Vladimir Kašćelan
Saša Vujošević

UCG
Univerzitet Crne Gore
1974

# FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA

## ZBIRKA ZADATAKA

UCG
Univerzitet Crne Gore
1974

**Prof. dr Vladimir Kašćelan**
**Doc. dr Saša Vujošević**
**FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA**
**ZBIRKA ZADATAKA**

*Izdavač*
Univerzitet Crne Gore
Cetinjska br. 2, Podgorica
www.ucg.ac.me

*Za izdavača*
Prof. dr Vladimir Božović, rektor

*Glavni i odgovorni urednik*
Doc. dr Jovan Đurašković

*Recenzije*
Prof. dr Jelena Kočović,
Prof. dr Milan Lakićević i
Prof. dr Milijana Novović Burić

*Lektura*
Sanja Marjanović

*Slog*
Dalibor Vukotić

*Tehnički urednik*
Ivan Živković

Objavljivanje ove univerzitetske publikacije odobrio je Senat Univerziteta Crne Gore odlukom br. 03-4776/6 od 26. decembra 2023. godine.



CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISBN 978-86-7664-256-4
COBISS.CG-ID 29362436

Vladimir Kašćelan
Saša Vujošević

# FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA
# ZBIRKA ZADATAKA

Podgorica, 2024.

SADRŽAJ

# PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka, s uključenim repetitorijumom teorije, namijenjena je studentima Ekonomskog fakulteta Univerziteta Crne Gore, mada je mogu koristiti i svi zainteresovani za finansijsku i aktuarsku matematiku, u prvom redu aktuari i finansijski eksperti. Sadrži 293 zadatka, od kojih je 98 detaljno urađeno, a za 67 su dati rezultati.

Sastoji se iz dva dijela: *Finansijske matematike* i *Aktuarske matematike*.

U prvom dijelu su obrađeni oni problemi s kojima se ekonomisti susreću u svakodnevnoj praksi: privredni račun i kamatni račun s primjenama. Računske osnove za primjenu principa ekvivalencije čine diskontni faktor i faktor akumulacije. Za uopštenu kamatnu stopu i dio aktuarske matematike potrebno je znanje iz predmeta Matematika za ekonomiste i Statistika, jer se metoda sadašnje vrijednosti realizuje preko uopštenog (integralnog) diskontnog faktora i diskontnog faktora u osiguranju, koji uključuju pojam integrala i vjerovatnoće doživljenja.

Podgorica, 2023.

Autori

# SAŽETAK

U knjizi *Finansijska i aktuarska matematika − zbirka zadataka* urađeni su zadaci koji dolaze na ispitima studentima Univerziteta Crne Gore i to: studentima druge godine akademskog programa Ekonomija i studentima prve godine primijenjenog studijskog programa Menadžment, u Podgorici i Bijelom Polju.

U prvom dijelu ponovljena je teorija, tj. navedene su osnovne formule izvedene u udžbenicima [6] i [4]. U prvoj glavi urađeni su zadaci iz privrednog računa, s kojima se diplomirani studenti ekonomije i biznisa susreću u svakodnevnoj praksi, ne samo u finansijskom sektoru. U drugoj glavi obrađeni su zadaci iz kamatnog računa i kratkoročnih obveznica. Račun periodičnih uloga i renti, kao i investicioni zajmovi, obrađeni su u trećoj glavi ove zbirke zadataka, a veoma su korisni zaposlenima u bankarskom sektoru. Četvrta glava bavi se zadacima iz rentabilnosti investicija i uopštenja kamatnih stopa. Kod uopštenja kamatnih stopa pretpostavlja se da kamatna stopa varira s vremenom, a uvodi se uopšteni diskontni faktor. U posljednoj, petoj glavi, urađen je veliki broj zadataka iz aktuarske matematike, koji nalaze primjenu u osiguranju života. Na kraju su dati spisak korišćene literature i tablice smrtnosti.

