o jednačinama.

Prednost diferencirane realizacije jednačina ogleda se u mogućnosti njihove obrade na više nivoa određenih prema mogućnosti razumijevanja i rješavanja istih. Primjenom nastavnih listića i višeslojnih folija, bez skupe računarske tehnike može se u velikoj mjeri realizovati ovakav model nastave. Diferencirana realizacija jednačina obezbeđuje optimalan razvoj svakog učenika, jer dok jedna grupa uz pomoć uputstva ili drugog nivoa pomoći rješava jednačine, druga grupa ih više samostalno radi, a treća grupa učenika ih bez ikakve pomoći rješava. Ovdje je neophodno kontinuirano pratiti napredovanje svakog učenika i uvijek mu davati zadatke koji svojim zahtjevima za nijansu prevazilaze njihove mogućnosti, kako bi im se obezbijedio nesmetan razvoj ka ”višoj” zoni, tj. zoni narednog razvoja.

Nastavni listići sa diferenciranim zahtjevima primjenjuju se kako na časovima obrade jednačina, tako i kod uvježbavanja i primjene stečenih znanja.

Nastavni listići za obradu jednačina su diferencirani tako da učenici zavisno od nivoa pomoći dobijaju češće povratne informacije koje im se daju u pogodnom trenutku. Nastavni listići za uvježbavanje i primjenu stečenih znanja moraju sadržati zadatke različitog tipa koji su strogo uređeni u skladu sa principom postupnosti, tj. od lakših ka težim, u pogledu težine njihovog rješavanja.

Praćenje i ocjenjivanje učenika u diferenciranoj nastavi obavezuje nastavnika da, osim klasičnih oblika i metoda, prikuplja i druge korisne povratne informacije tokom nastave. Naravno posebnu pažnju treba obratiti na procjenu poimanja jednačina od strane učenika, jer postoji mogućnost i šablonskog rješavanja zadataka.

5.6.1. Modeli diferencirane realizacije jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija

Polazeći od činjenice da se početna nastava matematike zasniva na konkretnim aktivnostima učenika, koje se izražavaju kroz igru, intuiciju i doživljavanje konkretnih operacija, može se, sa sigurnošću, reći da ova iskustva predstavljaju osnovu za sazrijevanje, shvatanje i primjenu apstraktnih matematičkih pojmova i modela (Pinter, 1997:91).

Zbog velikog značaja jednačina za matematičko obrazovanje svakog pojedinca, savremena metodika početne nastave matematike, uvažavajući psihološko – pedagoške i metodološko – metodičke osnove te nastave, nastoji da programske zahtjeve prilagodi individualnim mogućnostima učenika kako bi se programski sadržaji o jednačinama usvojili na visokom nivou razumijevanja i primjene stečenih znanja i umjenja. Diferencirani pristup realizaciji jednačina omogućuje da se pomenuti zahtjevi ostvaruju prije svega primjenom različitih nivoa pomoći učenicima u radu na istim zajedničkim zadacima, ali je to moguće ostvariti i korišćenjem različitih zadataka, diferenciranih po težini. To se prvenstveno postiže odgovarajućim izborom zadataka, izborom pogodne metode modelovanja i didaktičkog materijala za svaku grupu učenika, odnosno pojedinca (Petrović, 2002:62-63).

U našem radu izložićemo tri konkretna modela diferencirane realizacije jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija u petom razredu osnovne škole, i to po jedan model za obradu novog gradiva, ponavljanje i utvrđivanje stečenih znanja i provjeravanje usvojenih znanja (prilog 1, 2 i 3).

III EMPIRIJSKI DIO

1. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANjA

1.1. Problem i predmet istraživanja

1.1.1. Problem istraživanja

Polazeći od činjenice da je kvalitet obrazovanja uslovljen kvalitetom nastave, postoji opravdana potreba za stalnim inovacijama u nastavi uopšte, pa i u početnoj nastavi matematike. Uvažavajući saznanja da programski sadržaji o jednačinama zauzimaju veoma značajno mjesto u početnoj nastavi matematike mora se posvetiti veća pažnja načinu njihove realizacije.

Programski sadržaji o jednačinama u početnoj nastavi matematike mogu se različito interpretirati i metodički prilagoditi saznajnim mogućnostima učenika. U postojećim nastavnim uslovima realizaciji jednačina se najvećim dijelom formalistički pristupa, a znanja se usvajaju memorisanjem putem rješavanja tipiziranih zadataka. Takva nastava obiluje jednoličnošću, te se mora osavremeniti, prije svega, primjenom modela diferencijacije nastavnih sadržaja.

Potreba diferencirane realizacije jednačina u početnoj nastavi matematike nalazi se u naučno poznatoj, dokazanoj i priznatoj prisutnoj individualnoj različitosti među učenicima (saznajnoj, motivacionoj, emocionalnoj i sl.). Respektujući pomenute individualne različitosti u savremeno organizovanoj nastavi matematike sadržaji o jednačinama treba u što većoj mjeri da se diferenciraju.

Sve veći problem nastavnika (učitelja) u realizaciji matematičkih sadržaja o jednačinama je kako učenike zainteresovati za jednačine i kako iste približiti različitim intelektualnim sposobnostima i predznanju učenika. Ovim istraživanjem ćemo predočiti modele diferencirane realizacije jednačina s akcentom eksperimentalnog istraživanja realizacije složenih jednačina (jednačina sa više operacija) u petom razredu osnovne škole. Dakle, problem ovog istraživanja je utvrđivanje modela diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole u cilju unapređivanja nastavne prakse i kvaliteta znanja učenika.

Mišljenja smo da navedeni problem modela diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole nije dovoljno proučavan u dosadašnjoj nastavi matematike i da ćemo rezultatima njegovog istraživanja u velikoj mjeri doprinijeti prisutnoj reformi obrazovanja i inicirati druga istraživanja.

1.1.2. Predmet istraživanja

Predmet istraživanja našeg rada je teorijsko i empirijsko proučavanje uticaja modela diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole na povećanje sposobnosti razumijevanja i rješavanja zadataka s jednačinama u odnosu na uobičajeni–tradicionalni način rada.

Prvo smo se teorijski dobro upoznali sa najnovijim psihološkim i pedagoškim saznanjima individualnih razlika učenika, a zatim smo eksperiment sproveli u petom razredu početne nastave matematike, kod realizacije složenih jednačina. U eksperimentalnoj grupi smo primjenjivali model diferencirane realizacije jednačina na tri nivoa težine. Rezultate eksperimenta smo posmatrali na kognitivnom području, sa stanovišta efikasnijeg rješavanja jednačina u početnoj nastavi i kvalitetnijeg usvajanja istih.

Efikasnost modela diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole ustanovili smo na osnovu postignutog kvantiteta znanja, tj. broja uspješno riješenih zadataka i kvaliteta znanja, tj. njegove primjenljivosti. Kod ispitivanja kvaliteta znanja, polazimo od petoročlane skale kvaliteta znanja i to:
- prisjećanja,
- prepoznavanja,
- reprodukcije,
- primenljivosti i
- stvaralačkog znanja.

1.2. Cilj i zadaci istraživanja

Istraživanje modela diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole i njegovom uticaju na bolje razumijevanje i rješavanje zadataka s jednačinama ima svoj teorijski i praktični cilj.

Teorijski cilj istraživanja ogleda se u znatnom povećanju saznanja o navedenoj problematici. U tu svrhu korišćeni su izvori iz dostupnih stručnih i naučnih radova torijskog i empirijskog karaktera, knjige i studije iz novije domaće i strane literature.

Praktični cilj istraživanja je da se uvođenjem eksperimentalnog faktora u petom razredu osnovne škole izvrši evaluacija doprinosa diferencijacije lakšem i potpunijem shvatanju programskih sadržaja o jednačinama.

Iz ovako formulisanog cilja istraživanja proističu sljedeći zadaci:
- prikupiti dostupna postojeća teorijska saznanja o istraživačkom problemu,
- diferencirati matematičke sadržaje (jednačine) na tri nivoa težine (minimalni, optimalni, maksimalni),
- izvršiti analizu i interpretaciju rezultata teorijskog i empirijskog istraživanja o doprinosu diferencirane nastave uspješnom rješavanju jednačina,
- ukazati na mogućnost dalje primjene istraživanja navedenog problema u oblasti nastave matematike.

1.3. Hipoteze istraživanja

Na osnovu određenog problema, definisanog predmeta, postavljenog cilja i zadataka ovog istraživanja možemo izdvojiti osnovnu hipotezu i pomoćne hipoteze.

Osnovna hipoteza

Osnovna hipoteza istraživanja formulisana je na sljedeći način:

- Diferenciranim pristupom realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole postiže se veći napredak u pogledu kvaliteta znanja i razvoja sposobnosti učenika za rješavanje raznih zadataka primjenom jednačina nego u nastavi koja nije organizovana na primjeni diferenciranog rada u realizaciji jednačina (tradicionalnoj nastavi).

Evaluacija ovako postavljene hipoteze je predviđena eksperimentalnim dijelom istraživanja i mjerljiva je u poređenju sa rezultatima uobičajenog tradicionalnog vaspitno – obrazovnog rada.

Posebne hipoteze ovog rada su:

- Diferencirani pristup realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole omogućava samostalan rad učenika prilagođen njegovim sposobnostima, načinu rada i tempu napredovanja u odnosu na klasičnu – nediferenciranu nastavu;
- Diferencirani pristup realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole dodatno motiviše nadprosječne, prosječne i ispodprosječne učenike za razliku od nastave organizovane na klasičan – nediferenciran način rada;
- Modeli diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole povećavaju sposobnosti učenika za rješavanje zadataka primjenom jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija u odnosu na postojeći tradicionalni način rada.

1.4. Metode istraživanja

Priroda proučavanog problema zahtijeva sveobuhvatno i intenzivno istraživanje, utemeljeno na primjeni više naučno – istraživačkih metoda. Zato ćemo u ovom istraživanju koristiti sljedeće metode:

- metodu teorijske analize,
- deskriptivnu metodu,
- kauzalnu (eksperimentalnu) metodu i
- komparativnu metodu.

Da bi ovo istraživanje bilo valjano potrebno je ispoštovati cilj i dati odgovore na postavljene zadatke istraživanja. Činjenica na osnovu kojih izvodimo zaključke je broj tačno riješenih zadataka. Strukturu broja uspješno riješenih zadataka kontrolne i eksperimentalne grupe definišemo na sljedeći način:

$$\text{i} = \frac{Џ}{V}$$

gde je $Џ$ broj uspješno riješenih zadataka u kontrolnoj, a V broj uspješno riješenih zadataka u eksperimentalnoj grupi i

$$0 < \text{i} < 1$$

Posljedice nađenog stanja istraživanjem izvode se na osnovu činjeničnog stanja i zakona zaključivanja, a izražavaju se iskazom, tj. rečenicom čiju istinitost empirijski provjeravamo.

Metoda teorijske analize

Primjenom teorijske analize detaljno ćemo proučiti dosadašnja teorijska i novija empirijska saznanja o postojećim individualnim razlikama učenika i opravdanost prilagođavanja sadržaja, metoda, oblika i tehnologije nastave matematike učeničkim sposobnostima, interesovanjima, potrebama i mogućnostima napredovanja kako bi se povećao nivo znanja učenika, te samim tim razumijevanje i rješavanje raznih zadataka primjenom jednačina.

Deskriptivna metoda

Primjena deskripcije u našem istraživanju vezana je za prikupljanje podataka o predznanju učenika iz matematike i njihovim kognitivnim sposobnostima. Ovom metodom ćemo pratiti stanje razvijanja sposobnosti uočavanja i rješavanja nepoznate u izmijenjenim uslovima (diferenciranoj nastavi), a zatim ćemo analizirati prikupljene podatke o stavovima učenika i nastavnika o diferenciranoj nastavi.

Kauzalna (eksperimentalna) metoda

Otkrivanje uzročno posljedičnih veza i odnosa između diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole, s jedne, i vaspitno – obrazovnih rezultata koji se u toj nastavi postižu na polju mogućnosti rješavanja raznih zadataka primjenom jednačina, s druge strane, zahtijeva primjenu kauzalne metode.

U istraživanju je zastupljen eksperimentalni model s paralelnim grupama (diferencirana realizacija jednačina, s jedne, i tradicionalna realizacija jednačina, s druge strane).

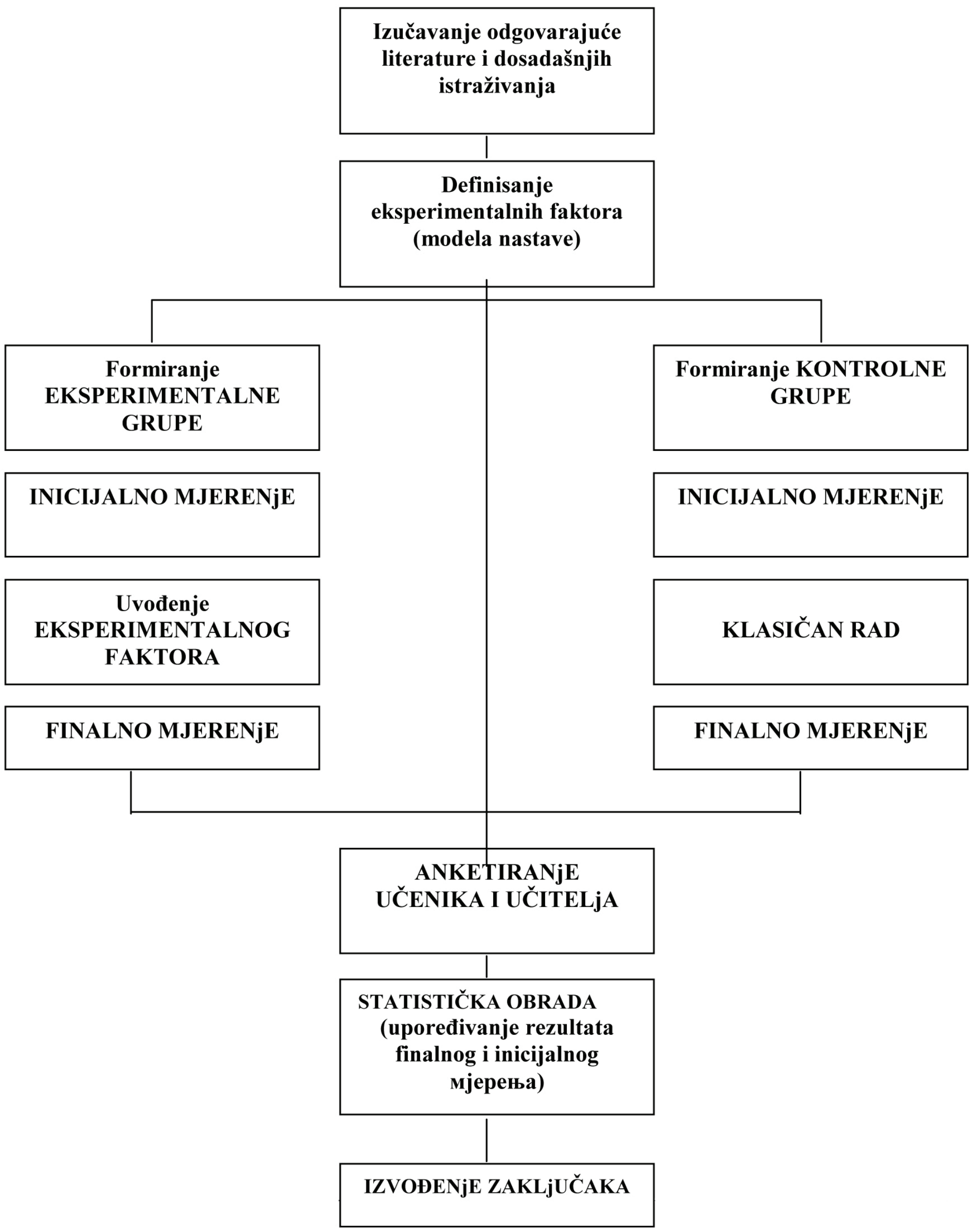
Ovom metodom potrebno je:

- identifikovati i otkloniti uticaj parazitarnih faktora;
- izvršiti ujednačavanje eksperimentalne i kontrolne grupe (pošto se radi o formiranim odjeljenskim zajednicama, ujednačavanje smo izvršili na osnovu prethodnog uspjeha učenika iz matematike);
- izvršiti uvođenje ekasperimentalnog faktora;
- prikazati rezultate eksperimentalne i kontrolne grupe;
- izvesti zaključke istraživanja.

Komparativna metoda

Upoređivanje dobijenih rezultata u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi, kao i utvrđivanje efikasnosti eksperimentalnog faktora (modela diferencijacije jednačina) izvršili smo komparativnom metodom.

1.5. Algoritam istraživanja



1.6. Varijable u istraživanju

U ovom istraživanju su definisane nezavisna (eksperimentalna) i zavisna (posledica) varijabla.

Nezavisna varijabla eksperimentalnog istraživanja predstavlja uticaj modela diferencirane realizacije jednačina na razumijevanje i razvoj sposobnosti za rješavanje jednačina.

Zavisna varijabla predstavlja vaspitno–obrazovni rezultat primjene odgovarajućih modela diferencirane nastave.

1.7. Istraživačke tehnike i mjerni instrumenti

1.7.1. Istraživačke tehnike

U ovom empirijskom istraživanju koristišćene su sljedeće istraživačke tehnike:
- analiza pedagoške dokumentacije,
- anketiranje učenika i nastavnika,
- testiranje.

1.7.2. Mjerni instrumenti istraživanja

Instrumenti koji su korišćeni u ovom istraživanju su zasnovani na primjeni sljedećih tehnika:
- tabela i grafikona za prikupljanje i predstavljanje podataka o uspjehu učenika iz matematike,
- anketnih upitnika za učenike i nastavnike,
- testova znanja.

1.8. Karakteristike uzorka istraživanja

Da bi dobili što potpunije i objektivnije rezultate o istraživačkom problemu, za uzorak smo odabrali:
- 112 učenika u eksperimentalnoj i približno isti broj (114 učenika) u kontrolnoj grupi,
- nastavnike (učitelje) koji rade u osnovnim školama gdje smo obavili istraživanje.

Eksperimentom su obuhvaćene četiri osnovne škole u Nikšiću (tabela 1.). U Osnovnoj školi „Luka Simonović” izabrane su dvijee grupe učenika V razreda. Eksperimentalna i kontrolna grupa brojale su po 32 učenika.

U Osnovnoj školi „Ratko Žarić” izabrane su dvije grupe učenika V razreda. Eksperimentalna grupa je imala 23 učenika, a kontrolna 22 učenika.

U Osnovnoj školi „Olga Golović” eksperimentalna grupa je brojala 26 učenika, a kontrolna 28 učenika.

U Osnovnoj školi „Mileva Lajović Lalatović” eksperimentalna grupa je imala 31 učenika, a kontrolna 32 učenika.

Eksperimentom je obuhvaćeno anketiranje svih učenika u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi i 74 nastavnika koji rade u početnoj nastavi matematike u pomenutim školama.

Tabela br. 1

Uzorak istraživanja

Izvor podataka	Broj učenika u grupi		Broj nastavnika
	eksperimentalna	kontrolna	
OŠ „Luka Simonović” Nikšić	32	32	22
OŠ „Ratko Žarić” Nikšić	23	22	16
OŠ „Olga Golović” Nikšić	26	28	16
OŠ „Mileva Lajović Lalatović” Nikšić	31	32	20
Ukupno	112	114	74

1.9. Statistička obrada i interpretacija rezultata

Nakon sređivanja prikupljenih podataka u toku istraživanja nužna je primjena statističkih postupaka. Izbor i primjena statističko–matematičkih postupaka determinisan je prirodom izučavane pojave koja je predmet istraživanja.

Za statističku obradu podataka koja obezbeđuje i izradu odgovarajućih tabela i grafikona korišćen je softverski paket STATGRAPHICS PLUS 17.0.