Ova zbirka zadataka je nadgradnja skripte, koju već tri godine koriste studenti Ekonomskog fakulteta Univerziteta Crne Gore, a može biti od velike pomoći i finansijskim ekspertima, aktuarima i svima onima koji koriste metode finansijske i aktuarske matematike u svom radu.

# SUMMARY

In the book Financial and actuarial mathematics - a workbook, the exercises that appear on the exams for the students of the University of Montenegro, namely: 2nd year of the academic (undergraduate) program Economics and students of the 1st year of the applied study program Management in Podgorica and Bijelo Polje, have been done.

In the first part, the theory was repeated, i.e. the basic formulas derived in textbooks [6] and [4] are listed. In the first section, exercises from business are done, which graduate students of economics and business encounter in everyday practice, not only in the financial sector. Section 2 deals with exercises from simple and compound interest and short-term bonds. The periodic deposits and annuities, as well as investment loans, are covered in section 3 of this workbook, and is of great use to employees in the banking sector. Section 4 deals with exercises related to profitability of investments and generalized interest rates. With generalized interest rates, it is assumed that interest rates vary over time, and a general discount factor is introduced. In the last, fifth section, a large number of exercises from actuarial mathematics, which find application in life insurance, were done. At the end, reference and mortality (life) table is given.

This workbook is an upgrade of the manuscript whitch has been used for 3 years by students of the Faculty of Economics, University of Montenegro, and in addition to them, it will be of great help to financial experts, actuaries and all those who use financial and actuarial mathematics methods in their work.

# REPETITORIJUM TEORIJE

Ovaj repetitorijum teorije urađen je na osnovu navedene literature [6] i [4].

Veliki broj problema iz ove zbirke može se modelirati u programskom paketu MS Excel. Studentima će neki od tih modela biti dostupni na DL sajtu Ekonomskog fakulteta Univerziteta Crne Gore (https://dl.ucg.ac.me/course/view.php?id=2843).

# GLAVA I − FINANSIJSKA MATEMATIKA

## 1. Račun diobe. Proporcije

Potrebno je zadatu veličinu $A$ predstaviti kao zbir veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tako da te veličine budu (direktno) proporcionalne ili obrnuto proporcionalne datim veličinama $a_1, a_2, \ldots, a_n$, s istim koeficijentom proporcionalnosti $k$, tj. ako su $A$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ date veličine, treba naći veličine $x_1, x_2, \ldots x_n$ tako da bude:

$$A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \,,$$

$$x_i = ka_i \ \text{ ili } \ x_i = \frac{k}{a_i}, \qquad i = \overline{1,n}\,.$$

U tom slučaju ***izvršili smo diobu*** veličine $A$ na djelove $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Za slučaj direktne proporcionalnosti iz: $x_i = ka_i$, $i = \overline{1,n}$,
slijedi $n - 1$ prosta proporcija:

$$x_1 : x_2 = a_1 : a_2$$
$$x_1 : x_3 = a_1 : a_3$$
$$\ldots.$$
$$x_1 : x_n = a_1 : a_n\,,$$

ili jedna produžena (složena) proporcija:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n\,.$$

Slučaj obrnute proporcionalnosti razmatra se analogno.

Napomenimo da je ***razmjera*** količnik dva broja, a ***proporcija*** jednakost dvije razmjere.

U slučaju direktne proporcionalnosti veličina $x_i$ i $a_i$, iz uslova:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A \ \text{ i } \ \sum_{i=1}^{n} x_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

dobija se koeficijent proporcionalnosti: $k = \dfrac{A}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$.

Ako je data obrnuta proporcionalnost, važi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A \text{ i } \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \text{ i } k = \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

Ukoliko je veličina $x_i$ proporcionalna veličinama $a_i, b_i, c_i, \ldots, p_i$ i istovremeno obrnuto proporcionalna nekim drugim veličinama $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \eta_i$, tj. $x_i = k a_i b_i \ldots \frac{p_i}{\alpha_i \beta_i \ldots \eta_i}$, tada se radi o ***složenom*** računu diobe. Problem se opet svodi na jednu jednačinu s jednom nepoznatom (koeficijentom proporcionalnosti $k$).

Kroz zadatke koristiće se tvrđenje da se produžena (složena) proporcija računa kao proizvod prostih proporcija, poštujući indikaciju strelica. Strelice uz dva para razmatranih veličina, od kojih je samo jedna vrijednost (od 4) nepoznata, isto su usmjerene ako je riječ o direktno, a obrnuto usmjerene ako su dvije razmatrane veličine obrnuto proporcionalne, uz nepromijenjene preostale veličine (*ceteris paribus* pretpostavka). Karakter proporcionalnosti utvrđuje se postavljajući pitanje: Da li povećanje (ili smanjenje) jedne veličine izaziva povećanje ili smanjenje druge, *ceteris paribus*? Ukoliko imamo istovjetnu promjenu, dvije veličine su direktno proporcionalne, a u suprotnom (ako rast izaziva smanjenje ili obrnuto) one su obrnuto proporcionalne.

## 2. Račun smješe

Račun smješe nalazi primjenu kada se određuju količina ili odnosi roba iste vrste, različitog kvaliteta, da bi se njihovim miješanjem dobila roba iste vrste, zadatog kvaliteta $k$.

Neka je $k$ brojno izražen zadati kvalitet, $k_i$ brojno izražen kvalitet robe od koje se pravi smješa i $x_i$ potrebna količina $i$-te robe, imamo:

$$k = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Izraz: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ zove se ***ponderisana aritmetička sredina*** brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Veličine $x_i$ formiraju tzv. ponder − „težinski koeficijent", tj. multiplikator uz pojedini kvalitet, čiji je zbir jednak 1. Za kvalitet $k_i$ ponder iznosi $\dfrac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Obična aritmetička sredina je izraz:

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}$$, u kom slučaju ponderi imaju istu „težinu“ 1/*n*, tj. svi kvaliteti ravnopravno učestvuju u „prosjeku“, jer se množe s istim brojem.

## 3. Procentni račun

***Procenat*** je razlomak $\frac{p}{100}$, čiji je imenilac 100, u oznaci *p*%. Brojilac *p* govori koliko jedinica neke veličine dolazi na svakih 100 jedinica iste veličine.

***Osnova*** **(*glavnica*)** je broj *K* od koga se izračunava procenat. Broj *p* je ***procentna stopa***, a proizvod procenta *p*% i glavnice *K* je ***procentni iznos*** **(*interes*)**, u oznaci *i*. Prema tome, $i = p\%K = \frac{p}{100} \cdot K$ ili u obliku proporcije $K : i = 100 : p$.

Važno je shvatiti da se procenat primjenjuje na neku osnovicu, dajući procentni iznos. Kod tumačenja rezultata ne treba uzeti u obzir samo procenat, već treba uzeti u obzir i osnovicu. Primijetimo da *p* nije procenat, već stopa (100 puta veći broj), pa je odgovor na nivou samih procenata *p*%. U nekim kasnijim primjenama koristićemo i decimalni oblik stope (npr. ne 7% (*p* = 7), već direktno 0,07), i u tom slučaju u gornjim formulama neće biti broja 100, već broj 1, a rezultat se direktno dobija u obliku procenta. Ako želimo da odredimo procentnu stopu, rezultat pomnožimo sa 100. Npr. 0,27 = 27% (*p* = 27).

***Promil*** je razlomak čiji je imenilac 1.000, u oznaci ‰.

## 4. Kamatni račun. Ekvivalentne kamatne stope

Novac *K*, poslije protoka vremena *t*, mijenja se tako što mu se dodaje suma *i*, pa na osnovu vremenske vrijednosti novca (principa ekvivalencije), važi da je $K_t = K + i$, gdje smo sa $K_t$ označili ukupan iznos po isteku vremena *t*. Uložena suma *K* zove se ***glavnica*** **(*kapital*)**, vremenski interval *t* je ***obračunski period,*** dodati iznos je ***kamata*** **(*interes*)** za taj period. ***Kamatni račun*** bavi se obračunom kamata.

Kamata *i* računa se kao procenat *p%* od uložene sume *K* ili konačne sume $K_t$.