2. ETAPE ISTRAŽIVANjA

U realizaciji postavljenog cilja i zadatka, istraživanje je prošlo kroz 9 etapa:

- Inicijalno ispitivanje smo obavili na osnovu prikupljenih podataka o pokazanom uspjehu učenika na kraju četvrtog razreda.
- Na osnovu rezultata prikupljenih o uspjehu učenika iz matematike formirali smo u svim školama, koje su učestvovale u eksperimentu, eksperimentalna i kontrolna odjeljenja.
- U formiranim paralelnim grupama petog razreda sproveli smo istraživanje na taj način što smo u eksperimentalnu grupu uveli eksperimentalni faktor, a kontrolna grupa je nastavila rad na klasičan način.
- Nakon sprovedenog istraživanja izvršili smo finalno ispitivanje (mjerenje). Finalni test (Prilog 3) je obuhvatio 5 zadataka.
- Neposredno poslije izvršenog finalnog testiranja izvršili smo anketiranje učenika, učesnika u istraživanju, i nastavnika koji rade u školama u kojima je sprovedeno istraživanje. Upitnici su sadržali isti broj pitanja (Prilog 4, Prilog 5).
- Izvršili smo statističku obradu podataka finalnog ispitivanja. Za sređivanje podataka koristili smo savremeniji način obrade podataka.
- Obradili smo rezultate ankete učenika i učitelja (nastavnika) i rezultate ankete grafički prikazali.
- Dali smo i kritički osvrt na rezultate istraživanja ukazujući na neke specifičnosti provjeravanog modela istraživanja.
- Na kraju smo izvršili zaključno razmatranje i oblikovanje rezultata istraživanja.

3. REZULTATI ISTRAŽIVANjA

3.1. EMPIRIJSKA EVALUACIJA ISTRAŽIVANjA

3.1.1. Analiza uspjeha učenika eksperimentalne i kontrolne grupe iz matematike prije uvođenja eksperimentalnog faktora

Poznato je da postoji pozitivna korelacija između nivoa razumijevanja matematičkih sadržaja i ocjene koju učenik dobija iz tog gradiva. Stoga smo za ujednačavanje učenika po predznanju u paralelnim grupama pošli od njihovog uspjeha (ocjene) iz matematike. Prilikom utvrđivanja postojećeg uspjeha učenika iz matematike u klasičnoj nastavi došli smo do podataka prikazanih u sljedećoj tabeli:

Tabela br. 2

Prethodni uspjeh učenika iz matematike u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi

Škola	Grupa	Ukupan br. učenika	Broj učenika sa ocjenom					Aritm. sr.	Standar. devijacija
			5	4	3	2	1		
OŠ ”Luka Simonović”	E_1	32	11	12	6	3	/	3,96	0, 94
	K_1	32	12	11	5	4	/	3,97	1,03
OŠ ”Ratko Žarić”	E_2	23	8	8	5	2	/	3,96	0,95
	K_2	22	7	8	5	2	/	3,91	0,95
OŠ ”Olga Golović”	E_3	26	9	10	5	2	/	4,00	0,92
	K_3	28	10	10	6	2	/	4,00	0,84
OŠ ”Mileva L. Lalatović”	E_4	31	12	10	6	3	/	4,00	0,88
	K_4	32	12	9	7	4	/	3,91	1,04

Podaci koje sadrži prethodna tabela odnose se na populaciju našeg istraživanja, koju čine učenici četvrtog razreda. Ako izložene podatke sumiramo po grupama (eksperimentalna i kontrolna) dobijamo sljedeću tabelu:

Tabela br. 3

Uspjeh učenika iz matematike u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi prije uvođenja eksperimentalnog faktora

Grupa	Broj uč.	Broj uč. sa ocjenom					Aritm. sr.	Standar. devijacija
		5	4	3	2	1		
Eksperimentalna	112	40	40	22	10	/	3,98	0,94
Kontrolna	114	41	38	23	12	/	3,95	0,95
Ukupno	226	81	78	45	22	/	3,96	0,95

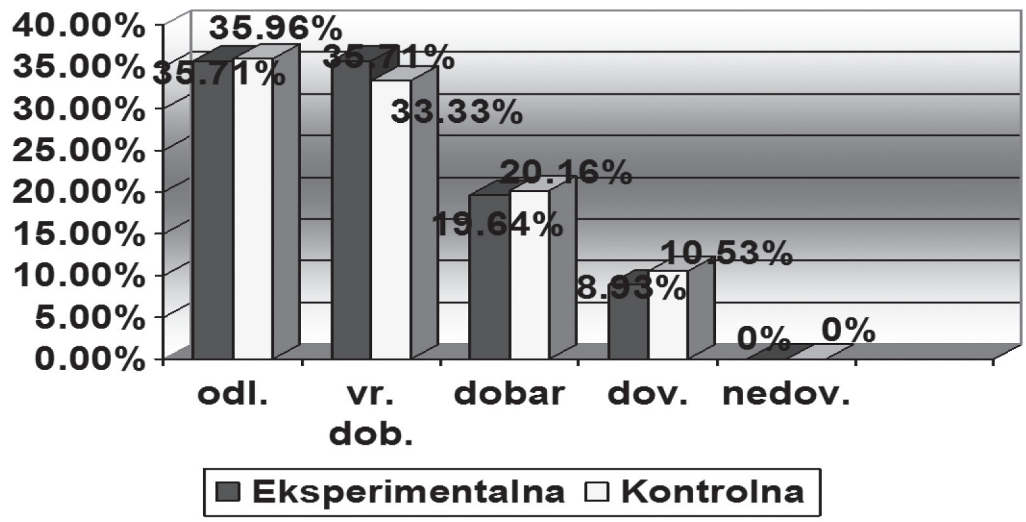
Statistička obrada podataka odnosi se na sve učenike koji su ušli u uzorak istraživanja. Eksperimentalna i kontrolna odjeljenja su optimalne veličine sa oko 30 učenika u školi, ali ćemo ih u daljem istraživanju posmatrati zajedno u istoj grupi. Na osnovu dobijenih podataka u tabeli vidi se da su grupe približno ujednačene po brojnosti i predznanju iz matematike.

Ako detaljnije analiziramo uspjeh učenika u paralelnim grupama možemo ustanoviti da u eksperimentalnoj grupi koja broji 112 učenika 40 učenika ili 35,71 % ima odličan uspjeh, vrlodobrih je 40 učenika ili 35,71 %, dobrih 22 učenika ili 19,64 % i dovoljnih 10 učenika ili 8,93 %. Kontrolna grupa broji 114 učenika od čega je odličnih

41 ili 35,96 %, vrlodobrih 38 ili 33,33 %, dobrih 23 ili 20,18 % i dovoljnih 12 ili 10,53 % učenika ove grupe. Dakle, obje grupe nemaju učenika koji ne mogu da prate nastavu matematike (nedovoljnih učenika). Numerički i procentualno iskazani podaci grafički su prikazani na Histogramu 1.

Histogram 1.

Uspjeh učenika eksperimentalne i kontrolne grupe na inicijalnom ispitivanju



Na osnovu dobijenih podataka vidimo da učenici, unutar paralelnih grupa, posjeduju različite predispozicije za usvajanje matematičkih sadržaja. Sposobnosti učenika u paralelnim grupama su približno iste. Dakle, paralelne grupe su međusobno ujednačene. Još se može uočiti da se unutar jedne grupe mogu lako izdvojiti – diferencirati najmanje tri grupe učenika. Prvu grupu čine učenici sa odličnom ocjenom, drugu sa vrlodobrom, a treću učenici koji imaju dobru i dovoljnu ocjenu iz matematike. Unutar eksperimentalne grupe smo formirali tri grupe učenika, prvu i dugu sa po 40 i treću sa 32 učenika, prije uvođenja eksperimentalnog faktora, a u kontrolnoj grupi se nastavilo sa klasičnim - tradicionalnim načinom rada.

3.1.2. Analiza uspjeha učenika u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi na finalnom ispitivanju

Ispitivanje diferenciranog i klasičnog rada učenika na efikasnom rješavanju jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija sprovedeno je u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi. U paralelnim grupama učenici su radili iste zadatke, s tom razlikom što su u eksperimentalnoj grupi učenici zavisno od nivoa grupe u kojoj su radili dobijali određenu pomoć u rješavanju zadataka. Na svakom kontrolnom listću je zastupljen isti broj zadataka raspoređenih po principu od lakšeg ka težem (Prilog 3.).

Napredovanje učenika u paralelnim grupama pratili smo na osnovu broja uspješno riješenih zadataka. Istraživanje smo obavili na času provjeravanja usvojenih znanja rješavanja ”složenih” jednačina.

Zadatak našeg istraživanja je bio da provjerimo da li se organizovanjem nastave na različitim nivoima težine u realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija postiže veći uspjeh učenika nego u nastavi realizacije datih jednačina koja nije organizovana na različitim nivoima težine, tj. klasičnoj nastavi.

Uspjeh učenika u rješavanju jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija utvrđivali smo primjenom kontrolnog listića. Za kriterij vrednovanja kontrolnih listića uzeli smo broj uspješno riješenih zadataka. Odličnu ocjenu predstavljaju svi uspješno riješeni zadaci (5 zadataka), vrlodobru ocjenu četiri tačno riješena zadatka, dobru ocjenu tri tačno riješena zadatka, ocjenu dovoljan dva tačno riješena zadatka, dok nedovoni nivo znanja predstavlja jedan ili nijedan uspješno riješen zadatak.

Za bodovanje zadataka nijesmo se odlučili iz razloga što kod diferenciranog rada ne bi mogli primijeniti isti kriterijum bodovanja, a svrha našeg istraživanja nije ocjenjivanje već ispitivanje koliko učenici uspješnije rješavaju zadatke ako im se pruži dodatna pomoć.

Na osnovu analize kontrolnih listića eksperimentalne i kontrolne grupe, ostvaren je značajno veći ukupan uspjeh eksperimentalne u odnosu na kontrolnu grupu što je predstavljeno u Tabeli 3.

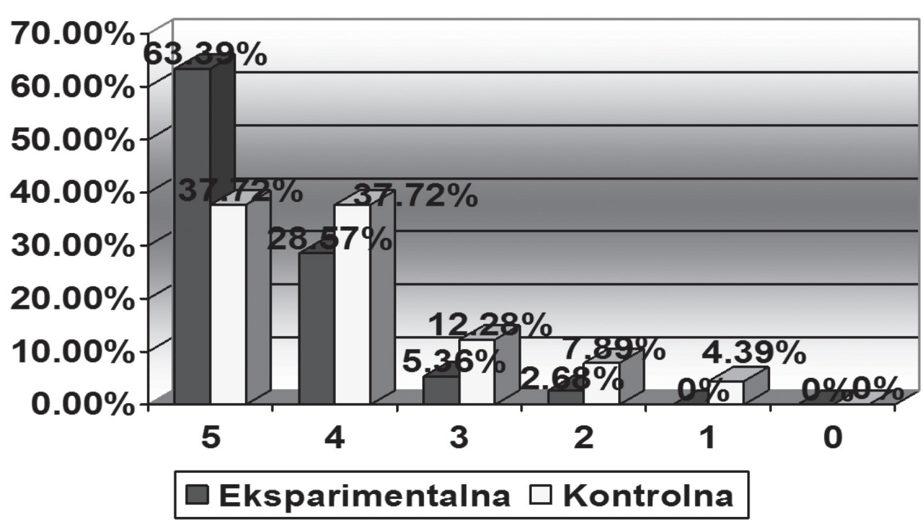
Tabela 4.

Rezultati finalnog testiranja učenika eksperimentalne i kontrolne grupe u rješavanju jednačina sa više operacija

Grupa	Broj učenika	Broj učenika sa uspješno riješenim zadacima					Aritmetička sredina
		5	4	3	2	1	
Eksperimentalna	112	71	32	6	3	/	4,52
Kontrolna	114	43	43	14	9	5	3,96

Razlika u broju tačno riješenih zadataka ide u korist eksperimentalne grupe. Evidentan je stepen napredovanja na nivou sve tri podgrupe u okviru eksperimentalne grupe. Prosječan uspjeh (broj tačno riješenih zadataka) eksperimentalne grupe sa 4,52 tačno riješena zadatka daleko je veći od istog u kontrolnoj grupi koji iznosi 3,96 tačno urađena zadatka. To je ujedno i indikator veće prilagođenosti gradiva (zadataka) učeničkim sposobnostima u eksperimentalnoj grupi, pružanjem nivoa pomoći, u odnosu na kontrolnu grupu. Utvrđeni rezultati potvrđuju našu prvu pomoćnu hipotezu koja glasi: *„Diferencirani pristup realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike omogućava samostalan rad učenika prilagođen njegovim sposobnostima, načinu rada i tempu napredovanja u odnosu na klasičnu – nediferenciranu nastavu*”**.**

Ukoliko predstavimo na histogramu prethodno prikazane rezultate (Tabela 3.) možemo jasno uočiti dobijenu razliku uspjeha učenika eksperimentalne i kontrolne grupe.



Histogram 2.

Grafički prikaz uspjeha učenika u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi na finalnom testiranju

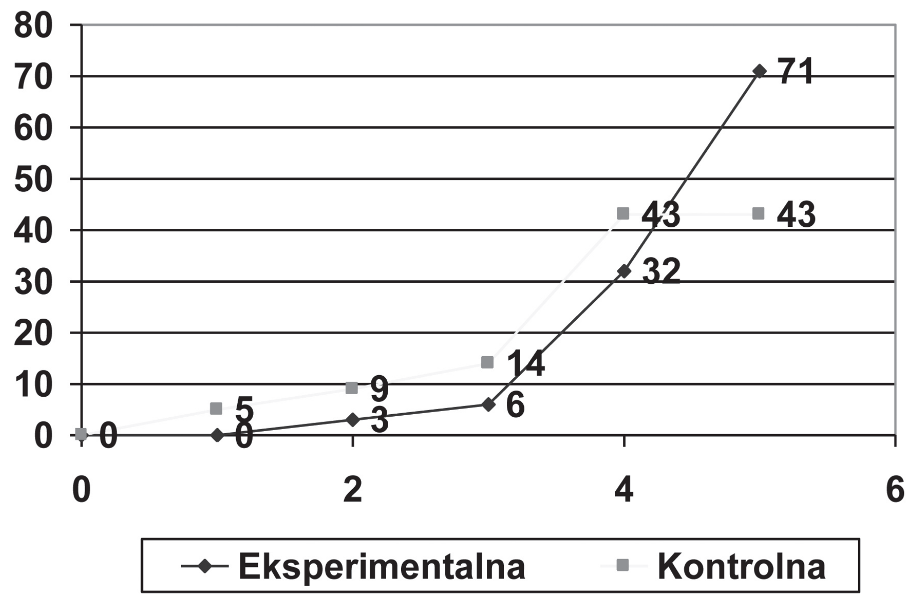
Sa histograma uočavamo koliko je eksperimentalna grupa postigla bolje rezultate u odnosu na kontrolnu grupu. Naime, veliki broj učenika u ovoj grupi (71 ili 63,39%) uradio je tačno sve zadatke, dok 32 ili 28,57% učenika uradilo je četiri zadatka, a svega 6 ili 5,36% učenika tri zadatka i samo 3 ili 2,68% učenika uradilo je tačno dva zadatka.

Rezultati istraživanja u kontrolnoj grupi su dosta različiti. Broj učenika u kontrolnoj grupi koji je tačno uradio sve zadatke je jednak broju učenika koji su uradili četiri zadatka i iznosi 43 ili 37,72%, dok je 14 ili 12,28% učenika uradilo tri zadatka, 9 ili 7,89% učenika je uradilo dva zadatka i 5 ili 4,39% učenika je uradilo jedan zadatak.

Histogram uspona (Histogram 3) za eksperimentalnu grupu nam pokazuje da je linija uspona u eksperimentalnoj grupi veća od iste u kontrolnoj grupi.

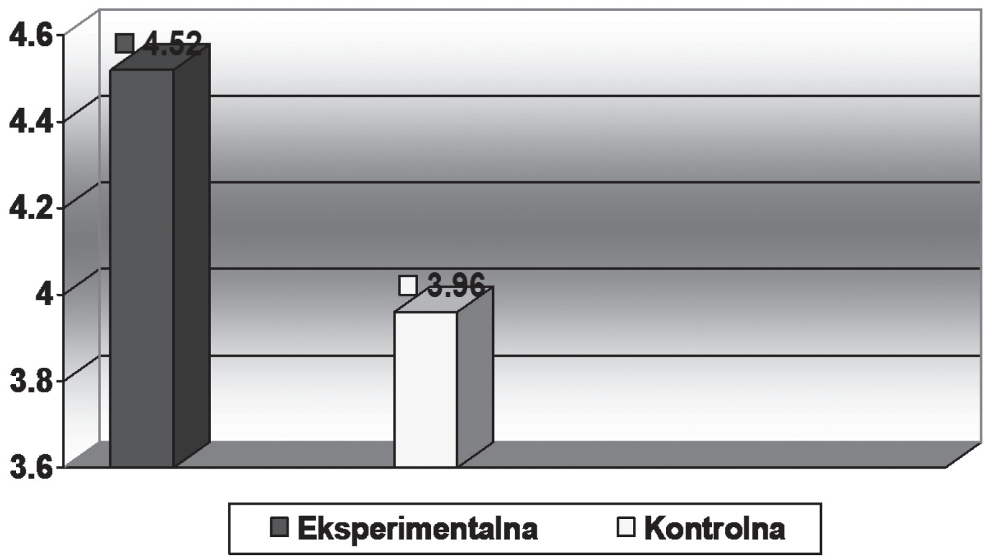
Histogram 3.

Uspon učenika u paralelnim grupama



Iako u obje grupe nije bilo učenika koji nijesu uradili sve zadatke, ipak u eksperimentalnoj grupi nije bilo ni učenika koji su uradili jedan zadatak. Dakle, u eksperimentalnoj grupi nije bilo učenika koji su uradili ispod dva zadatka, dok to nije slučaj za kontrolnu grupu.

Ako uporedimo aritmetičke sredine paralelnih grupa po pitanju uspješno riješenih zadataka (Histogram 4) uočićemo veliku razliku.



Histogram 4.

Dijagram aritmetičkih. sredina paralelnih grupa

Visok prosječan broj uspješno riješenih zadataka u eksperimentalnoj grupi rezultat je primjene modela diferenciranog rada. Ako znamo da je prosječan uspjeh učenika prije uvođenja diferenciranog rada (eksperimentalnog faktora) bio približno isti za obje grupe (eksperimentalnu i kontrolnu) onda možemo izvesti sljedeće konstatacije vezano za eksperimentalnu grupu:

- sve tri kategorije učenika eksperimentalne grupe u prosjeku su povećale broj uspješno riješenih zadataka sa jednačinama;
- učenici eksperimentalne grupe značajno su napredovali u toku eksperimenta.

Na osnovu utvrđenih rezultata istraživanja možemo prihvatiti kao tačnu drugu pomoćnu hipotezu koja glasi: „*Diferencirani pristup realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike dodatno motiviše nadprosječne, prosječne i ispodprosječne učenike za razliku od nastave organizovane na klasičan - nediferenciran način rada*".

Ako uporedimo rezultate finalnog testiranja sa inicijalnim dobijamo stvarnu sliku napredovanja učenika u paralelnim grupama (Tabela 4.).

Tabela 5.

Uporedni rezultati inicijalnog i finalnog stanja paralelnih grupa

Grupa	Ispitivanje I - F	Br. uč.	Ar. sred.	Stand. dev. δ	t odnos 0,5	Nivo znač. 0,05	0,01
Eksperim.	I	112	3,98	0,94	4,82	-	2,63
	F	112	4,52	0,72			
Kontrolna	I	114	3,95	0,97	0,029	-	-
	F	114	3,96	1,1			

Na osnovu utvrđenih podataka može se zaključiti da su učenici eksperimentalne grupe ostvarili značajno veću aritmetičku sredinu na finalnom nego na inicijalnom ispitivanju, dok je aritmetička sredina u konkretnoj grupi na finalnom testiranju približno ista kao u inicijalnom mjerenju.

Rezultati inicijalnog i finalnog ispitivanja ukazuju na značajnu razliku između eksperimentalne i kontrolne grupe. U ukupnom odnosu uspješno riješenih zadataka eksperimentalna grupa je postigla statistički značajno veću aritmetičku sredinu u poređenju sa kontrolnom grupom. Eksperimentalna grupa je, dakle, značajno napredovala od inicijalnog do finalnog ispitivanja ostvarivši razliku između aritmetičkih sredina značajnu na nivou pouzdanosti 0,01.

Kontrolna grupa je, pak, u odnosu na inicijalno mjerenje neznatno napredovala. Učenici u ovoj grupi ostvarili su rezultate čija je aritmetička sredina na finalnom ispitivanju (3,96) približno jednaka inicijalnom ispitivanju.

Dakle, broj uspješno riješenih zadataka u eksperimentalnoj grupi je znatno veći nego u kontrolnoj pa su i ostvareni rezultati u ovoj grupi znatno veći.

Utvrđeni rezultati potvrđuju treću pomoćnu hipotezu koja glasi: „*Modeli diferencirane realizacije jednačina u početnoj nastavi matematike povećavaju sposobnosti učenika za rješavanje zadataka primjenom jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija u odnosu na postojeći tradicionalni način rada***.**

3.1.3. Korelacija između rezultata istraživanja

Rezultati istraživanja koje smo obavili na inicijalnom i finalnom ispitivanju u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi pokazuju veliki stepen korelacije (Tabela 5.).

Tabela 6.

Korelacija između rezultata inicijalnog i finalnog ispitivanja u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi

Grupa	Ispitivanje	Br. uč.	Uspjeh učenika					Pirsonov koef. korelacije	Pouzdanost	
			5	4	3	2	1		0.5	0.1
Eksperimentalna	Inicijalno	112	40	40	22	10	/	.945	-	0.228
	Finalno	112	76	30	4	2	/			
Kontrolna	Inicijalno	114	41	38	23	12	/	.941	-	0.228
	Finalno	114	43	14	9	5	/			

Analiza rezultata u prikazanoj tabeli upućuje na mogućnost izvođenja sljedećih konstatacija:

- postoji pozitivna korelacija između ispitivanih varijabli u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi između inicijalnog i finalnog ispitivanja na oba nivoa pouzdanosti;
- dobijeni Pirsonovi koeficijenti korelacije u eksperimentalnoj (r_{xy} = 0,945) i u kontrolnoj (r_{xy} = 0,941) grupi veći su od granične vrednosti 0,228 na stepenu slobode 112, te se može zaključiti da su statistički značajni na nivou pouzdanosti 0,01;
- pozitivna povezanost između modela diferenciranog rješavanja jednačina i uspjeha učenika u rješavanju zadataka primjenom jednačina je stvarna, a ne slučajna;
- visok koeficijent korelacije u eksperimentalnoj grupi (0,945) je posljedica djelovanja eksperimentalnog faktora. Uvođenjem eksperimentalnog faktora, učenici su ostvarili bolje rezultate na finalnom u odnosu na inicijalno mjerenje.

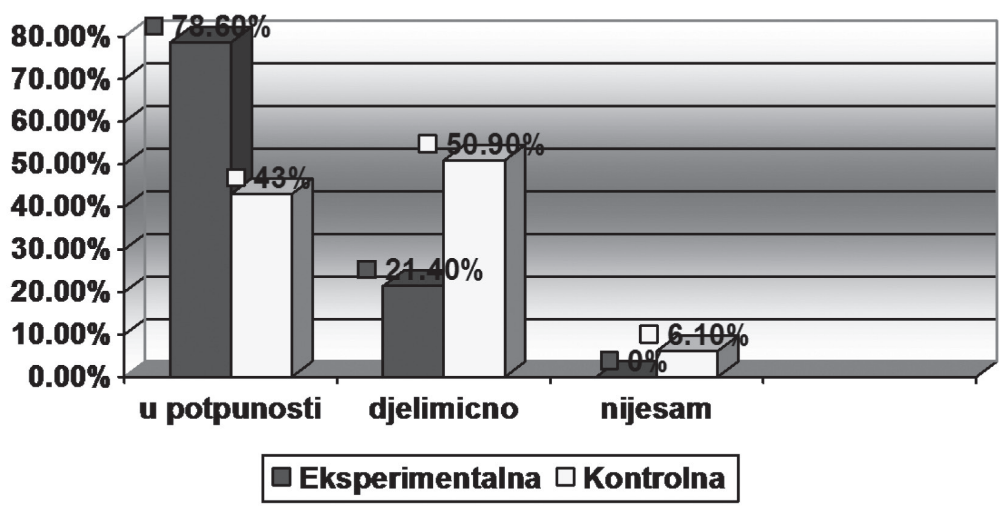
3.2. STAVOVI UČENIKA V RAZREDA OSNOVNE ŠKOLE PREMA PRIMJENI DIFERENCIRANOG RADA U REALIZACIJI JEDNAČINA SA SLOŽENIM IZRAZIMA OD VIŠE RAČUNSKIH OPERACIJA

Neposredno poslije obavljenog eksperimentalnog istraživanja, na odabranom uzorku od 112 učenika u eksperimentalnoj i 114 učenika u kontrolnoj grupi izvršili smo anketiranje (prilog 4) svih učenika bez obzira kojoj grupi pripadaju. Anketu smo upotrebili za upoređivanje stavova učenika u paralelnim grupama prema zadacima koje su rješavali primjenom jednačina sa više operacija. Rezultati ankete nam otkrivaju velike razlike u stavovima učenika eksperimentalne u odnosu na kontrolnu grupu.

Prvo pitanje u anketi za učenike odnosilo se na utvrđivanje njihovih stavova prema zadacima koje su rješavali primjenom jednačina sa više operacija. Iskazani stavovi učenika u eksperimentalnoj grupi bitno se razlikuju od kontrolne grupe, što je prikazano na Histogramu 5.

Histogram 5.

Odgovori učenika na pitanje br. 1.[1]



Stavovi učenika prikazani na histogramu ukazuju na veliku razliku u pogledu razumijevanja zadataka s jednačinama koje su učenici rješavali u paralelnim grupama. Najveći broj ispitanika u eksperimentalnoj grupi (88 ili 78,6%) se izjasnio da je u potpunosti razumio zadatke koje su rješavali, dok svega 43% ispitanika (49 učenika) u kontrolnoj grupi dijeli takvo mišljenje.

Broj ispitanika koji su djelimično razumjeli zadatke koje su rješavali znatno je manji u eksperimentalnoj (24 ili21,4%) u odnosu na kontrolnu grupu gdje je taj broj znatno veći (50,9% ili 58 ispitanika).

Ako uporedimo broj ispitanika koji su se izjasnili da uopšte nijesu razumjeli zadatke koje su rješavali onda se i tu mogu uočiti velike razlike između paralelnih grupa.

1 Zadatke koje sam rješavao(la) primjenom jednačina sa više računskih operacija:
a) u potpunosti sam razumio(la)
b) djelimično sam razumio(la)
c) nijesam uopšte razumio(la)

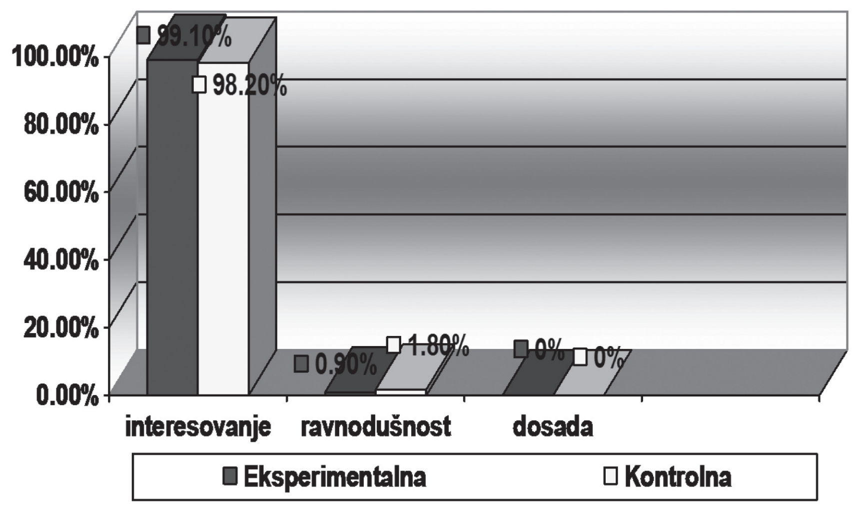
U eksperimentalnoj grupi nije bilo učenika koji je iskazao takav stav, nasuprot kontrolnoj grupi gdje se 6,1% ispitanika (7 učenika) izjasnilo da uopšte nijesu razumjeli zadatke koje su dobili da rješavaju.

Dakle, iskazani stavovi učenika paralelnih grupa opravdavaju uvođenje eksperimentalnog faktora, jer se na taj način smanjuje broj učenika koji ne mogu da prate nastavu matematike, tj. rješavaju zadatke koji im se nude.

Drugo pitanje u anketi usmjereno je na otkrivanje stavova učenika prema zadacima koje razumiju. Interesantno je da su iskazani stavovi učenika eksperimentalne i kontrolne grupe (Histogram 6.) po ovom pitanju skoro identični.

Histogram 6.

Odgovori učenika na pitanje br. 2.[2]

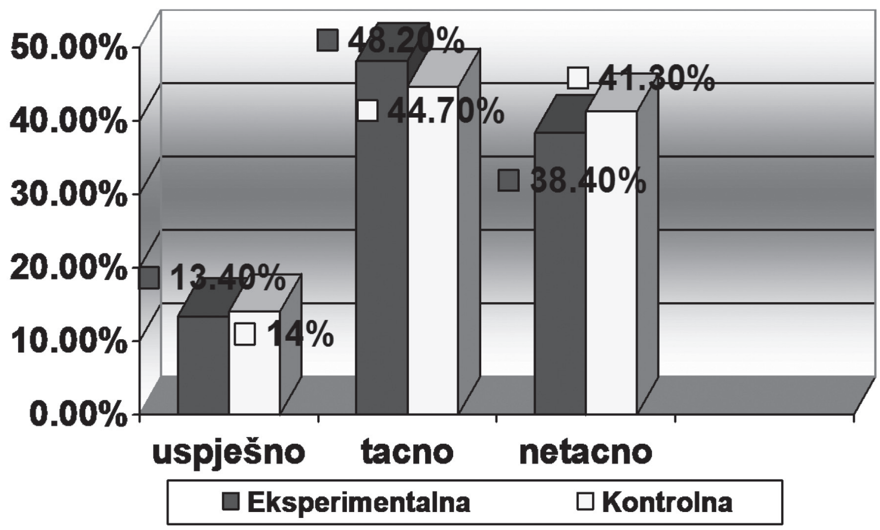


Sa histograma se jasno vidi da se približno isti broj ispitanika eksperimentalne (99,1% ili 111 učenika) i kontrolne (98,2% ili 112 učenika) grupe izjasnio da zadatak koji razumije kod njega izaziva veće interesovanje za njegovo rješavanje. Za razliku od njih kod veoma malog broja ispitanika u eksperimentalnoj (0,9% ili 1 učenik) i kontrolnoj (1,8% ili 2 učenika) grupi zadatak koji rješavaju ukoliko razumiju izaziva ravnodušnost, dok nije bilo ispitanika ni u jednoj grupi koji se izjasnio da se osjeća dosadnim u takvoj nastavnoj situaciji.

Dakle, iskazani stavovi učenika na anketi ukazuju na činjenicu da ukoliko učenici razumiju zadatak koji rješavaju pokazivaće veće interesovanje za njegovo rješavanje.

Treće pitanje u anketi odnosilo se na utvrđivanje stavova učenika paralelnih grupa prema zadacima koje djelimično razumiju. Na osnovu vlastitog iskustva učenici su iskazali različite stavove (Histogram 7.).

2 Zadatak koji razumijem kod mene izaziva u pogledu njegovog rješavanja:
 a) interesovanje
 b) ravnodušnost
 c) dosadu



Histogram 7.

Odgovori učenika na pitanje br. 3.[3]

Upoređivanjem prikazanih stavova učenika eksperimentalne i kontrolne grupe, možemo uočiti da se najveći broj ispitanika eksperimentalne (48,2% ili 54 učenika) i kontrolne (44,7% ili 51 učenik) grupe izjasnio da zadatak koji djelimično razumije najčešće djelimično tačno riješi, dok se 38,4% ispitanika u eksperimentalnoj (43 učenika) i 41,3 % u kontrolnoj (47 učenika) grupi izjasnilo da u takvim slučajevima zadatak najčešće netačno riješi. Međutim, evidentan je i broj ispitanika eksperimentalne (13,4% ili 15 učenika) i kontrolne (14% ili 16 učenika) grupe koji se izjasnio da zadatke koje djelimično razumije najčešće uspešno riješi.

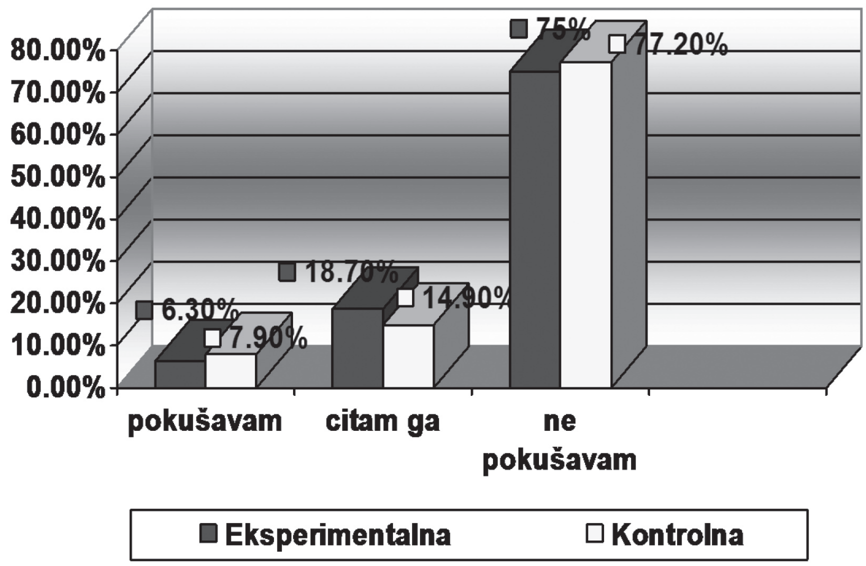
Dakle, uočavamo da ne postoje bitnije razlike u stavovima učenika paralelnih grupa po navedenom pitanju što znači da su učenici dosta objektivno odgovorili i da im ne treba davati zadatke koje ne razumiju bar ne u onom stepenu da ga ne mogu uspješno riješiti. To znači da zadatak svojom ”težinom” treba samo za nijansu da prevazilazi učeničke realne sposobnosti kako bi ga on mogao uspješno da riješi.

Četvrto pitanje postavljeno u anketi učenicima odnosilo se na utvrđivanje stavova učenika eksperimentalne i kontrolne grupe prema zadacima koje uopšte ne razumiju. Iskazani stavovi učenika eksperimentalne i kontrolne grupe (Histogram 8.) po ovom pitanju su približno isti.

3 Zadatak koji djelimično razumijem najčešće rješavam:
a) uspješno
b) djelimično tačno
c) netačno

Histogram 8.

Odgovori učenika na pitanje br. 4.[4]

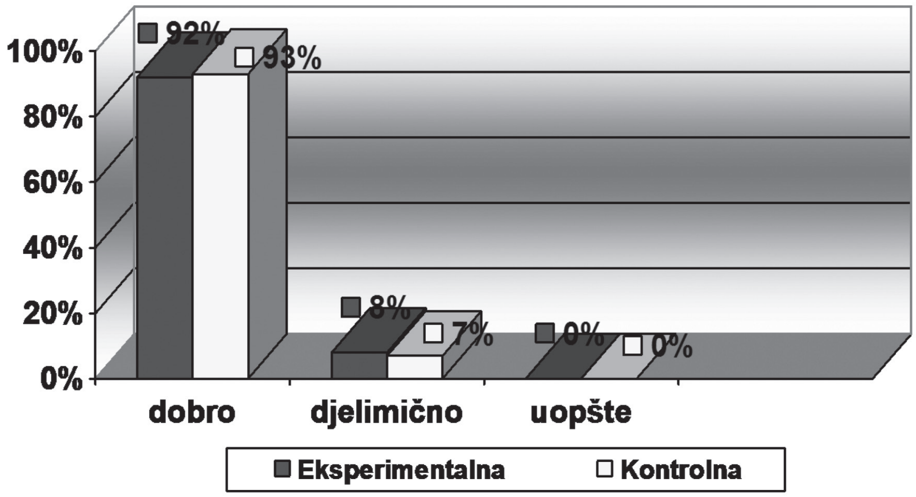


Analizom stavova učenika eksperimentalne i kontrolne grupe možemo uočiti da je najveći broj ispitanika u paralelnim grupama, 75% u eksperimentalnoj i 77,2% u kontrolnoj, odgovorio da ne pokušava zadatak da rješava ukoliko ga uopštei ne razumije. Za razliku od njih, znatno manji broj ispitanika u eksperimentalnoj (18,7% ili 21 učenik) i u kontrolnoj (14,9% ili 17 učenika) grupi se izjasnio da ukoliko zadatak uopšte ne razumije nastoji da ga pažljivo pročita više puta kako bi ga razumio, dok se svega 6,3% ispitanika u eksperimentalnoj i 7,9% u kontrolnoj grupi izjasnilo da pokušava da riješi zadatak koji uopšte ne razumije.

Dakle, na osnovu iskazanih stavova učenika paralelnih grupa može se zaključiti da učenici najčešće ne pokušavaju da rade one zadatke koje ne razumiju. Onda se s pravom može postaviti pitanje da li uopšte ima potrebe davati zadatke učenicima koje oni ne razumiju?

Peto pitanje u anketi odnosi se na utvrđivanje stavova učenika eksperimentalne i kontrolne grupe prema zadacima koje bi najčešće radili ako bi bili u prilici sami da ih biraju. Stavovi učenika obje grupe, koji su skoro identični, predstavljeni su na histogramu 9.

4 Zadatak koji uopšte ne razumijem:
a) pokušavam da riješim
b) čitam ga više puta kako bi ga razumio
c) uopšte ne pokušavam da riješim



Histogram 9.

Odgovori učenika na pitanje br. 5.[5]

Iskazani stavovi učenika, grafički predstavljeni na Histogramu 9. ukazuju na činjenicu da učenici najviše vole da rade zadatke koje dobro razumiju, za koje se izjasnilo 92% ispitanika u eksperimentalnoj i 93% ispitanika u kontrolnoj grupi. Veoma mali broj ispitanika u eksperimentalnoj (8%) i u kontrolnoj (7%) grupi se izjasnilo kada bi bili u prilici sami da biraju izabrali bi zadatke koje djelimično razumiju, dok nijedan ispitanik ni u jednoj grupi, što je razumljivo, nije iskazao interesovanje za zadatke koje uopšte ne razumije.

Dakle, imajući u vidu ambicije djeteta na ovom uzrastu daleko veće rezultate bi postigli ako uvažimo iskazane želje i potrebe svakog učenika. Međutim, u klasičnoj nastavi svi učenici rade iste zadatke koje jedan broj učenika dobro razumije, drugi djelimično, a treći uopšte ne razumiju. Na ovaj problem ukazuju i prezentovani rezultati eksperimentalnog istraživanja u kojem su učenici eksperimentalne grupe značajnije napredovali u odnosu na učenike kontrolne grupe.