Kod dekurzivnog obračuna osnovica je *K*, a kamata se računa i dodaje glavnici na kraju perioda. Kod anticipativnog obračuna osnovica je $K_t$, a kamata se računa i dodaje glavnici početkom perioda.

Broj *p* zove se ***kamatna (interesna) stopa*** i vezana je za određeni vremenski period, najčešće jednu godinu, mada može biti i jedan semestar, jedan kvartal, jedan mjesec, jedan dan ili ponekad beskonačno mali interval (kod tzv. neprekidnog ukamaćivanja).

Ako sa $p_d$ označimo dekurzivnu kamatnu stopu, a sa $p_a$ anticipativnu kamatnu stopu, tada je: $K_1 = K + \frac{p_d K}{100}$ tj. $K_1 = K \cdot (1 + \frac{p_d}{100})$ i (1)

$$K_1 = K + \frac{p_a K_1}{100}\text{, tj. } K_1 = K \cdot \frac{100}{100 - p_a}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo jednakost dekurzivnog i anticipativnog faktora akumulacije:

$$1 + \frac{p_d}{100} = \frac{100}{100 - p_a},$$

tj. vezu između ovih stopa: $p_d = \dfrac{100 p_a}{100 - p_a}$ i $p_a = \dfrac{100 p_d}{100 + p_d}$.

Stope $p_d$ i $p_a$ su ***ekvivalentne*** ako za istu glavnicu daju isti krajnji iznos.

Anticipativna stopa se u računovodstvenoj praksi zove „preračunata" stopa, jer govori koliko procenata treba smanjiti bruto iznos da bismo dobili neto. Tako, dekurzivnoj stopi 21 odgovara anticipativna stopa 2100/121 ≈ 17,355. Za razliku od nje, dekurzivna stopa govori koliko treba uvećati neto iznos da bismo dobili bruto, tj. ona mjeri efikasnost ulaganja (prinos − engl. *return*) u odnosu na početnu vrijednost. Anticipativna stopa mjeri efikasnost ulaganja (razliku konačne i početne vrijednosti) u odnosu na krajnju vrijednost. Zato se ravnopravno sa terminima kamatna ili interesna stopa koristi i termin stopa prinosa (engl. *rate of return*). Primijetimo da prinos i stopa prinosa nijesu isti pojmovi. Prinos je apsolutna vrijednost razlike dvije vrijednosti, a stopa prinosa je prinos u relativnim jedinicama (procentima). Tako, ekvivalentne stope nikako nijesu jednake (štaviše, dekurzivna je veća da bi kompenzovala manju osnovicu), iako su kamate (prinosi) jednake kod oba obračuna, što direktno slijedi iz gornje definicije. Npr., u praksi se često kaže kamata kada se misli na kamatnu stopu, ali ovdje moramo praviti razliku između ta dva pojma.

Kod kratkoročnih obveznica anticipativnu stopu ćemo zvati stopa diskonta, a dekurzivnu − stopa prinosa.

## 5. Prosti i složeni interesni račun

Data je glavnica $K$ i godišnja dekurzivna kamatna stopa $p$, uz godišnji obračun kamate za $n$ godina. Ako se kamatna stopa $p$ primjenjuje:

a) na glavnicu $K$, kažemo da se obračun kamata vrši po ***prostom*** interesnom računu,

b) na ukupan iznos iz prethodne godine, riječ je o ***složenom*** interesnom računu.

Ako je $K_m$ ukupan iznos krajem $m$-te godine i sa $i_m$ interes za $m$-tu godinu, tada pri prostom interesnom računu imamo:

$$K_1 = K + \frac{pK}{100}, K_2 = K_1 + \frac{pK}{100} = K + \frac{2pK}{100}, \ldots, K_n = K + \frac{npK}{100}.$$

Kamatna stopa $p$ uvijek se primjenjuje na glavnicu $K$, pa su svi godišnji interesi jednaki, tj. $i_1 = i_2 = \ldots = i_n$.