5 Kada bih bio(la) u prilici da biram zadatke, najčešće bih radio(la) zadatke koje:
a) dobro razumijem
b) djelimično razumijem
c) uopšte ne razumijem

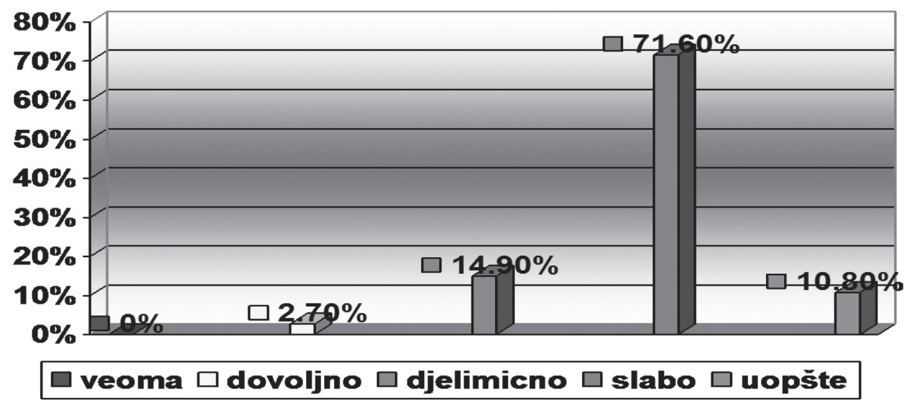
3.3. MIŠLjENjA NASTAVNIKA U POČETNOJ NASTAVI O ORGANIZACIJI NASTAVE MATEMATIKE PRIMJENOM DIFERENCIRANE NASTAVE

U nastojanju da naše istraživanje bude što validnije u opseg istraživanja uključili smo i mišljenja nastavnika kako bi upotpunili saznanje o validnosti eksperimentalnog faktora. Neposredno poslije izvođenja eksperimenta izvršili smo anketiranje u školama u kojima smo vršili istraživanje, na uzorku od 74 nastavnika u početnoj nastavi. Za anketu je pripremljeno pet pitanja (prilog 5).

Prvo pitanje u anketi odnosilo se na rasvjetljavanje činjenice koliko su uopšte nastavnici upoznati s diferenciranom nastavom i mogućnošću njene primjene u početnoj nastavi matematike. Mišljenja nastavnika vezana za ovo pitanje predstavljamo sljedećim histogramom:

Histogram 10.

Odgovori nastavnika na pitanje br. 1.[6]



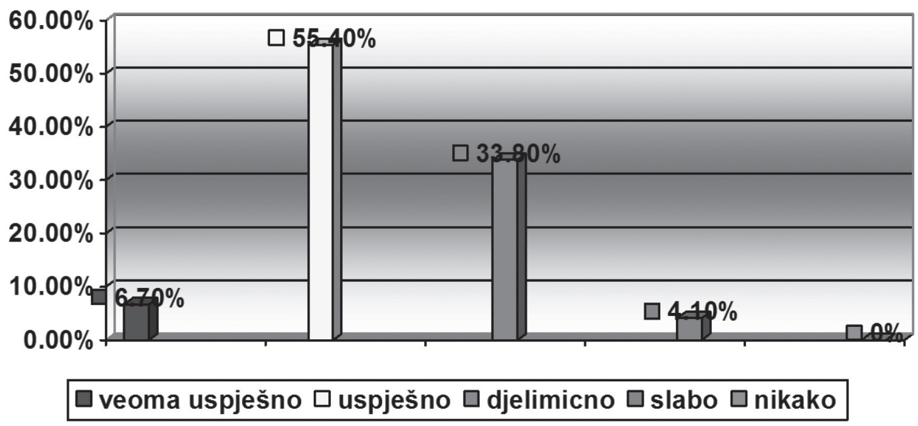
U postojećem nastavnom sistemu zastupljena je u najvećoj mjeri tradicionalna nastava, te je razumljivo da je veliki broj nastavnika u početnoj nastavi (71,6% ispitanika) slabo upoznat s pojmom diferencirane nastave i mogućnošću njene primjene u početnoj nastavi matematike. Sa histograma se vidi da nema ispitanika koji su veoma upoznati, dok je samo 2,7% ispitanika dovoljno upoznato, a svega 14,9% ispitanika je djelimično upoznato s navedenim modelom nastave. Još se može vidjeti da ne mali broj ispitanika (10,8%) uopšte nije upoznat s pojmom diferencirane nastave i mogućnošću njene primjene u realizaciji početne nastave matematike. To ukazuje na potrebu dodatne edukacije nastavnika ukoliko bi željeli osavremeniti početnu nastavu matematike prilagođavajući je stvarnim potrebama i mogućnostima učenika.

Drugim pitanjem smo željeli da ispitamo stavove nastavnika u početnoj nastavi o tome koliko učenici uspješno usvajaju matematičke sadržaje odmjerene prosječnom učeniku. U istraživanju smo došli do podataka prikazanih na Histogramu 11.

---

6 Koliko ste upoznati s pojmom diferencirane nastave i mogućnošću njene primjene u realizaciji matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike?

a) veoma sam upoznat(a)
b) dovoljno sam upoznat(a)
c) djelimično sam upoznat(a)
d) slabo sam upoznat(a)
e) uopšte nijesam upoznat(a)



Histogram 11.

Odgovori nastavnika na pitanje br. 2.[7]

Na osnovu prikazanih rezultata može se zaključiti da veliki broj ispitanika (62,1%) je zadovoljan postojećim (tradicionalnim) načinom realizacije matematičkih sadržaja, jer su mišljenja da tako planirane sadržaje učenici u dovoljnoj mjeri (55,4%) i veoma uspješno (6,7%) usvajaju. Međutim, ne mali broj ispitanika (33,8%) uzima u obzir mogućnosti stvarnog napredovanja učenika pa se stoga slaže sa tvrdnjom da učenici djelimično usvajaju matematičke sadržaje odmjerene prosječnom učeniku, dok ima nastavnika (4,1%) koji misle da učenici slabo usvajaju tako planirane matematičke sadržaje. Razumljivo je da niko od ispitanika (0%) nije se složio sa tvrdnjom da učenici tako odmjerene matematičke sadržaje uopšte ne usvajaju.

Dakle, nastavnici su shodno svom iskustvu i sopstvenom zapažanju iskazali svoje mišljenje koje otkriva izvjesne razlike prema postojećem planiranju realizacije nastavnih sadržaja (odmjerenih prosječnom učeniku), jer mali procenat ispitanika (6,7%) misli da učenici veoma uspješno usvajaju pomenute sadržaje, što navodi na tvrdnju da treba nešto izmijeniti kako bi se broj učenika sa takvim nivoom znanja povećao.

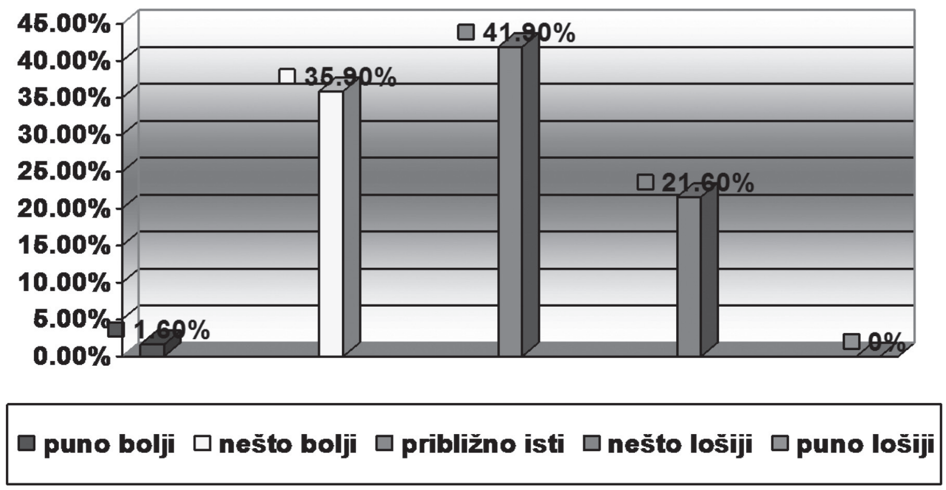
Treće pitanje u anketi odnosilo se na utvrđivanje stavova nastavnika prema nivou razumijevanja sadržaja koje učenici usvajaju u diferenciranoj u odnosu na tradicionalnu nastavu. Ispitanici su iskazali različita mišljenja, što se može jasno uočiti na Histogramu 12.

---

7 Matematičke sadržaje u početnoj nastavi matematike odmjerene prosječnom učeniku, učenici usvajaju:
a) veoma uspješno
b) uspješno
c) djelimično
d) slabo
e) nikako

Histogram 12.

Odgovori nastavnika na pitanje br. 3.[8]

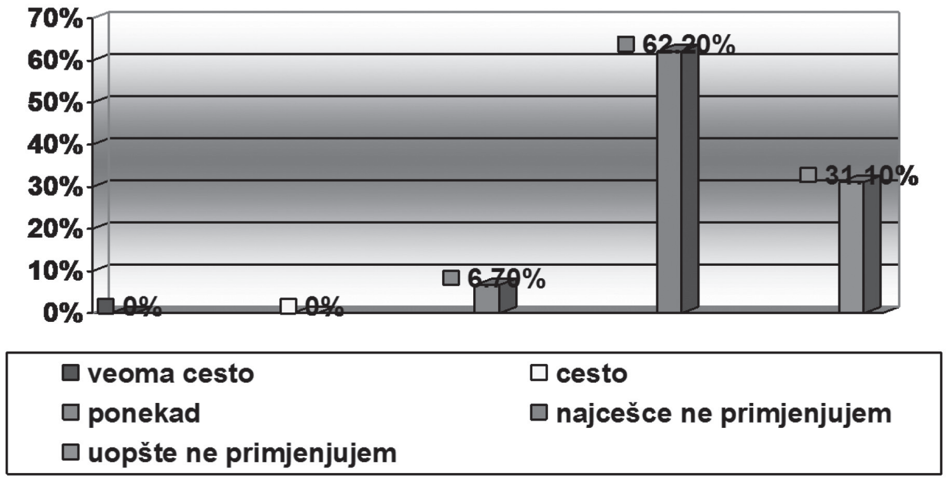


Većina ispitanika (41,9%) je mišljenja da učenici postižu približno isti nivo razumijevanja matematičkih sadržaja u diferenciranoj kao i u tradicionalnoj nastavi. Takođe, veliki broj ispitanika (35,9%) smatra da je nivo razumijevanja matematičkih sadržaja veći u nastavi primjerenoj učeničkim sposobnostima nego u uobičajenoj, tradicionalnoj nastavi. Nešto manji broj ispitanika (21,6%) je skeptičan prema diferenciranoj nastavi, smatrajući da ona pruža nešto lošiji nivo razumijevanja matematičkih sadržaja u odnosu na tradicionalni način realizacije. Međutim, ima ispitanika (1,6%) koji smatraju da je nivo razumijevanja matematičkih sadržaja puno bolji u diferenciranoj nego u tradicionalnoj nastavi, dok nije bilo onih koji smatraju da su ti efekti puno lošiji u diferenciranoj nego u klasičnoj nastavi.

Nastavnici su, dakle, podijeljenog mišljenja, ali ako se uzme u obzir njihovo iskustvo ili predznanje o modelima diferencirane nastave onda možemo biti zadovoljni njihovim mišljenjem, jer veliki broj ispitanika (36,5%) vjeruje u bolje rezultate diferencirane nastave ili je podijeljenog mišljenja (41,9%). Ovi nastavnici bi bez ikakvih problema prihvatili savremeniji (diferencirani) model realizacije matematičkih sadržaja, jer je vjerovanje u bolji rezultat bitan faktor reformisanja postojećeg načina realizacije matematičkih sadržaja.

Četvrto pitanje u anketi odnosilo se na utvrđivanje činjenice koliko često nastavnici primjenjuju diferencirani pristup u realizaciji matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike. Rezultati koje smo dobili ukazuju na približno isti rad svih nastavnika što je prikazano na Histogramu 13.

8 Diferencirana realizacija matematičkih sadržaja u odnosu na tradicionalni način realizacije, kad je riječ o nivou razumijevanja sadržaja, daje rezultate koji su:
a) puno bolji
b) nešto bolji
c) približno isti
d) nešto lošiji
e) puno lošiji



Histogram 13.

Odgovori nastavnika na pitanje br. 4.[9]

Sa histograma se vidi koliko se diferencirani pristup u realizaciji matematičkih sadržaja primenjuje u mlađim razredima osnovne škole. Uglavnom, većina ispitanika rade na uobičajen (tradicionalni) način rada. Svega 6,7% ispitanika se izjasnilo da ponekad koriste diferencirani pristup, iako se na prethodnom pitanju znatno veći broj ispitanika (36,5%) izjasnio da vjeruje u veće efekte diferenciranog rada.

Najveći broj ispitanika (62,2%) se izjasnio da najčešće ne primjenjuje, dok 31,1% ispitanika uopšte ne primjenjuje navedeni model nastave u realizaciji matematičkih sadržaja.

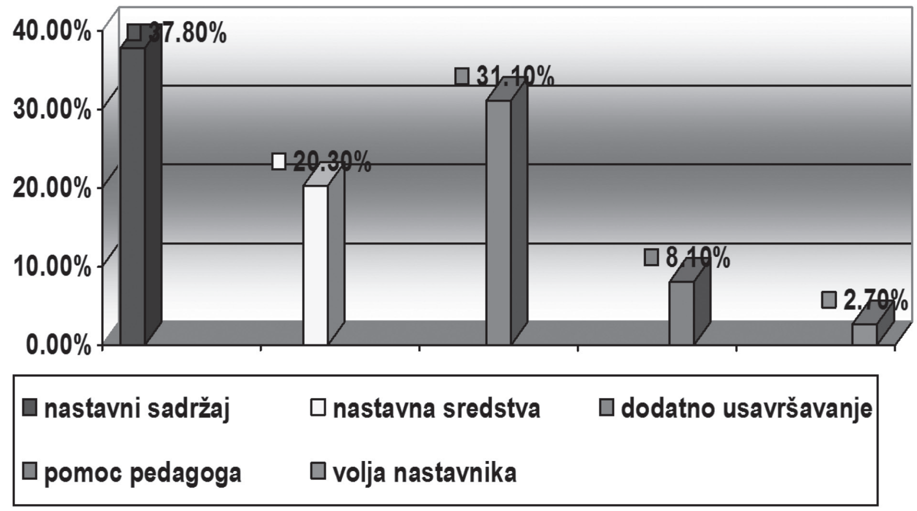
Neprimjenjivanje ovog modela nastave može se objasniti ne samo nespremnošću nastavnika da se više angažuju u osavremenjivanju nastave, već i uniformnošću postojećih nastavnih planova i programa, kao i nadležnih vaspitno – obrazovnih institucija koje ulažu male napore na edukaciji nastavnika u cilju osavremenjivanja nastave uopšte, pa i početne nastave matematike.

Peto pitanje u anketi odnosilo se na utvrđivanje stavova nastavnika prema tome šta je najbitnije za primjenu diferenciranog pristupa realizaciji jednačina. Rezultati ispitivanja (Histogram 14.) nam pokazuju da su ispitanici iskazali podijeljeno mišljenje, ali se, uglavnom, slažu da od njihove volje malo zavisi primjena navedenog modela u početnoj nastavi matematike.

9 Koliko često primjenjujete diferencirani pristup u realizaciji matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike?
  a) veoma često
  b) često
  c) ponekad
  d) najčešće ne primjenjujem
  e) uopšte ne primjenjujem

Histogram 14.

Odgovori nastavnika na pitanje br. 5.[10]



Rezultati ankete prikazani na histogramu ukazuju na činjenicu da najveći broj ispitanika (37,8%) smatra da primjena diferenciranog pristupa u realizaciji matematičkih sadržaja najviše zavisi od samih nastavnih sadržaja. Ukoliko su ti sadržaji diferencirani onda će se u nastavi primjenjivati i model diferenciranog rada. Zatim 31,1% ispitanika se izjasnio da je za primjenu navedenog modela najneophodnije obezbijediti dodatno usavršavanje nastavnika, dok 20,3% ispitanika smatra da primjena istraživanog modela u početnoj nastavi matematike je moguća ukoliko obezbijedimo odgovarajuća nastavna sredstva i pomagala. Za razliku od navedenih stavova samo 8,1% ispitanika je prioritet dalo pedagozima ili drugim stručnim licima u primjeni navedenog modela nastave, a samo 2,7% ispitanika smatra da je volja nastavnika ključni faktor primjene modela diferenciranog rada u početnoj nastavi matematike.

Na osnovu iskazanog mišljenja nastavnika može se zaključiti da ispitanici u skoro zanemarljivom procentu (2,7%) vide sebe kao glavnog faktora osavremenjivanja nastave novijim i u svijetu priznatim modelima nastave. Ogromna većina ispitanika (97,3%) smatra da primjena modela diferenciranog rada u početnoj nastavi matematike je moguća ukoliko se obezbijede diferencirani nastavni sadržaji, omogući dodatno usavršavanje nastavnika, pribavi odgovarajuća nastavna tehnologija i pruži dodatna pomoć pedagoga ili drugog stručnog lica u nastavi.

Može se reći da, ukoliko se koordiniraju akcije svih navedenih faktora, stvorili bi se optimalni uslovi za realizaciju jednog savremenog, valjanog i relaksirajućeg modela nastave prilagođenog realnim učeničkim mogućnostima.

10 Šta je po Vašem mišljenju najbitnije za primjenu diferenciranog pristupa u realizaciji jednačina?
a) diferenciran nastavni sadržaj
b) odgovarajuća nastavna sredstva i pomagala
c) dodatno usavršavanje nastavnika
d) pomoć pedagoga ili drugog stručnog lica u nastavi
e) veća volja nastavnika

IV KRITIČKI OSVRT NA EKSPERIMENTALNO PROVJERAVANI DIFERENCIRANI PRISTUP REALIZACIJI JEDNAČINA SA SLOŽENIM IZRAZIMA OD VIŠE RAZLIČITIH OPERACIJA

Pokušali smo da razvijemo i eksperimentalno valorizujemo diferencirani pristup realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija na tri nivoa težine u petom razredu koji se zasniva na uvažavanju individualnih sposobnosti učenika. Realizacija jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija na ovakav način bitno se razlikuje od postojećeg – uobičajenog načina rada. Nastojali smo da u okviru odjelenja izdvojimo približno homogene grupe na osnovu prethodno pokazanih rezultata (ocjena iz matematike) i njihove spremnosti za usvajanje matematičkih sadržaja.

Specifičnosti primjenjivanog diferenciranog pristupa najbolje će se sagledati upoređivanjem ovakvog načina rada s uobičajenim – tradicionalnim načinom rada. Cilj i jedne i druge nastave je da učenici ovladaju što je moguće većim fondom znanja i da ta znanja budu u službi primjenljivosti. Međutim, realna ostvarenja se bitno razlikuju. Diferencirana nastava pored težnje za individualizacijom nastave, teži da ostvari i integraciju učeničkih različitih predznanja, sposobnosti i interesovanja u zajednička odjeljenja. U ovoj nastavi se ne teži izdvajanju učenika sličnih predispozicija u zasebne homogenizovane sredine (odjeljenja), već se teži da se učenici zadrže u postojećim heterogenim odjeljenskim zajednicama.

Primjenom ovog modela nastave učenike nijesmo dijelili u grupe čiji bi članovi međusobno sarađivali i u diferenciranom grupnom radu zajednički rješavali određene zadatke. Dakle, nijesmo izdvajali i grupisali učenike u zasebne grupe u odjeljenju, čak nijesmo ni različite zadatke davali učenicima. U našem eksperimentalnom modelu nastave svi učenici su dobijali iste zadatke, s tom razlikom što su pojedini učenici zavisno od sopstvene spremnosti za usvajanje sadržaja o jednačinama dobijali određenu pomoć u radu. Ta pomoć se sastojala u diferenciranim zahtjevima koje su učenici dobijali na diferenciranom nastavnom materijalu. Učenici različitih nivoa i struktura znanja radili su iste zadatke koje smo pružanjem određene pomoći (olakšica u radu) primjerili njihovim kognitivnim predispozicijama.

U diferenciranom pristupu rješavanju jednačina pokušali smo da ispitamo efikasnost rada učenika u pogledu rješavanja zadataka primjenom složenih jednačina na način što smo:

- Realizaciju jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija organizovali primjenom diferenciranog rada. Ovaj model nastave smo sproveli koristeći diferencirani materijal. Rad s učenicima se kretao od frontalnog ka individualnom. Materijal koji su učenici dobijali obuhvatao je iste zadatke diferencirane na tri nivoa težine. Nastavnik je svakom učeniku, imajući u vidu njegove sposobnosti, davao materijal koji je odgovarao njegovom, približno realnom, nivou znanja.

- Utvrđivanje znanja o složenim jednačinama organizovali, takođe, primjenom diferenciranog pristupa u radu. Učenici su na ovim časovima dobijali materijal sa diferenciranim zahtjevima. Smatrali smo da će svi učenici moći da riješe iste zadatke, ako im pružimo određenu pomoć u toku rada. Ta pomoć, naravno, zavisi od nivoa znanja učenika. Zavisno od složenosti i težine zadatka učenici su dobijali različite nivoe pomoći. Pokušali smo da na taj način obezbedimo kod učenika podsticaj za rješavanje matematičkih zadataka, a samim tim i uspješnije usvajanje matematičkih sadržaja.
- Provjeravanje usvojenosti sadržaja o jednačinama sa složenim izrazima od više različitih operacija realizovali primjenom modela diferenciranog rada. Pokušali smo da ispitamo znanja učenika primjenom, takođe, diferenciranog materijala. Učenici su radili isti broj zadataka iste sadržaje, naravno, uz pružanje određenog nivoa pomoći. Budući da su učenici, na časovima realizacije i utvrđivanja, upoznati sa ovim modelom nastave to su bili više motivisani za iskazivanje svojih znanja.

Primjenjujući nastavu različitih nivoa težine učenike smo razvrstali prema nivou znanja u tri grupe. U prvu grupu smo kategorisali učenike koji su imali odlične ocjene iz matematike, u drugu vrlodobre, a u treću dobre i dovoljne. Nedovoljnih učenika nije bilo. Svjesni smo činjenice da postoje izvjesne razlike i među učenicima tako formiranih grupa, naročito među odličnim učenicima. Ako bi smo težili što većoj individualizaciji nastave, onda bi primjerenija bila diferencijacija na pet nivoa težine, koju mi iz optimalnih razloga nijesmo mogli primijeniti. Koristili smo odgovarajući didaktički materijal (nastavne listiće, višeslojne folije i sl.) bez koga se diferencirana nastava ne bi mogla sprovesti. Rezultati do kojih smo došli su motivirajuće djelovali na nastavnike koji su učestvovali u istraživačkom projektu, jer su, kako su nam i sami rekli, po prvi put bili u prilici da posmatraju učenike koji su u dotadašnjoj nastavi bili ”pasivni posmatrači” kako se aktivno uključuju u nastavni proces i sa zadovoljstvom rade zadatke koji im se nude.

Organizovanje nastave matematike po diferenciranom pristupu, odnosno modelu različitih nivoa težine ne treba po svaku cijenu primjenjivati, jer bi u izvjesnom stepenu ovu nastavu učinilo dominantnom što bi je vremenom favorizovalo. Stoga ne treba zapostavljati frontalni i grupni oblik rada, kao ni u pojedinim djelovima časa rad bez prisutne diferencijacije. U diferenciranoj nastavi se često mijenjaju nivoi znanja i sposobnosti učenika, te ih na vrijeme treba uočavati i uvažavati kako bi učenici shodno svom napredovanju ostvarili ”više” ciljeve, tj. prešli iz lakše u težu grupu.

Diferencirana realizacija jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija primjenom modela realizacije na tri nivoa težine stvara takvu klimu u razredu da svaki učenik rado prihvata svoje obaveze i efikasno usvaja planirane sadržaje o jednačinama. Pošto su ovi sadržaji modelovani prema minimalnim, optimalnim i maksimalnim zahtjevima to se svaki učenik nalazi u prilici da razumije ono što se od njega traži i maksimalno se angažuje na iznalaženju originalnog rješenja datog zadatka. Mogućnost rješavanja zadataka pružanjem nivoa pomoći dodatno ohrabruje učenike za tačno iznalaženje njihovog rješenja, ali istovremeno stvara privid situacije. Učenici se navikavaju na olakšice u radu, pa ukoliko naiđu na težu situaciju olako posustaju. Stoga se čini neophodnim smjenjivanje nivoa pomoći adekvatnim izborom primjerenih (lakših) zadataka bez pružanja dodatne pomoći, kako se učenici ne bi navikli na kontinuiranu pomoć u radu.

U diferenciranoj početnoj nastavi matematike postoji tendecija da učenici ulažu što više napora u učenju i rješavanju zadataka kako bi prešli iz jedne (lakše) u drugu (težu) grupu. Ove pojave su tipične za uzrast djeteta do petog razreda. Međutim, može se desiti da kod nekih učenika, mada u manjem broju, dođe do pojave nesigurnosti u radu, pa učenik tada ”stagnira”, tj. prelazi iz teže u lakšu grupu. Uzroci toga mogu biti različite prirode i kreću se od stvarnog nedostatka sigurnosti u radu do želje da se iskažu superiornijim u lakšoj grupi (brže i tačnije urade zadatke u lakšoj grupi). Izgubljeno samopouzdanje se može vratiti dodatnim stimulisanjem takvih učenika putem pohvala i nagrada.

Realizacija matematičkih sadržaja o jednačinama primjenom diferenciranog pristupa u radu na tri nivoa težine tokom dužeg vremena može zapasti u očekivanu šablonsku nastavu. To se može izbjeći češćim varijacijama ovog modela nastave organizovanjem od tri do pet nivoa težine i primjenom različitih metoda i oblika rada.

V ZAKLjUČCI ISTRAŽIVANjA

Ukupni rezultati eksperimentalnog istraživanja ukazuju na opravdanost zahtjeva za diferencirani pedagoški pristup u nastavi matematike. Ovi rezultati ukazuju na činjenicu da odjeljenje nije homogena grupa, te da u skladu sa tim uvažavanje individualnih razlika podrazumijeva ograničavanje primjene metodskih postupaka jednakih za sve učenike i iznalaženje (otkrivanje) novih oblika i modela nastave koji prihvataju individualne osobenosti učenika.

Diferencirani pristup u realizaciji početne nastave matematike nedovoljno je proučavan i rijetko primjenjivan oblik individualizacije školskog učenja u našim školama. Njemački metodičar Fridrih Ceh (Friedrich Zech) u svojoj metodici matematike podrobnije je razjasnio neke specifičnosti vezane za organizaciju nastave matematike na diferenciranoj osnovi. Nastojali smo da analizom Cehove metodike matematike i dostupnih teorijskih razmatranja iz domaće i strane literature potpunije upoznamo specifičnosti diferencirane nastave, njene organizacione osobenosti, prednosti i manjkavosti, položaj i ulogu nastavnika i učenika u njoj, kako ne bi zapali u ozbiljnije probleme prilikom njene realizacije. Razmatranja proučavanih izvora pomenute domaće i strane literature ukazivala su na potrebu organizacije diferencirane nastave, tj. nastave na različitim nivoima težine.

Uspostavljajući vezu između relevantnih psihološko – pedagoških shvatanja i naučne zasnovanosti pokušali smo da razvijemo diferencirani pristup realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike na različitim nivoima težine. Identifikovani su relativno različiti nivoi i strukture znanja iz oblasti matematike na polju razumijevanja i mogućnosti usvajanja matematičkih sadržaja:

a) nivo znanja učenika koji omogućava praćenje nastave matematike uz značajnu dodatnu nastavnu pomoć,
b) nivo znanja učenika koji omogućava uspješno praćenje nastave matematike uz minimalnu nastavnu pomoć,
v) nivo znanja učenika koji bez ikakve dodatne pomoći mogu uspješno pratiti i usvajati matematičke sadržaje.

Prepoznate su još neke individualne razlike koje u značajnoj mjeri utiču na uspjeh učenika u realizaciji matematičkih sadržaja (jednačina). Nastojali smo da te razlike što dublje analiziramo pa smo identifikovali različite stavove učenika i nastavnika prema matematičkim sadržajima koji se obrađuju u početnoj nastavi matematike. Teorijske osnove na kojima se zasniva organizacija diferencirane nastave na tri nivoa težine pokušali smo da konkretizujemo u okviru izvedenog modela diferencirane realizacije jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija u petom razredu. Eksperimentalno istraživanje sprovedeno je s ciljem utvrđivanja pedagoških efekata (boljeg razumijevanja i efikasnijeg rješavanja zadataka) i didaktičko – metodičkih vrijednosti učenja (učenja na realnim osnovama sopstvenih sposobnosti) u okviru različitih modela diferencirane realizacije jednačina sa više operacija.

Na osnovu anketiranja učenika i nastavnika identifikovani su različiti stavovi koji upotpunjuju sprovedeno eksperimentalno istraživanje.

II

1. Rezultati učenika ostvareni u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi na časovima ponavljanja i utvrđivanja znanja pokazali su da je razlika između broja uspješno riješenih zadataka značajno veća u korist eksperimentalne grupe.

Veliki broj ispitanika u eksperimentalnoj grupi riješio je svaki zadatak, a aritmetička sredina uspješno riješenih zadataka u eksperimentalnoj znatno je veća od paralelne – kontrolne grupe. U toku eksperimenta učenici u eksperimentalnoj grupi značajno su napredovali u pogledu razumijevanja i efikasnog rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija.

U poređenju sa kontrolnom grupom, eksperimentalna grupa ostvarila je veći prosječan rezultat na svim nivoima znanja učenika u rješavanju jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija:

- razumijevanja jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija,
- rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija,
- primjene jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija u rješavanju zadataka.

2. Broj tačno riješenih zadataka u eksperimentalnoj grupi navodi na zaključak da je eksperimentalni faktor dovoljno efikasan u osposobljavanju učenika ispodprosječnih, prosječnih i iznadprosječnih opštih intelektualnih sposobnosti za uspješnije rješavanje zadataka primjenom jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija. U nastavi različitih nivoa težine, naročito su napredovali učenici ispodprosječnih i prosječnih predznanja, a evidentan je i napredak učenika nadprosječnih sposobnosti.

III

1. Ukupni rezultati učenika eksperimentalne i kontrolne grupe ostvareni na završnom ispitivanju uspješnog rješavanja jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija pokazali su da je razlika između aritmetičkih sredina veoma značajna na nivou pouzdanosti 0,01 u korist eksperimentalne grupe.

Učenici u eksperimentalnoj grupi postigli su značajno veće prosječne vrijednosti u odnosu na učenike u kontrolnoj grupi. Eksperimentalna grupa značajno je napredovala u odnosu na sopstvene rezultate inicijalnog stanja za razliku od kontrolne grupe. Učenici u eksperimentalnoj grupi iskazali su veću samostalnost u rješavanju zadataka nego u kontrolnoj grupi.

Rezultati istraživanja potvrđuju pomoćnu hipotezu da diferencirani pristup realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole omogućava samostalan rad učenika prilagođen njegovim sposobnostima, načinu rada i tempu napredovanja u odnosu na klasičnu – nediferenciranu nastavu.

2. Upoređivanje rezultata na početku eksperimenta sa rezultatima na kraju eksperimenta može se zaključiti da su značajnije napredovali učenici eksperimentalne grupe pokazujući veću samostalnost u radu za razliku od učenika kontrolne grupe. Znači diferencirana početna nastava matematike značajno je uticala na povećanje samostalnosti učenika u rješavanju jednačina. Međutim, kontrolna grupa nije ostvarila značajniji pomak u odnosu na inicijalno stanje što znači da nediferencirana (klasična) nastava nije značajnije uticala na povećanje samostalnosti učenika i njihove spremnosti za uspješno rješavanje jednačina.

IV

1. Pod uticajem eksperimentalnog faktora ispitanici eksperimentalne grupe pokazali su veću zainteresovanost od ispitanika u kontrolnoj grupi. Eksperimentalna grupa ostvarila je veći uspjeh i pokazala značajniju zainteresovanost za ponuđene zadatke od kontrolne grupe. U cjelini gledano eksperimentalna grupa je bolje napredovala od kontrolne zahvaljujući iskazanom interesovanju učenika za rješavanje zadataka primjenom jednačina.

Dobijeni rezultati potvrdili su pomoćnu hipotezu da diferencirani pristup realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole dodatno motiviše nadprosječne, prosječne i ispodprosječne učenike za razliku od nastave organizovane na klasičan – nediferenciran način rada.

2. Na osnovu utvrđenih statističkih pokazatelja možemo zaključiti da su u diferenciranoj nastavi (nastavi na tri nivoa težine) u realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija značajno povećali interesovanje učenici svih nivoa znanja u odnosu na nediferenciranu nastavu. To se naročito odnosi na učenike ispodprosječnog i prosječnog nivoa znanja, kojima ova nastava pruža veće šanse za dokazivanje od klasične nastave.

V

1. Učenici eksperimentalne grupe ostvarili su veći prosječni uspjeh u rješavanju jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija od učenika kontrolne grupe na završnom ispitivanju. Razlika je značajna na nivou pouzdanosti 0,01. Učenici ek-

sperimentalne grupe su u prosjeku značajno više napredovali u rješavanju jednačina sa više operacija u odnosu na učenike kontrolne grupe.

Dobijeni rezultati potvrđuju pomoćnu hipotezu da modeli diferencirane realizacije jednačina u petom razredu osnovne škole povećavaju sposobnosti učenika za rješavanje zadataka primjenom jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija u odnosu na postojeći tradicionalni način rada.

2. Statistički pokazatelji upućuju na zaključak da su u diferenciranoj nastavi povećane sposobnosti učenika ispodprosječnog, prosječnog i iznadprosječnog uspjeha kod rješavanja zadataka primjenom jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija. Najviše su napredovali ispodprosječni i prosječni učenici, mada je evidentan napredak i nadprosječnih učenika. Klasična nastava koja je sprovođena u kontrolnoj grupi nije bitnije uticala na povećanje znanja učenika na bilo kom nivou.

VI

Rezultati istraživanja potvrdili su sve pomoćne hipoteze, a time i glavnu hipotezu koja glasi: „***Diferenciranim pristupom realizaciji jednačina u petom razredu osnovne škole postiže se veći napredak u pogledu kvaliteta znanja i razvoja sposobnosti učenika za rješavanje raznih zadataka primjenom jednačina nego u nastavi koja nije organizovana na primjeni diferenciranog rada u realizaciji jednačina (tradicionalnoj nastavi)***.

VII

1. Rezultati istraživanja primjene modela diferencirane realizacije jednačina upotpunjeni su anketiranjem učenika i nastavnika, neposredno poslije obavljenog finalnog testiranja.

Utvrđena je velika razlika u odgovorima učenika paralelnih grupa, na primijenjenoj anketi, po pitanju razumijevanja zadataka koje su rješavali u toku eksperimenta. Učenici eksperimentalne grupe su se izjasnili da su u potpunosti razumjeli zadatke koje su rješavali i da ih takvi zadaci podstiču na rad, za razliku od zadataka koje djelimično ili uopšte ne razumiju. Najveći broj ispitanika ove grupe se izjasnio da bi, ukoliko bi bili u prilici da sami biraju, najčešće radili one zadatke koje razumiju.

Učenici paralelne – kontrolne grupe su iskazali podijeljeno mišljenje po pitanju zadataka koje su rješavali. Najveći broj ispitanika ove grupe djelimično je razumio zadatke koje su rješavali, dok je, takođe, znatan broj ispitanika upotpunosti razumio ove zadatke, a bilo je i onih koji uopšte nijesu razumjeli ponuđene zadatke. Odgovori ispitanika ove grupe su saglasni odgovorima ispitanika eksperimentalne grupe po pitanju interesovanja za rad onih zadataka koje dobro razumiju i efikasnosti rješavanja zadataka koje djelimično razumiju ili uopšte ne razumiju. Razumljivo je da učenici na ovom uzrastu teže što većoj afirmaciji kroz uspješno obavljanje školskih obaveza, te su se učenici kontrolne grupe izjasnili da bi najčešće rješavali zadatke koje razumiju, ukoliko bi bili u prilici sami da ih biraju.

Dakle, učenici paralelnih grupa, eksperimentalne i kontrolne, su iskazali stavove koji potvrđuju našu glavnu hipotezu.

VIII

Anketiranje nastavnika u velikoj mjeri razotkriva pravu sliku postojećeg obrazovnog sistema. Naime, nastavnici su uglavnom slabo upoznati s pojmom diferencirane nastave. Međutim, oni su iskazali podijeljeno mišljenje po pitanju matematičkih sadržaja koji se obrađuju na klasičan način. Istina, nešto veći broj ispitanika smatra da učenici matematičke sadržaje, odmjerene prosječnom učeniku, u dovoljnoj mjeri usvajaju, dok nešto manji broj ispitanika nije zadovoljan postojećim načinom rada, jer smatra da učenici na taj način samo djelimično usvajaju nastavne sadržaje o jednačinama. Nastavnici su iskazali podijeljeno mišljenje po pitanju poređenja dva modela nastave. Veći broj ispitanika smatra da model diferencirane realizacije matematičkih sadržaja pruža približno iste šanse za razumijevanje ovih sadržaja u odnosu na klasičnu nastavu, što je i razumljivo s obzirom na iskazano minimalno znanje o diferenciranom pristupu u nastavi. Nastavnici koji nijesu zadovoljni znanjima koje učenici stiču u klasičnoj nastavi, složili su se s mišljenjem da je nivo razumijevanja jednačina kod učenika veći u diferenciranoj nego u klasičnoj nastavi.

Bez obzira na vjerovanje u bolje rezultate diferenciranog rada, rezultati ankete su pokazali da skoro svi ispitanici najčešće ne primjenjuju ili uopšte ne primjenjuju diferencirani pristup u realizaciji matematičkih sadržaja. Da bi obrazložili zašto ne koriste savremeniji pristup u realizaciji matematičkih sadržaja, nastavnici smatraju da je neophodno obezbijediti, na prvom mjestu diferenciran nastavni sadržaj, zatim dodatno usavršavanje (edukovanje) nastavnika i odgovarajuća nastavna sredstva i pomagala.

Mali broj nastavnika se slaže s tvrdnjom da se diferencirani rad može sprovesti uz veće angažovanje pedagoga i drugih stručnih lica u nastavi ili veću volju nastavnika.

Analizirani rezultati ankete ukazuju na minimalno znanje nastavnika o savremenim modelima nastave i na potrebu većeg angažovanja nadležnih institucija ukoliko se želi povećati učenički nivo znanja i sposobnosti razumijevanja matematičkih sadržaja.

IX

Dobijeni rezultati eksperimentalnog istraživanja i analize izvedenog anketiranja učenika i nastavnika pokazuju da diferencirani pristup u radu: daje bolje rezultate u odnosu na klasičan rad; u značajnoj mjeri rasterećuje učenike i motiviše ih za rad; zahtijeva dodatnu edukaciju nastavnog kadra, diferenciranje nastavnih planova i programa i nabavku neophodne nastavne tehnologije.

VI PRILOZI

- Diferencirani pristup realizaciji jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija na časovima usvajanja novih znanja
- Diferencirani pristup realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija na časovima ponavljanja i utvrđivanja usvojenih znanja
- Diferencirani pristup realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija na časovima provjeravanja usvojenih znanja
- Upitnik za učenike
- Upitnik za nastavnike

Prilog 1

Diferencirani pristup realizaciji jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija na časovima usvajanja novih znanja

Nastavni predmet: Matematika
Razred: Peti
Tema: Jednačine
Operativni cilj: Rješavanje jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija.
Tip časa: Diferencirana realizacija novog gradiva.
Cilj časa: Usvajanje optimalnih znanja o jednačinama sa više računskih operacija i uvježbavanje postupka njihovog rješavanja.
Zadaci časa: Razvijati kod učenika tačnost, preciznost i upornost u radu.
Obrazovni: Osposobiti učenike da prepoznaju nepoznatu i otkriju postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija ”svođenjem” na prostiji oblik (jednačine sa jednom operacijom) sve do njenog konačnog rješenja.
Vaspitni: Razvijati kod učenika tačnost, preciznost i upornost u radu, njegovati logičko mišljenje i zaključivanje.
Specijalni: Primjena diferenciranog pristupa u radu.