Iznosi $K_1, K_2, \ldots, K_n$ obrazuju aritmetički niz, čiji je prvi član $K$ i $i = \dfrac{pK}{100}$.

Pri složenom interesnom računu imamo:

$$K_1 = K + i_1 = K + \frac{pK}{100} = K(1 + \frac{p}{100}) = Kq\,,\; q = 1 + \frac{p}{100}.$$

$$K_2 = K_1 + \frac{pK_1}{100} = K_1 q = Kq^2, \quad \ldots \quad , K_n = Kq^n .$$

Iznosi $K, K_1, K_2, \ldots, K_n$ obrazuju geometrijski niz čiji je prvi član $K$ i količnik $q$.

***Princip ekvivalencije*** glasi: Dva novčana toka (priliva ili odliva) jednaka su ako imaju istu vrijednost, u istom vremenskom trenutku. Znači, formira se tzv. jednačina vrijednosti, gdje su lijeva i desna strana svedene na isti vremenski trenutak.

Da bismo primjenjivali princip ekvivalencije, uvode se dvije osnovne metode finansijske matematike: diskontna metoda i metoda prolongacije.

***Diskontnom metodom*** novčani tokovi svode se s kasnijih na ranije trenutke, a ***metodom prolongacije*** s ranijih na kasnije. Ako svođenje vršimo iz budućeg trenutka na sadašnji ($t = 0$), govorimo o ***metodi sadašnje vrijednosti***, koja je samim tim specijalan slučaj diskontne metode.

Prolongaciju sprovodimo uz pomoć osnovne formule složenog interesnog računa $K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, a diskontovanje vršimo uz pomoć formule za početnu vrijednost kapitala $K = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$, odnosno stavljajući $q = 1 + \frac{p}{100}$ imamo $K_n = K \cdot q^n$ i $K = \frac{K_n}{q^n}$, redom.

**6. Relativna, konformna i nominalna kamatna stopa. Neprekidno ukamaćivanje**

Ukoliko se obračun kamata vrši $m$ puta godišnje, onda godišnjoj kamatnoj stopi $p$ za $m$-ti dio godine odgovara ***relativna*** kamatna stopa $\frac{p}{m}$.

Ako je data godišnja kamatna stopa $p$, višegodišnja relativna stopa za $n$ godina je $np$.

Iz relacije

$$K(1 + \frac{p}{100}) = K(1 + \frac{p_m}{100})^m ,$$

slijedi da je:

$$p_m = 100 \cdot \left( \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right).$$

Ovako određena kamatna stopa $p_m$ zove se ***konformna*** kamatna stopa za $m$-ti dio godine (koja odgovara godišnjoj kamatnoj stopi $p$), čijom primjenom $m$ puta, pri složenom interesu, dobijamo isti iznos kao i pri ulogu glavnice $K$ na jednu godinu, uz godišnju kamatnu stopu $p$ i godišnji obračun.

Proizvod $mp_m$ zove se ***nominalna*** kamatna stopa, koju ne treba miješati s dogovorenom stopom (engl. *money rate*), jer su u našem jeziku to homonimi. Nominalna i konformna stopa javljaju se samo ako je uključeno ispodgodišnje kapitalisanje.

Kako je $\left(1+\frac{p_m}{100}\right)^m = 1+\frac{p}{100}$, to primjenom binomnog obrasca dobijamo da je:

$$1+\frac{mp_m}{100}+\binom{m}{2}\left(\frac{p_m}{100}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p_m}{100}\right)^m = 1+\frac{p}{100}.$$

Odbacivanjem trećeg i svih daljih članova na lijevoj strani, čiji je zbir pozitivan, imamo da je $mp_m < p$, tj. nominalna kamatna stopa je manja od odgovarajuće godišnje. Istovremeno smo dokazali da je, za datu godišnju (stvarnu) kamatnu stopu $p$, odgovarajuća konformna stopa manja od relativne kamatne stope $m$-tog dijela godine ( $p_m < \frac{p}{m}$ ).