Tok časa:

Preparativna faza (10 minuta)
Frontalnim oblikom rada, primjenom metode razgovora uz korišćenje projekcije, heurističkim vođenjem nastavnika, učenici ponavljaju znanja o jednakosti, nepoznatoj, prostijim oblicima jednačina, a zatim i složenim izrazima kako bi se uočila sličnost između složenih izraza i jednačina sa više operacija.
Operativna faza (20 - 25 minuta)
U ovoj fazi rada u potpunosti je zastupljen diferencirani oblik rada koji se primjenjuje kroz problemsku nastavu, uz primjenu nastavnih listića i grafofolija. Učenici se dijele na tri približno homogene grupe. Zatim se svakoj grupi podijele nastavni listići. Sadržina nastavnog listića je ista za sve učenike, bez obzira na grupu kojoj je namijenjen, ali su zahtjevi diferencirani. U toku individualnog rada nastavnik prati rad učenika u svim grupama i sa grafofolije uz pomoć grafoskopa postupno prikazuje i komentariše pravilno urađen nastavni listić, a istovremeno od učenika zahtijeva da isprave eventualne greške.
Verifikativna faza (8 minuta)
Učenici individualnim radom rješavaju zadatke sa novog nastavnog listića uz kontrolu nastavnika.
Faza domaćeg zadatka (2 – 5 minuta)
Nastavni listić dat u verifikativnoj fazi se dovršava kod kuće i zadaju zadaci iz udžbenika ili zbirke zadataka.

Nastavne listiće za operativnu fazu (A_1, B_1 i V_1) izložićemo na primjerima 1, 2 i 3.
Nastavne listiće za verifikativnu fazu ($2A_1$, $2B_1$, $2V_1$) izložićemo na primjerima 4, 5 i 6.

Primjer 1: Nastavni listić A_1 (*zahtjevi najnižeg nivoa*)
Dopiši nedostajuće riječi i brojeve.

* Za izradu zgrade planirano je da se utroši 100 000 blokova. Zidari su 7 dana radili istim tempom i svakog dana ugrađivali isti broj blokova. Kada im je osmi dan stigla pomoć ugrađeno je 21700 blokova, tako da im je ostalo još neugrađeno 8300 blokova. Po koliko su blokova zidari ugrađivali dnevno dok im nije stigla pomoć.

Zidari su radili ____ dana zgradu istim tempom. Svakog dana ugrađivali su po x blokova, što možemo zapisati:

7 · ___

Pošto im je ________ dan stigla pomoć, svi radnici zajedno ugradili su _______ blokova, što zajedno s prethodno ugrađenim blokovima možemo zapisati:

7 · x + ______

Pošto je završno s osmim danom od planiranih 100 000 ostalo još da se utroši ___________ blokova, to se jednakost može zapisati u sljedećem obliku:

__ · x + 21 7000 = ______ – 8 300

Dobijena jednakost u kojoj imamo nepoznatu nazivamo ____________ . U jednačini koju smo dobili nepoznat je ______ sabirak, koji je dat u obliku proizvoda u kome je nepoznat drugi ________.

Kada izračunamo razliku na desnoj strani jednačine dobijamo:

7 · x + 21 7000 = _______

Nepoznati sabirak izračunavamo kada od _________ oduzmemo __________ sabirak, što zapisujemo:

7 · x = 91 700 – _______ ,

odnosno:

7 · x = _______

Dobili smo jednačinu sa nepoznatim _____________ .

Vrijednost nepoznatog činioca izračunavamo kada proizvod podijelimo poznatim _________, što zapisujemo:

x = 70 000 : ___ ,

odnosno:

x = ______

Provjera: Ako umjesto nepoznatog činioca stavimo (upišemo) njegovu vrijednost izvršićemo provjeru tačnosti dobijenog rješenja:

7 · ______ + 21 700 = ______ + 21 700 = ___________

Odgovor: Zidari su ________ ugrađivali po 10 000 blokova prije nego što im je stigla pomoć.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je nepoznati činilac dat u obliku sabirka, na osnovu čega možemo izvesti zaključak:

Nepoznati činilac se određuje kada se proizvod podijeli poznatim činiocem.

* Kada je otac od trećine svoje mjesečne zarade izdvojio 3 600 € za ljetovanje svoje porodice ostalo mu je 12 000 €. Koliko iznosi očeva mjesečna zarada?

Očeva mjesečna zarada je nepoznata i označava se sa ___. Trećinu očeve zarade zapisujemo:

x : ___

Od trećine te zarade otac je izdvojio _______ €, a ostalo mu je 12 000 €, odnosno matematički zapisano:

x : 3 – 3 600 = ______

Dobili smo jednačinu sa nepoznatim ____________, koji je dat u obliku količnika: ___ : ___.

Nepoznati umanjenik je jednak zbiru razlike i umanjioca:

x : 3 = 12 000 + _______ ,

odnosno:

x : 3 = _________

Sada smo dobili jednačinu sa nepoznatim ____________. Pošto je trećina nepoznatog broja jednaka 15 600, cio nepoznati broj je 3 puta veći od ______, pa je:

x = 15 600 · __ ,

odnosno:

x = _______

Provjera: Ako umjesto nepoznatog djeljenika stavimo njegovu vrijednost izvršićemo provjeru:

______ : 3 – 3 600 = ______ – _____ = ________

Odgovor: Očeva ________ zarada iznosi 46 800 €.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je prvo figurisala nepoznata u sklopu umanjenika, koja se postupnim rješavanjem svodi na jednačinu sa nepoznatim djeljenikom. Na osnovu toga može se izvesti zaključak:

Nepoznati djeljenik se izračunava kada se količnik pomnoži sa djeliocem.

* Ako se 24 600 podijeli na izvjestan broj jednakih djelova, pa se jednom takvom dijelu doda 240, dobija se 840. Na koliko je jednakih djelova podijeljen broj 24 600?

Zapiši količnik broja 24 600 i nepoznatog broja

______ : x

Ako se sada takvom dijelu doda 240:

24 600 : x + _____

dobija se 840:

24 600 : x + 240 = _____

U dobijenoj jednačini nepoznat je prvi _________ koji je dat u obliku količnika. Nepoznati sabirak je jednak razlici ________ i poznatog sabirka:

24 600 : x = 840 – ______ ,

a to je:

24 600 : x = ______

Dobili smo jednačinu sa nepoznatim ______________.

Pošto je 24 600 ”iks” puta veće od broja 600, onda je:

x = 24 600 : _____ ,

odnosno:

x = ____

Provjera: Ako umjesto nepoznatog djelioca u okviru nepoznatog sabirka stavimo, odnosno upišemo njegovu vrijednost izvršićemo provjeru tačnosti rješenja date jednačine:

24 600 : ___ + 240 = _____ + 240 = _____

Odgovor: Broj 24 600 je ____________ na 41 jednaki dio.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je prvo figurisala nepoznata u sklopu prvog sabirka, koja se postupnim rješavanjem svodi na jednačinu sa nepoznatim djeliocem. Na osnovu toga može se izvesti zaključak:

Nepoznati djelilac se izračunava kada se djeljenik podijeli količnikom.

Primjer 2: Nastavni listić B$_1$ (***zahtjevi srednjeg nivoa***)
Dopiši nedostajuće riječi i brojeve.

* Za izradu zgrade planirano je da se utroši 100 000 blokova. Zidari su 7 dana radili istim tempom i svakog dana ugrađivali isti broj blokova. Kada im je osmi dan stigla pomoć ugrađeno je 21700 blokova, tako da im je ostalo još neugrađeno 8300 blokova. Po koliko su blokova zidari ugrađivali dnevno dok im nije stigla pomoć.

Zidari su radili ____ dana zgradu istim tempom. Svakog dana ugrađivali su po x blokova, što možemo zapisati:

___ · ___

Pošto im je ________ dan stigla pomoć, svi radnici zajedno ugradili su _______ blokova, što zajedno s prethodno ugrađenim blokovima možemo zapisati:

___ · x + ___

Pošto je završno s osmim danom od planiranih _______ ostalo još da se utroši ___________ blokova, to se jednakost može zapisati u sljedećem obliku:

___ · ___ + 21 7000 = ______ – 8 300

Dobijena jednakost u kojoj imamo nepoznatu nazivamo ____________ . U jednačini koju smo dobili nepoznat je ______ sabirak, koji je dat u obliku __________ u kome je nepoznat drugi ________.

Kada izračunamo razliku na desnoj strani jednačine dobijamo:

__ · __ + _______ = _______

Nepoznati sabirak izračunavamo kada od _________ oduzmemo __________ sabirak, što zapisujemo:

__ · x = 91 700 – _______ ,

odnosno

7 · __ = _______

Dobili smo jednačinu sa nepoznatim _____________ .

Vrijednost nepoznatog _________ izračunavamo kada proizvod podijelimo poznatim _________, što zapisujemo:

__ = 70 000 : ___ ,

odnosno

__ = ______

Provjera: Ako umjesto nepoznatog činioca stavimo (upišemo) njegovu vrijednost izvršićemo provjeru tačnosti dobijenog rješenja:

7 · _____ + _______ = ______ + _____ = _____

Odgovor: Zidari su _______ ___________ po 10 000 ________ prije nego što im je stigla pomoć.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je nepoznati činilac dat u obliku sabirka, na osnovu čega možemo izvesti zaključak:

Nepoznati činilac se određuje kada se proizvod podijeli poznatim činiocem.

* Kada je otac od trećine svoje mjesečne zarade izdvojio 3 600 € za ljetovanje svoje porodice ostalo mu je 12 000 €. Koliko iznosi očeva mjesečna zarada?

Očeva _______ zarada je nepoznata i označava se sa ___. Trećinu očeve zarade zapisujemo:

x : ___

Od trećine te zarade, ______ je izdvojio _______ €, a ostalo mu je 12 000 €, odnosno matematički zapisano:

___ : ___ − 3 600 = ______

Dobili smo jednačinu sa nepoznatim ____________, koji je dat u obliku količnika: ___ : ___.

Nepoznati ____________ je jednak zbiru razlike i umanjioca:

x : __ = 12 000 + ______ ,

odnosno:

__ : 3 = ______

Sada smo dobili jednačinu sa nepoznatim ____________. Pošto je trećina nepoznatog broja jednaka 15 600, cio nepoznati broj je 3 puta veći od ______, pa je:

x = _______ · 3 ,

odnosno:

__ = ________

Provjera: Ako umjesto nepoznatog djeljenika stavimo njegovu vrijednost izvršićemo provjeru:

_______ : 3 − ______ = _______ − ______ = ________

Odgovor: Očeva _________ _________ iznosi 46 800 _________.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je prvo figurisala nepoznata u sklopu umanjenika, koja se postupnim rješavanjem svodi na jednačinu sa nepoznatim djeljenikom. Na osnovu toga može se izvesti zaključak:

Nepoznati djeljenik se izračunava kada se količnik pomnoži sa djeliocem.

* Ako se 24 600 podijeli na izvjestan broj jednakih djelova, pa se jednom takvom dijelu doda 240, dobija se 840. Na koliko je jednakih djelova podijeljen broj 24 600?

Zapiši količnik broja 24 600 i nepoznatog broja

______ : __

Ako se sada takvom dijelu doda 240:

_______ : x + _____

dobija se 840:

24 600 : __ + 240 = _____

U dobijenoj jednačini nepoznat je prvi _________ koji je dat u obliku količnika. Nepoznati sabirak je jednak razlici ________ i poznatog sabirka:

_______ : __ = 840 – ______ ,

a to je:

________ : x = ______

Dobili smo ____________ sa nepoznatim ______________.

Pošto je 24 600 ”iks” puta veće od broja 600, onda je:

__ = 24 600 : _____ ,

odnosno:

x = ____

Provjera: Ako umjesto nepoznatog djelioca u okviru nepoznatog sabirka stavimo, odnosno upišemo njegovu vrijednost izvršićemo provjeru tačnosti rješenja date jednačine:

24 600 : __ + _____ = ____ + ____ = _____

Odgovor: Broj __________ je podijeljen na 41 jednaki dio.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je prvo figurisala nepoznata u sklopu prvog sabirka, koja se postupnim rješavanjem svodi na jednačinu sa nepoznatim djeliocem. Na osnovu toga može se izvesti zaključak:

Nepoznati djelilac se izračunava kada se djeljenik podijeli količnikom.

Primjer 3: Nastavni listić V_1 (***zahtjevi najvišeg nivoa***)

Dopiši nedostajuće riječi i brojeve.

* Za izradu zgrade planirano je da se utroši 100 000 blokova. Zidari su 7 dana radili istim tempom i svakog dana ugrađivali isti broj blokova. Kada im je osmi dan stigla pomoć ugrađeno je 21700 blokova, tako da im je ostalo još neugrađeno 8300 blokova. Po koliko su blokova zidari ugrađivali dnevno dok im nije stigla pomoć.

Zidari su radili ____ dana zgradu istim tempom. Svakog dana ugrađivali su po ___ blokova, što možemo zapisati:

___ · ___

Pošto im je ________ dan stigla pomoć, svi radnici zajedno ugradili su _______ blokova, što zajedno s prethodno ugrađenim blokovima možemo zapisati:

___ · ___ + ______

Pošto je završno s osmim danom od planiranih _______ ostalo još da se utroši ___________ blokova, to se jednakost može zapisati u sljedećem obliku:

__ · __ + ______ = ______ – 8 300

Dobijena jednakost u kojoj imamo nepoznatu nazivamo ____________ . U _________ koju smo dobili nepoznat je ______ sabirak, koji je dat u obliku __________ u kome je ________ drugi ________.

Kada izračunamo razliku na desnoj strani jednačine dobijamo:

__ · __ + _______ = _______

Nepoznati sabirak izračunavamo kada od _________ oduzmemo __________ sabirak, što zapisujemo:

__ · __ = _______ – _______ ,

odnosno

__ · __ = _______

Dobili smo jednačinu sa nepoznatim _____________ .

Vrijednost nepoznatog _________ izračunavamo kada proizvod podijelimo poznatim _________, što zapisujemo:

__ = _______ : ___ ,

odnosno

__ = ______

Provjera: Ako umjesto nepoznatog činioca stavimo (upišemo) njegovu vrijednost izvršićemo provjeru tačnosti dobijenog rješenja:

__ · _____ + _______ = ______ + _____ = _____

Odgovor: ______ su _______ ___________ po 10 000 ________ prije nego što im je stigla pomoć.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je nepoznati činilac dat u obliku sabirka, na osnovu čega možemo izvesti zaključak:

Nepoznati činilac se određuje kada se proizvod podijeli poznatim činiocem.

* Kada je otac od trećine svoje mjesečne zarade izdvojio 3 600 € za ljetovanje svoje porodice ostalo mu je 12 000 €. Koliko iznosi očeva mjesečna zarada?

Očeva _______ _______ je nepoznata i označava se sa ___. Trećinu ______ zarade zapisujemo:

___ : ___

Od trećine te zarade, ______ je izdvojio _______ €, a ostalo mu je _______ €, odnosno matematički zapisano:

___ : ___ – 3 600 = _________

Dobili smo __________ sa nepoznatim ____________, koji je dat u obliku količnika: ___ : ___.

Nepoznati ____________ je jednak zbiru razlike i umanjioca:

__ : __ = 12 000 + ______ ,

odnosno:

__ : __ = ______

Sada smo dobili jednačinu sa nepoznatim ____________. Pošto je trećina nepoznatog broja jednaka ______, cio nepoznati broj je __ puta veći od ______, pa je:

__ = _______ · 3 ,

odnosno:

__ = ________

Provjera: Ako umjesto nepoznatog djeljenika stavimo njegovu vrijednost izvršićemo provjeru:

_______ : __ – ______ = _______ – ______ = ________

Odgovor: Očeva _________ _________ iznosi 46 800 _________.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je prvo figurisala nepoznata u sklopu umanjenika, koja se postupnim rješavanjem svodi na jednačinu sa nepoznatim djeljenikom. Na osnovu toga može se izvesti zaključak:

Nepoznati djeljenik se izračunava kada se količnik pomnoži sa djeliocem.

* Ako se 24 600 podijeli na izvjestan broj jednakih djelova, pa se jednom takvom dijelu doda 240, dobija se 840. Na koliko je jednakih djelova podijeljen broj 24 600?

Zapiši količnik broja 24 600 i nepoznatog broja

______ : __

Ako se sada takvom dijelu doda 240:

_______ : __ + _____

dobija se 840:

______ : __ + ____ = _____

U dobijenoj jednačini nepoznat je prvi _________ koji je dat u obliku ____________. Nepoznati sabirak je jednak razlici ________ i poznatog ________:

_______ : __ = _____ – ______ ,

a to je:

________ : __ = ______

Dobili smo ____________ sa nepoznatim ______________.
Pošto je 24 600 ”iks” puta veće od broja ____, onda je:

__ = _______ : _____ ,

odnosno:

__ = ____

Provjera: Ako umjesto nepoznatog djelioca u okviru nepoznatog sabirka stavimo, odnosno upišemo njegovu vrijednost izvršićemo provjeru tačnosti rješenja date jednačine:

______ : __ + _____ = ____ + ____ = _____

Odgovor: Broj __________ je podijeljen na 41 jednaki dio.

Na prethodnom primjeru uočili smo postupak rješavanja jednačine sa složenim izrazima od dvije različite operacije u kojoj je prvo figurisala nepoznata u sklopu prvog sabirka, koja se postupnim rješavanjem svodi na jednačinu sa nepoznatim djeliocem. Na osnovu toga može se izvesti zaključak:

Nepoznati djelilac se izračunava kada se djeljenik podijeli količnikom.

Primjer 4: Nastavni listić $2A_1$ (zahtjev najnižeg nivoa)

1) *Riješi jednačinu:*

$$x \cdot 5 + 3\,600 = 12\,300$$

Uočimo nepoznati činilac dat u obliku prvog sabirka. Nepoznati sabirak izračunavamo kada od zbira oduzmemo poznati sabirak:

$$x \cdot 5 = 12\,300 - \_\_\_\_\_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x \cdot 5 = \_\_\_\_\_\_$$

Nepoznati činilac se određuje kada proizvod podijelimo poznatim ___________:

$$x = 8\,700 : \_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Provjera: $1\,740 \cdot 5 + 3\,600 = \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

2) *Riješi jednačinu:*

$$x : 10 + 9\,360 = 21\,460$$

Uočimo nepoznati djeljenik dat u obliku prvog sabirka. Nepoznati sabirak izračunavamo kada od zbira oduzmemo poznati sabirak:

$$x : 10 = \_\_\_\_\_\_ - 9\,360 ,$$

odnosno:

$$x : 10 = \_\_\_\_\_\_$$

Nepoznati djeljenik se određuje kada količnik pomnožimo sa ____________.

$$x = 12\,100 \cdot \_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x = \_\_\_\_\_\_\_$$

Provjera: $121\,000 : 10 + 9\,360 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

3) *Riješi jednačinu*:

$$2\,400 : x - 35 = 25$$

Uočimo nepoznati djelilac dat u obliku umanjioca. Nepoznati umanjenik izračunavamo kada razliku saberemo sa umanjiocem:

$$2\,400 : x = 25 + \_\_\_\_\_ ,$$

odnosno:

$$2\,400 : x = \_\_\_\_$$

Sada izračunavamo vrijednost nepoznatog djelioca tako što djeljenik podijelimo sa __________:

$$x = \_\_\_\_\_\_ : 60 ,$$

odnosno:

$$x = \_\_\_\_$$

Provjera: $2\,400 : 40 - 35 = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Primjer 5: Nastavni listić $2B_1$ (zahtjev srednjeg nivoa)

1) *Riješi jednačinu*:

$$x \cdot 5 + 3\,600 = 12\,300$$

Uočimo nepoznati činilac u prvom sabirku. Nepoznati sabirak izračunavamo kada od zbira oduzmemo poznati ________:

$$x \cdot 5 = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x \cdot \_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

Nepoznati činilac se određuje kada proizvod ________ poznatim ___________:

$$x = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x = \_\_\_\_\_\_$$

Provjera: $1\,740 \cdot \_\_ + 3\,600 = \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

2) *Riješi jednačinu*:

$$x : 10 + 9\,360 = 21\,460$$

Uočimo nepoznati djeljenik dat u obliku prvog sabirka. Nepoznati sabirak izračunavamo kada od ________ oduzmemo poznati sabirak:

$$x : \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ - 9\,360 ,$$

odnosno:

$$\_\_\_ : 10 = \_\_\_\_\_\_$$

Nepoznati djeljenik se određuje kada količnik __________ sa ____________.

$$x = \_\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x = \_\_\_\_\_\_\_$$

Provjera: $121\,000 : \_\_ + 9\,360 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

3) *Riješi jednačinu*:

$$2\,400 : x - 35 = 25$$

Uočimo nepoznati djelilac dat u obliku umanjioca. Nepoznati umanjenik izračunavamo kada razliku saberemo sa ___________:

$$\_\_\_\_\_\_ : x = 25 + \_\_\_\_\_ ,$$

odnosno:

$$2\,400 : \_\_ = \_\_\_\_$$

Sada izračunavamo vrijednost nepoznatog djelioca tako što ________ podijelimo sa __________:

$$x = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_ ,$$

odnosno:

$$x = \_\_\_\_$$

Provjera: $\_\_\_\_\_\_ : 40 - 35 = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Primjer 6: Nastavni listić $2V_1$ (zahtjev najvišeg nivoa)

1) *Riješi jednačinu*:

$$x \cdot 5 + 3\,600 = 12\,300$$

Uočimo nepoznati činilac u prvom sabirku. Nepoznati sabirak izračunavamo kada od _______ oduzmemo poznati ________:

x · __ = ______ – _______ ,

odnosno:

__ · __ = ______

Nepoznati činilac se određuje kada _________ ________ poznatim ___________:

__ = ______ : ___ ,

odnosno:

__ = ______

Provjera: 1 740 · __ + ______ = ______ + ______ = _______

2) *Riješi jednačinu*:

$$x : 10 + 9\,360 = 21\,460$$

Uočimo nepoznati djeljenik dat u obliku prvog sabirka. Nepoznati sabirak izračunavamo kada od ________ oduzmemo poznati __________:

x : ___ = ______ – ______ ,

odnosno:

___ : ___ = ______

Nepoznati djeljenik se određuje kada __________ __________ sa ____________.

__ = ______ · ___ ,

odnosno:

__ = _______

Provjera: 121 000 : ___ + _____ = ________ + ________ = _______

3) *Riješi jednačinu*:

$$2\,400 : x - 35 = 25$$

Uočimo nepoznati djelilac dat u obliku umanjioca. Nepoznati umanjenik izračunavamo kada _________ saberemo sa ___________:

______ : x = ___ + _____ ,

odnosno:

______ : __ = ____

Sada izračunavamo vrijednost nepoznatog djelioca tako što ________ podijelimo sa __________:

___ = ______ : ___ ,

odnosno:

___ = ____

Provjera: ______ : 40 – ___ = ____ – ____ = ____

Prilog 2

Diferencirani pristup realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija na časovima ponavljanja i utvrđivanja usvojenih znanja

Nastavni predmet: Matematika
Razred: Peti
Tema: Jednačine
Operativni cilj: Rješavanje jednačine sa složenim izrazima od više različitih operacija
Tip časa: Diferencirani pristup ponavljanju i utvrđivanju gradiva
Cilj časa: Utvrđivanje osnovnih pojmova o jednačinama sa više operacija i uvježbavanje postupka njihovog rješavanja
Zadaci časa:
Obrazovni: Osposobiti učenike za brzo i efikasno uočavanje nepoznate u zadatku i primjenu jednačina sa više operacija za njihovo rješavanje.
Vaspitni: Omogućiti učenicima da na konkretnim primjerima (zadacima) iskažu tačnost, preciznost i upornost u radu i razvijati njihovo logičko mišljenje i zaključivanje.
Specijalni: Primjena diferenciranog pristupa u radu.
Tok časa:

Preparativna faza (10 minuta)
Poslije provjere domaćeg zadatka, učenici pod rukovodstvom nastavnika, primjenom metode razgovora uz korišćenje prezentacije heurističkim vođenjem, ponavljaju stečena znanja o postupku rješavanja jednačina sa više operacija. Ovaj rad se takođe odvija u diferenciranim grupama.
a) Učenici sa znanjima najvišeg nivoa verbalno objašnjavaju o kakvom tipu prikazane jednačine je riječ, koliko računskih operacija sadrži i sl.
b) Učenici sa prosječnim znanjima identifikuju nepoznatu u jednačini i kazuju postupak njenog izračunavanja (rješenja).
c) Učenici sa najskromnijim znanjima zapisuju postupak rješavanja jednačine, tj. zapisuju čemu je jednaka nepoznata i izračunavaju njenu vrijednost na osnovu onoga što su učenici iz prethodne dvije grupe rekli.

Operativna faza (25 minuta)
U ovoj fazi rada u potpunosti je zastupljen diferencirani oblik rada. Učenici su podijeljeni u tri približno homogene grupe i individualno rade na diferenciranim nastavnim listićima utvrđujući stečeno znanje sa prethodnog časa. Zadaci na nastavnim listićima su isti za sve učenike, ali su zahtjevi diferencirani. Nastavnik prati rad svih učenika, uočava njihove eventualne greške ili probleme u toku rada i blagovremeno ih koriguje uz korišćenje prezentacije.
Verifikativna faza (10 minuta)
Pod rukovodstvom nastavnika učenici provjeravaju tačnost urađenih zadataka i koriguju napravljene greške.
Nastavne listiće za operativnu fazu (A_2, B_2, V_2) izložićemo na primjerima I, II i III nivoa.

I nivo (A_2)

1. Odredi rješenje jednačine i provjeri tačnost rezultata.

$7 \cdot \boldsymbol{x} + 42\,700 = 77\,840$
$7 \cdot \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ - 42\,700$
$\_\_\_ \cdot \boldsymbol{x} = \_\_\_\_\_\_$
$\_\_\_ = 35\,140 : \_\_\_$
$\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

Provjera: ___ · 5 020 + _______ = ______ + _______ = ______

2. Riješi jednačinu i provjeri tačnost rezultata.

$36\,720 + \boldsymbol{x} : 9 = 81\,810$
$\boldsymbol{x} : \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ - 36\,720$
$\_\_\_ : 9 = \_\_\_\_\_\_\_$
$\_\_\_ = 45\,090 \cdot \_\_\_$
$\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

Provjera: _______ + 405 810 : ___ = _______ + _______ = _______

3. U magacinu je bilo 7 866 kg robe, a zatim je pristiglo još šest kamiona sa istom količinom robe, tako da je na kraju zaključeno da u magacinu ima 66 906 kg robe. Koliko je bilo robe u svakom kamionu?

Poznato je da je u magacinu bilo _________ kilograma robe. Stiglo je još 6 kamiona nove robe, a u svakom kamionu je bilo po ___ kilograma robe, što zajedno s robom koja je bila u magacinu iznosi:

$$7\,866 + \_\_\_ \cdot \boldsymbol{x}$$

Na kraju je zaključeno da u magacinu ima ______ kilograma robe, odnosno:

$7\,866 + 6 \cdot \_\_\_ = 66\,906$
$\_\_\_ \cdot \boldsymbol{x} = \_\_\_\_\_ - 7\,866$
$6 \cdot \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$
$\_\_\_ = 59\,040 : \_\_\_$
$\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Provjera: _____ + ___ · 9 840 = ______ + _______ = __________

Odgovor: ____

II nivo (B_2)

1. Odredi rješenje jednačine i provjeri tačnost rezultata.

   7 · ***x*** + 42 700 = 77 840
   ___ · ___ = ______ – 42 700
   ___ · ___ = ______
   ___ = ______ : ___
   ___ = _______

Provjera: ___ · ___ + _______ = ______ + _______ = ______

2. Riješi jednačinu i provjeri tačnost rezultata.

   36 720 + ***x*** : 9 = 81 810
   ___ : ___ = ______ – 36 720
   ___ : ___ = _______
   ___ = _______ · ___
   ___ = _______

Provera: _______ + ___ : ___ = __________________________________

3. U magacinu je bilo 7 866 kg robe, a zatim je pristiglo još šest kamiona sa istom količinom robe, tako da je na kraju zaključeno da u magacinu ima 66 906 kg robe. Koliko je bilo robe u svakom kamionu?

Poznato je da je u magacinu bilo _________ kilograma robe. Stiglo je još _______ kamiona nove robe, a u svakom kamionu je bilo po ___ kilograma robe, što zajedno s robom koja je bila u magacinu iznosi:

______ + ___ · ***x***

Na kraju je zaključeno da u magacinu ima ______ kilograma robe, odnosno:

   7 866 + ___ · ___ = ______
   ___ · ___ = _____ - ______
   ___ · ___ = ______
   ___ = ______ : ___
   ___ = ______

Provjera: _____ + ___ · ___ = ____________________________________

Odgovor: ____

III nivo (V_2)

1. Odredi rješenje jednačine i provjeri tačnost rezultata.

   $7 \cdot \boldsymbol{x} + 42\,700 = 77\,840$

   ___ · ___ = ______ – ______

   ____

   ____

   ____

Provjera: ____

2. Riješi jednačinu i provjeri tačnost rezultata.

   $36\,720 + \boldsymbol{x} : 9 = 81\,810$

   ___ : ___ = ______ – ______

   ____

   ____

   ____

Provjera: ____

3. U magacinu je bilo 7 866 kg robe, a zatim je pristiglo još šest kamiona sa istom količinom robe, tako da je na kraju zaključeno da u magacinu ima 66 906 kg robe. Koliko je bilo robe u svakom kamionu?

Poznato je da je u __________ bilo _________ kilograma robe. Stiglo je još _______ kamiona nove robe, a u svakom kamionu je bilo po ___ kilograma robe, što zajedno s robom koja je bila u magacinu iznosi: ______ + ___ · ___

Na kraju je zaključeno da u magacinu ima ______ kilograma robe, odnosno:

_____ + ___ · ___ = ______

____

____

____

____

Provjera: ____

Odgovor: ____

Prilog 3

Diferencirani pristup realizaciji jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija na časovima provjeravanja usvojenih znanja

Nastavni predmet: Matematika
Razred: Peti
Tema: Jednačine
Operativni cilj: Rješavanje jednačina sa složenim izrazima od više različitih operacija.
Tip časa: Diferencirano provjeravanje usvojenih znanja.
Cilj časa: Provjeravanje usvojenih znanja o jednačinama sa više operacija kroz samostalno rješavanje zadataka primjenom diferenciranih kontrolnih listića.

Zadaci časa:
Obrazovni: Diferenciranim oblikom rada primjenom različitih nivoa pomoći provjeriti i utvrditi učeničke sposobnosti rješavanja jednačina sa više operacija.
Vaspitni: Razvijanje samoodgovornosti prema radu, logičkog mišljenja i zaključivanja, upornosti, istrajnosti, tačnosti i preciznosti u radu.
Specijalni: Primjena diferenciranog pristupa u radu.

Tok časa:
Preparativna faza (3 minuta)
Nastavnik putem grafofolije, primjenom frontalnog oblika rada, objašnjava učenicima zadatke s jednačinama koje će rješavati na kontrolnom listiću.
Učenici podijeljeni u tri grupe rade diferencirane kontrolne zadatke i to:
a) Učenici sa znanjima najvišeg nivoa rješavaju kontrolne zadatke bez dodatnih uputstava;
b) Učenici sa prosječnim znanjima rješavaju kontrolne zadatke koji u manjem obimu sadrže dodatnu pomoć za rješavanje jednačina;
c) Učenici sa skromnim nivoom znanja rješavaju kontrolne zadatke koji u većem obimu sadrže dodatnu pomoć za rješavanje jednačina.

Operativna faza (40 minuta)
U ovoj fazi rada u potpunosti je zastupljen diferencirani oblik rada. Učenici podijeljeni u tri približno homogene grupe individualno rade na diferenciranim kontrolnim listićima. Zadaci na kontrolnim listićima su isti za sve učenike, ali su zahtjevi diferencirani. Kontrolni listić sadrži ukupno 5 zadataka grupisanih po težini od lakšeg ka težem.

Verifikativna faza (2 minuta)
Nastavnik pravi kratak osvrt na tok časa, objašnjava učenicima gdje su najviše pravili greške, a zatim im daje nastavni listić, za domaći zadatak, koji sadrži zadatke sa kontrolnog listića da bi učenici sami uvideli gde su pravili greške kako im se u buduće to ne bi dešavalo.
Nastavne listiće za operativnu fazu (A_3, B_3 i V_3) izložićemo na primjerima I, II i III nivoa težine.

I nivo (A_3)

1. Riješi jednačinu i provjeri tačnost rezultata:

$x \cdot 4 + 4400 = 7600$
$x \cdot$ ___ $=$ _______ $- 4\,400$
___ $\cdot 4 =$ _______
$x = 3\,200 :$ ___
___ $=$ _______

Pr.: ___ $\cdot 4 -$ ______ $=$ _______ $- 4\,400 =$ _______

2. Odredi rješenje jednačine i provjeri tačnost rezultata:

$40\,022 : x + 19\,999 = 20\,001$
$40\,022 :$ ___ $=$ _______ $- 19\,999$
______ $: x =$ _______
$x =$ _______ $: 2$
___ $=$ ________

Pr.: _______ $: 20\,011 + 19\,999 = 2 +$ _______ $=$ ______

3. Iz škole koja u svakom odjeljenju ima 25 učenika na izlet je otišlo 350 učenika, a u njoj je ostalo 1 000 učenika. Koliko odjeljenja ima u školi? (Sastavi jednačinu, riješi je, a zatim provjeri tačnost rezultata.)

Škola ima x odjeljenja po ____ učenika.

$x \cdot$ ___ $- 350 =$ _______
___ $\cdot 25 = 1\,000 +$ _______
$x \cdot$ ___ $=$ _______
$x = 1\,350 :$ _______
___ $=$ _______

Pr.: $54 \cdot$ ___ $- 350 = 1\,350 -$ _______ $=$ _______

Odgovor: ____

4. Mama je kod sebe imala samo novčanice po 5 €. Kupila je haljinu za 3 000 €. Kada se vratila kući utvrdila je da joj je ostalo još 2 000 €. Koliko je novčanica majka imala kod sebe?

Ako nepoznati broj novčanica po ____ € označimo sa x, onda je mama kod sebe imala ukupno ___ $\cdot$ 5 novca. Pošto je kupila haljinu za _______ €, što zapisujemo:

$x \cdot$ ___ – 3 000

ostalo joj je ____________ €, odnosno:

___ · 5 – ______ = 2 000
$x \cdot$ ___ = _____ + 3 000
___ · 5 = ________
___ = 5 000 : ___
___ = _______

Provjera: 1 000 · ___ – 3 000 = ______ – ______ = ________

Odgovor: ____

5. Prodavac je četvrtini svog nedjeljnog pazara dodao ušteđevinu od 750 €, da bi kupio novu robu koja košta 1 150 €. Koliki je nedjeljni pazar prodavca?

Vrijednost nedjeljnog pazara prodavca ne znamo i označavamo ga sa x, a četvrtinu sa x : ___ .

Prodavac je toj četvrtini _pazara dodao ______ €, odnosno
____ : 4 + 750

i kupio novu robu koja košta ___________ €, odnosno

x : ___ + 750 = 1 150
___ : 4 = 1 150 – _______
x : ___ = _______
___ = 400 · ___
___ = ______

Provjera: 1 600 : ___ + 750 = ______ + ______ = _______

Odgovor: ____

II nivo (B_3)

1. Riješi jednačinu i provjeri tačnost rezultata:

$x \cdot 4 + 4400 = 7600$
___ · ___ = _______ – _______
___ · ___ = _______
___ = _______ : ___
___ = _______

Pr.: ____

2. Odredi rješenje jednačine i provjeri tačnost rezultata:

40 022 : x + 19 999 = 20 001
______ : ___ = _______ – _______
______ : ___ = _______
___ = ________ : ___
___ = ________

Pr.: _______ : 20 011 + _______ = 2 + _______ = ______

3. Iz škole koja u svakom odjeljenju ima 25 učenika na izlet je otišlo 350 učenika, a u njoj je ostalo 1 000 učenika. Koliko odjeljenja ima u školi? (Sastavi jednačinu, riješi je, a zatim provjeri tačnost rezultata.)

Škola ima ____ odjeljenja po ____ učenika.

x · ___ – ________ = _______
___ · 25 = _______ + _______
___ · ___ = _______
x = _______ : _______
___ = _______

Pr.: ___ · ___ – _______ = ______________________________

Odgovor: ____

4. Mama je kod sebe imala samo novčanice po 5 €. Kupila je haljinu za 3 000 €. Kada se vratila kući utvrdila je da joj je ostalo još 2 000 €. Koliko je novčanica majka imala kod sebe?

Ako nepoznati broj novčanica po ____ € označimo sa ___, onda je mama kod sebe imala ukupno ___ · ___ novca. Pošto je kupila haljinu za _______ €, što zapisujemo:

$x \cdot$ ___ – _____

ostalo joj je ____________ €, odnosno:

___ · 5 – 3 000 = _______
___ · ___ = 2 000 + _______
___ · ___ = ________
___ = ______ : ___
___ = _______

Provjera: 1 000 · ___ – _____ = _________________________________

Odgovor: ____

5. Prodavac je četvrtini svog nedjeljnog pazara dodao ušteđevinu od 750 €, da bi kupio novu robu koja košta 1 150 €. Koliki je nedjeljni pazar prodavca?

Vrijednost nedjeljnog pazara prodavca ne znamo i označavamo ga sa ___, a četvrtinu sa x : ___ .

Prodavac je toj četvrtini _______ dodao ______ €, odnosno

____ : 4 + _______

i kupio novu robu koja košta ___________ €, odnosno

x : ___ + 750 = ________
___ : ___ = 1 150 – _______
___ : ___ = _______
___ = _____ · ___
___ = ______

Provjera: 1 600 : ___ + ___ = _____________________________________

Odgovor: ____

III nivo (V_3)

1. Riješi jednačinu i provjeri tačnost rezultata:

$x \cdot 4 + 4400 = 7600$

____
____
____
____

Pr.: ____

2. Odredi rješenje jednačine i provjeri tačnost rezultata:

$40\,022 : x + 19\,999 = 20\,001$

____
____
____
____

Pr.: ____

3. Iz škole koja u svakom odjeljenju ima 25 učenika na izlet je otišlo 350 učenika, a u njoj je ostalo 1 000 učenika. Koliko odjeljenja ima u školi? (Sastavi jednačinu, riješi je, a zatim provjeri tačnost rezultata.)

___ · ___ – ________ = _______
____
____
____
____

Pr.: ____

Odgovor: ____

4. Mama je kod sebe imala samo novčanice po 5 €. Kupila je haljinu za 3 000 €. Kada se vratila kući utvrdila je da joj je ostalo još 2 000 €. Koliko je novčanica majka imala kod sebe?

Ako nepoznati broj ____________ po ____ € označimo sa ___, onda je mama kod sebe imala ukupno ___ · ___ novca. Pošto je kupila ________ za _______ €, što zapisujemo:

___ · ___ – ______

ostalo joj je ____________ €, odnosno:

___ · ___ – ______ = _______
____
____
____
____

Provjera: _____ · ___ – _____ = __________________________________

Odgovor: ____

5. Prodavac je četvrtini svog nedjeljnog pazara dodao ušteđevinu od 750 €, da bi kupio novu robu koja košta 1 150 €. Koliki je nedjeljni pazar prodavca?

Vrijednost ________ pazara prodavca ne znamo i označavamo ga sa ___, a četvrtinu sa ___ : ___ .

Prodavac je toj četvrtini _______ dodao ______ €, odnosno

____ : ___ + _______

i kupio novu robu koja košta ___________ €, odnosno

____ : ___ + ______ = ________
____
____
____
____

Provjera: ____

Odgovor: ____

Prilog 4

Upitnik za učenike

Poštovani učenici!

U toku je ispitivanje Vaših stavova prema težini zadataka koje ste rješavali na prethodnim časovima. Zbog toga Vas molimo da najiskrenije, kao što Vama i dolikuje, ispunite ovaj upitnik.

Zahvaljujemo na saradnji!

Razred: __________________

Pol (zaokružiti): a) muški b) ženski

Zaokružite ocjenu koju imate iz matematike: a) 5 ; b) 4 ; c) 3 ; d) 2 ; e) 1

Zaokružite slovo ispred odgovora koji smatrate da vama odgovara!

1) Zadatke koje sam rješavao(la) primjenom jednačina sa više operacija:
   a) u potpunosti sam razumio(la)
   b) djelimično sam razumio(la)
   c) nijesam uopšte razumio(la)

2) Zadatak koji razumijem kod mene izaziva u pogledu njegovog rješavanja:
   a) interesovanje
   b) ravnodušnost
   c) dosadu

3) Zadatak koji djelimično razumijem najčešće rješavam:
   a) uspješno
   b) djelimično tačno
   c) netačno

4) Zadatak koji uopšte ne razumijem:
   a) pokušavam da riješim
   b) čitam ga više puta kako bi ga razumio
   c) uopšte ne pokušavam da riješim

5) Kada bih bio(la) u prilici da biraš zadatke, najčešće bih radio(la) zadatke koje:
   a) dobro razumijem
   b) djelimično razumijem
   v) uopšte ne razumijem

Prilog 5

Upitnik za nastavnike

Poštovane kolege!

U toku je istraživanje primjene diferenciranog pristupa realizaciji jednačina u početnoj nastavi matematike. Zato nas interesuju Vaši stavovi prema ovom modelu nastave. Zbog toga Vas molimo da najiskrenije ispunite ovaj upitnik!

Najsrdačnije Vam se zahvaljujemo na saradnji!

Zanimanje (zaokružite): a) učitelj b) nastavnik razredne nastave v) profesor razredne nastave
Pol (zaokružiti): a) muški b) ženski
Škola: ________________________

Zaokružite slovo ispred odgovora koji smatrate ispravnim!

1) Koliko ste upoznati s pojmom diferencirane nastave i mogućnošću njene primjene u realizaciji matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike:
   a) veoma sam upoznat(a)
   b) dovoljno sam upoznat(a)
   c) djelimično sam upoznat(a)
   d) slabo sam upoznat(a)
   e) uopšte nijesam upoznat(a)

2) Matematičke sadržaje u početnoj nastavi matematike odmejrene prosječnom učeniku učenici usvajaju:
   a) veoma uspješno
   b) uspješno
   c) djelimično
   d) slabo
   e) nikako

3) Diferencirana realizacija matematičkih sadržaja u odnosu na tradicionalni način realizacije, kad je riječ o nivou razumijevanja sadržaja daje rezultate koji su:
   a) puno bolji
   b) nešto bolji
   c) približno isti
   d) nešto lošiji
   e) puno lošiji

4) Koliko često primjenjujete diferencirani pristup u realizaciji matematičkih sadržaja u početnoj nastavi matematike?
   a) veoma često
   b) često

c) ponekad
d) najčešće ne primjenjujem
e) uopšte ne primjenjujem

5) Šta je po Vašem mišljenju najbitnije za primjenu diferenciranog pristupa u realizaciji jednačina?
a) diferenciran nastavni sadržaj
b) odgovarajuća nastavna sredstva i pomagala
c) dodatno usavršavanje nastavnika
d) pomoć pedagoga ili drugog stručnog lica u nastavi
e) veća volja nastavnika

VI LITERATURA

1. Adler, A. (1963) *Poznavanje čoveka, osnove individualne psihologije*, ”Kosmos”, Beograd.
2. Andrić, Z. (1989) *Autoindividualizirani rad u nastavi*, Školske novine, Zagreb.
3. Babinskij, J. K. (1972) *K voprosu o neravnomernosti razvitija učebnih vozmožnostej školjnikov*, Sovetskaja pedagogika, br. 11, Moskva.
4. Bakovljev, M. (1972): *Programirana i individualizovana nastava*, Nastava i vaspitanje, br. 4, Beograd.
5. Bakovljev, M. (1982): *Misaona aktivizacija učenika u nastavi*, Prosveta, Beograd.
6. Banđur, V. i Potkonjak, N. (1996): *Pedagoška istraživanja u školi*, Učiteljski fakultet, Beograd.
7. Banđur, V. i Potkonjak, N. (1999): *Metodologija pedagogije*, Savez pedagoških društava Jugoslavije, Beograd.
8. Boyle, E. A., Duffy, T., Dunleavy, K. (2003). Learning styles and academic outcome: The validity and utility of Vermunt’s Inventory of Learning Styles in a British higher education setting. British Journal of Educational Psychology. 73, 267–290.
9. Božanović, N. (1978): *Sposobnosti učenika koji ne uspevaju u procesu usvajanja znanja*, Zbornik 11, Institut za pedagoška istraživanja, Beograd.
10. Boushet, H. (1971): *L`individualisation de l`enseignement*, Paris.
11. Bruner, J. S. (1960): *The process of education*, Horvard Universitu Press, Cambridge.
12. Bruner, J. S. (1960): *The process of education*, Horvard Universitu Press, Cambridge.
13. Bruner, J. S. (1973): *The growth of representational processes in childhood*, Beyond the information given, Studies in the psychology of knowing, W. W. Norton and Co., New York.
14. Bruner, J. (2000) *Kultura obrazovanja.* Zagreb: Educa.
15. Cipra, M. (1976): *Diferenciace zakladniho vzdelani*, Praha.
16. Čolović, V. (1972): *Pedagoški značaj individualnog pristupa učenicima*, Nastava i vaspitanje, br. 4, Beograd.
17. Danilović, R. (1964): *Super - odlični đaci i njigova stimulacija na optimalne uspehe*, Pedagoška stvarnost, br. 8, Novi sad.

18. Darling-Hammond, L. (2006) Constructing 21st-Century Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, 57 (3), 300-314.
19. Dedić, Đ. (1983): *Diferencijacija nastave i akceleracija učenika*, ”Školske novine”, Zagreb.
20. Dejić, M. (2000): *Metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet, Jagodina.
21. Denise, G. (1971): *L`organisation de l`enseignement en Franse*, Institut national de recherche et de documentation pedagogiques, Paris.
22. Dević, V. (1975): *”Stara” i ”nova” matematika*, Školska knjiga, Zagreb.
23. Dotran, R. (1962): *Individualizovana nastava*, ”Veselin Masleša”, Sarajevo.
24. Dragović, V., Jovanović, D., Rašajski-Čikara, V. (2016) *U svijetu matematike, udžbenik za peti razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica.
25. Dragović, V., Jovanović, D., Rašajski-Čikara, V. (2016) *U svijetu matematike, zbirka zadataka za peti razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica.
26. Dragović, V., Jovanović, D., Rašajski-Čikara, V. (2016) *U svijetu matematike, priručnik za peti razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica.
27. Đorđević, B. (1991): *Individualizacija vaspitanja darovitih*, Institut za pedagoška istraživanja, Beograd.
28. Đorđević, J. (1979): *Savremeni problemi diferencirane nastave*, Nastava i vaspitanje, br. 3, Beograd.
29. Đorđević, J. (1981): *Savremena nastava*, Naučna knjiga, Beograd.
30. Đorđević, J. (1997): *Nastava i učenje u savremenoj školi*, Učiteljski fakultet, Beograd.
31. Đorđević, M. (1972): *Individualizacija nastave primenom nastavnih listića u osnovnoj školi*, Nastava i vaspitanje, br. 4, Beograd.
32. Đorđević, M. (1985): *Individualizacija vaspitno – obrazovnog rada u školi*, IGRO NOVA PROSVETA, Beograd.
33. Đukić, M. (1981): *Savremeni modeli ndividualizovane nastave*, Nastava i vaspitanje, br. 1, Beograd.
34. Đurić, Đ. (1997): *Individualne razlike među učenicima – osnova za diferencijaciju nastave*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 1, Učiteljski fakultet, Sombor.
35. Đurić, Đ. (1998): *Modeli diferencirane nastave*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 2, Učiteljski fakultet, Sombor.
36. Đurić, Đ. (1999*): Istraživanje osobina učenika i modela diferencirane nastave kao činilaca unapređivanja osnovnog obrazovanja*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 3, Učiteljski fakultet, Sombor.
37. Elkonin, D. B. – Davidov, B. B. (1966): *Vozrastnie vozmožnosti usvoenija znanij*, Prosveščenie, Moskva.
38. Erceg, V. (1996): *Diferencijalna razredna nastava*, Prosvetni pregled, Beograd.
39. Franković, D. (1970): *Inovacije i nova tehnologija u obrazovanju u svijetu i kod nas*, Revija školstva i prosvetna dokumentacija, 2, Beograd.

40. Freinee, C. (1979): *Les techniques freinet de l`ecole moderne*, Paris.
41. Gončarov, N. K. (1971): *Diferencijacija i individualizacija obrazovanija i vaspitanija v sovremenih uslovija*, Moskva.
42. Goranović, M. (1995): *Algebarski sadržaj u početnoj nastavi matematike*, OBOD, Cetinje.
43. Grubor, A. (1996): *Didaktički model "Panonija" u funkciji diferencirane i individualizovane nastave*, Sombor.
44. Ignjatović, R. (1983): *Primena individualnih postupaka i tehnike u vaspitnom radu*, Naša škola, br. 3 – 4, Sarajevo.
45. Ilić, M. (1984): *Učenje i nastava različitih nivoa težine*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
46. Ivić, I. i dr. (1976): *Razvoj i merenje inteligencije*, tom I, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
47. Janković, D. (1972): *Osposobljavanje učenika za samostalno učenje putem opštih prilaza*, Pedagoška stvarnost, br. 6, Novi Sad.
48. Janjušević-Stojić, D. (1980): *Prilagodimo vaspitno – obrazovni proces mogućnostima učenika*, Nastava i vaspitanje, br. 3, Beograd.
49. Johnston, P. (2010). *An Instructional Frame for RTI.* The Reading Teacher, 63(7), 602-604.
50. Jovanović–Ilić, M.(1972): *Pripremanje modela individualizovane nastave*, Nastava i vaspitanje, br. 4, Beograd.
51. Kennedy, E., & Shiel, G. (2010). *Raising Literacy Levels With Collaborative On-Site Professional Development in an Urban Disadvantaged School.* The Reading Teacher, 63(5), 372-383.
52. Klix, F. (1971): *Information Verhalten*. Berlin.
53. Krkljuš, S. (1977): *Učenje u nastavi otkrivanjem*, P. U. "Radivoj Ćirpanov", Novi sad.
54. Krstić, D. (1980): *Učenje i razvoj*, Naučna knjiga, Beograd.
55. Kvaščev, R. (1975): *Podsticanje i sputavanje stvaralačkog ponašanja ličnosti*, Svjetlost, Sarajevo.
56. Kvaščev, R. (1980): *Sposobnosti za učenje i ličnost*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
57. Kvaščev, R. (1983): *Razvijanje kreativnog ponašanja ličnosti procesima učenja*, Svjetlost, Sarajevo.
58. Lekić, Đ. (1965): *Aktivnost u nastavi*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd.
59. Li, Y. (2000). A Comparison of Problems That Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. Journal for Research in Mathematics Education, 31 (2), 234-241.
60. Lipovac, D., Vukobratović, R. (2002): *Metodički priručnik 1 i 2*, IP "BISTRIČAK", Novi Sad.
61. Lipovac, D., Sotirović, M. (1986): *Doprinos kibernetičkih metoda u praćenju efikasnosti nastave matematike*, Misao, Novi Sad.
62. Lipovac, D., Sotirović, V., Latković, M. (1991): *Metodički priručnik za matematiku u I razredu osnovne škole*, Novi Sad.
63. Lipovac, D., Sotirović, V., Latković, M. (1991): *Metodički priručnik za matema-*

tiku u II razredu osnovne škole, Novi Sad.
64. Lipovac, D., Sotirović, V., Latković, M. (1991): *Metodički priručnik za matematiku u III razredu osnovne škole*, Novi Sad.
65. Lipovac, D., Sotirović, V., Latković, M. (1991): *Metodički priručnik za matematiku u IV razredu osnovne škole*, Novi Sad.
66. Mandić, D. P. (1972): *Inovacije u nastavi i njihov pedagoški smisao,* Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo.
67. Marjanović, M. (1996): *Metodika matematike I*, Učiteljski fakultet, Beograd.
68. Marjanović, M. (1996): *Metodika matematike II*, Učiteljski fakultet, Beograd.
69. Marjanović, M., Latković, M. i Nikodijević, V. (2002): *Matematika za I razred osnovne škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
70. Marjanović, M., Latković, M. i Nikodijević, V. (2002): *Matematika za II razred osnovne škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
71. Marjanović, M., Latković, M. i Nikodijević, V. (2002): *Matematika za III razred osnovne škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
72. Marjanović, M., Latković, M. i Nikodijević, V. (2002): *Matematika za IV razred osnovne škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
73. Markovac, J. (1970): *Nastava i individualne razlike učenika*, Školska knjiga, Zagreb.
74. Mićanović, V. (2001): *Diferencirana nastava matematike u nižim razredima osnovne škole*, u: Vaspitanje i obrazovanje – časopis za pedagošku teoriju i praksu, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica.
75. Milić, S. (2002): *Individualizovani pristup u vaspitno – obrazovnom procesu*, Pedagoški centar Crne Gore, Podgorica.
76. Mori, F. (1959) *Individualizovana nastava i grupni rad*, Nolit, Beograd.
77. Mužić, V. (1957): *Rad sa nastavnim listićima za individualni rad učenika*, Pedagoški rad, br. 7 – 8, Zagreb.
78. Mužić, V. (1964): *Efikasnost nastavnih listića u dodatnom radu*, Pedagogija, br. 3, Beograd.
79. Mužić, V. (1977): *Metodologija pedagoškog istraživanja*, Svjetlost, Sarajevo.
80. Nadrljanski, Đ. (2001): *Multimedijalni obrazovni računarski softver u razrednoj nastavi – model individualizacije i diferencijacije*, u: Diferencijacija i individualizacija nastave – osnova škole budućnosti (zbornik radova), Učiteljski fakultet, Sombor.
81. Näsström, G. (2009). Interpretation of standards with Bloom's revised taxonomy: a comparison of teachers and assessment experts. International Journal of Research & Method in Education, 32(1), 39-51.
82. Ni, Y., Zhou, D., Li, X., & Li, Q. (2014). Relations of Instructional Tasks to Teacher–Student Discourse in Mathematics Classrooms of Chinese Primary Schools. Cognition and Instruction, 32 (1), 2-43.
83. Ničković, R. (1970): *Učenje putem rešavanja problema u nastavi*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.
84. Northrop, L., & Killeen, E. (2013). *A Framework for Using iPads to Build Early Literacy Skills,* The Reading Teacher, 66(7), 531-537.
85. Olteanu, L. (2015). Construction of tasks in order to develop and promote classroom communication in mathematics. *International Journal of Mathematical*

Education in Science and Technology, 46 (2), 250–263.
86. Oyeneyin, A. M. (1989) Development and Validation of an Integrated Teaching Plan (ITP) for School Science Lessons, *Research in Science & Technological Education*, 7 (1), 51-60.
87. Palekčić, M. (1985): *Unutrašnja motivacija i školsko učenje*, Svjetlost, Sarajevo.
88. Pejhelj, V. (1936): *Nova škola*, Geca Kon, Beograd.
89. Petrović, N. (1997): *Modeli diferencirane nastave matematike i uspeh učenika*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 1, Učiteljski fakultet, Sombor.
90. Petrović, N. (1998): *Modeli diferencirane nastave aritmetike*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 2, Učiteljski fakultet, Sombor.
91. Petrović, N. (1999): *Modeli diferencirane nastave matematike i uspeh učenika*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 3, Učiteljski fakultet, Sombor.
92. Petrović, N. (2001): *Modelsko – problemski pristup u diferenciranju i individualizovanju početne nastave matematike*, u: Diferencijacija i individualizacija nastave – osnova škole budućnosti (zbornik radova), Učiteljski fakultet, Sombor.
93. Petrović, N. (2002): *Modeli diferencirane obrade nastavnih jedinica u početnoj nastavi matematike*, u: Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja (zbornik radova), Učiteljski fakultet, Sombor.
94. Petrović, N. i Pinter, J. (1997): *Opšta metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet, Sombor.
95. Pijaget, J., Garcia, R. (1989): *Psychogenesis and the history of science*, Columbia University Press, New York.
96. Pinter, J. (1997): *Matematičko modelovanje u početnoj nastavi matematike*, Učiteljski fakultet, Sombor.
97. Pinter, J. (1997): *Teorijske osnove upravljanja diferenciranom nastavom matematike*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 1, Učiteljski fakultet, Sombor.
98. Pinter, J. (1998): *Modeli upravljanja diferenciranom i individualizovanom nastavom matematike*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 2, Učiteljski fakultet, Sombor.
99. Pinter, J. (1999): *Upravljanje diferenciranom nastavom matematike*, u: Đurić, Đ. (ur.): Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja 3, Učiteljski fakultet, Sombor.
100. Pinter, J. (2001): *Modeli upravljanja diferenciranom i individualizovanom nastavom u kibernetički orijentisanoj nastavi matematike*, u: Diferencijacija i individualizacija nastave – osnova škole budućnosti (zbornik radova), Učiteljski fakultet, Sombor.
101. Pinter, J. (2002): *Modeli rešavanja problema i matematičkih zadataka u diferenciranoj početnoj nastavi matematike*, u: Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja (zbornik radova), Učiteljski fakultet, Sombor.

102. Prvanović, S. (1972): *Uvod u modernu matematiku*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo.
103. Prvanović, S. (1974): *Metodika nastave matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
104. Prvanović, S. (1995): *Metodički priručnik za izvođenje nastave aritmetike*, Biblioteka prosvetnih radnika Jugoslavije, Beograd.
105. Radojević, P., Radojević, V. (1984): *Metodika nastave matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.
106. Radonjić, S. (1959): *Transfer učenja*, Savremena škola, Beograd.
107. Radovanović, R. (1983): *Učenje otkrivanjem*, Dečje novine – Prosvetni pregled, Beograd.
108. Rakić, B. (1970): *Motivacija i školsko učenje*, Svjetlost, Sarajevo.
109. Redžepagić, J. (1982): *Individualizacija nastave i obrazovanja u prošlosti i danas*, Naša škola, br. 3 – 4, Sarajevo.
110. Rost, H. D. (1881): *Strah od škole*, Pedagogija, br. 3 – 4, Beograd.
111. Skemp, R. (1971): *The Psihology of learning matematics*, Pengvin Books, Australia.
112. Stevanović, B. (1937): *Merenje inteligencije*, Beograd.
113. Stipanić, E. (1988): *Putevima razvitka matematike*, IRO ”Vuk Karadžić”, Beograd.
114. Strmčnik, F. (1974): *Diferencijacija i individualizacija pouka*, Zavod za šolstvo SR Slovenije, Ljubljana.
115. Strmčnik, F. (1977): *Fleksibilna diferencijacijai individualizacija nastave*, Pedagogija, br. 1, Beograd.
116. Špančović, S. (2000): *Vežbanjekao individualizovana aktivnost u sistemu problemske nastave*, Učiteljski fakultet, Sombor.
117. Šoljan, N. N. (1976): *Obrazovna tehnologija*, ”Školska knjiga”, Zagreb.
118. Tanasković, S. (1978):*Problemi utvrđivanja i otkrivanja uzroka učeničkog neuspjeha u elementarnoj nastavi matematike*, Pedagogija br. 4, Beograd.
119. Tkalčić, M. (1934): *Pedagogija i mehanika učenja*, Minerva, Zagreb.
120. Törnroos, J. (2005). Mathematics Textbooks, Opportunity to Learn and Student Achievement. Studies in Educational Evaluation, 31(4), 315-327.
121. Tošić, R. (1999): *Matematičke igre*, Agencija Valjevac, Valjevo.
122. Vilotijević, M. (1999): *Didaktika 1, 2, 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva i Učiteljski fakultet, Beograd.
123. Weisbergen, R. (1971): *Perspektives in individualized learning Paolo*, American Institutes for Research, Alto.
124. Wiek, A. Withycombe, L., Redman, C. L. (2011). Key competencies in sustainability: a reference framework for academic program development. *Sustain Sci.* 6, 203–218.
125. Yang, Y.-T.C., Wu, W.-C.I. (2012). Digital storytelling for enhancing student academic achievement, critical thinking, and learning motivation: A year-long experimental study. Computers & Education. 59, 339–352.
126. Zech, F. (1999): *Grundkurs Mathematik didaktik – Theoretiche und praktis – che Anleitungen fur das Lehren und Lernen von Mathematik*, Beltz Verlag – Weinheim und Basel.