U slučaju kada se broj obračunskih perioda povećava, tj. $m \to \infty$, imaćemo:

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_{n,m} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}\cdot\frac{p}{100m}\cdot nm} = K_0 e^{\frac{np}{100}},$$

što je formula za ***neprekidno ukamaćivanje.***

## 7. Eskontni račun. Stopa prinosa i stopa diskonta

***Mjenica*** je vrsta kratkoročne hartije od vrijednosti (npr. bankarski akcept) kojom se dužnik obavezuje da će u ugovorenom roku − ***roku dospijeća*** − njenom vlasniku isplatiti iznos novca koji mu pripada (npr. nominalnu vrijednost kod mjenica koje ne sadrže kamatnu klauzulu). Ako vlasnik proda mjenicu prije roka dospijeća − ***eskontuje***, zauzvrat dobija novac.

Ako vlasnik čeka rok dospijeća, emitent plaća nominalni iznos. Ako se mjenica proda prije roka dospijeća, za ranije isplaćeni period obračunava se kamata (dužnik plaća nominalni iznos umanjen za obračunatu kamatu). Kod **komercijalnog** eskonta kamata se obračunava po prostom interesnom računu (uz pretpostavku da godina ima 360 dana, mada ne nužno – može biti i 365) i uz primjenu anticipativnog obračuna kamata. Eskontnu stopu propisuje Centralna banka. Prodavac dobija nominalni iznos umanjen za kamate, a nakon roka dospijeća nominalni iznos.

Ako je $K_n$ nominalna vrijednost mjenice, $p$ (godišnja anticipativna) kamatna stopa i $n$ broj dana za koje treba obračunati kamatu, odgovarajuću vrijednost $K_0$ dobićemo iz uslova:

$$K_n = K_0 + \frac{np}{36.000}\cdot K_n, \text{ tj. } K_0 = K_n\left(1-\frac{np}{36.000}\right).$$

Kamata će iznositi $K_n - K_0 = \frac{K_n np}{36.000}$. Broj $p$ zovemo **stopa diskonta**. Ponekad ćemo je tradicionalno zvati i **eskontna stopa**.

Iznos $K_0$, koji se dobija kao razlika nominalne vrijednosti mjenice i odgovarajućeg eskonta, zove se ***eskontovana*** vrijednost mjenice.

Kod tzv. **racionalnog eskonta** kamata se obračunava po prostom interesnom računu i uz primjenu dekurzivnog obračuna kamata (osnovica je početna − eskontovana vrijednost).

Eskontovana vrijednost iznosi $K_0 = \dfrac{K_n}{1 + \dfrac{np}{36.000}}$. Stopu $p$ zovemo **stopa prinosa**.

Osnovno tvrđenje koje se koristi kod mjenica glasi: *Ako jedna mjenica treba da zamijeni više drugih mjenica, različitih rokova dospijeća, tada je njena eskontovana vrijednost jednaka zbiru eskontovanih vrijednosti pojedinih mjenica*.

Tvrđenje ne važi za nominalne vrijednosti, jer je narušen princip ekvivalencije, zbog različitih ročnosti.

Ove dvije obračunske metode istovjetne su i kod drugih kratkoročnih diskontnih HOV. Drugim riječima, analogno mjenicama, isto važi i za bilo koju drugu kratkoročnu diskontnu HOV.

## 8. Periodične uplate i isplate (ulozi i rente)

Neka se u banku ulaže novčani iznos $U$ početkom (anticipativno) svake godine za $n$ godina, uz $p\%$, dekurzivan obračun i složeno ukamaćivanje. Ako je $U_n$ ukupan iznos početkom, a $U_n'$ ukupan iznos krajem $m$-te godine, tada važe relacije:

$$U_n = U(1 + q + q^2 + \quad \dots \quad + q^{n-1}) = U\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$U_n' = Uq(1 + q + q^2 + \quad \dots \quad + q^{n-1}) = Uq\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Do ovih relacija lako se dolazi i korišćenjem diskontne metode (svodeći sve novčane tokove na $t = 0$ i rješavajući dobijenu jednačinu po $U_n$).

Neka se od iznosa $K$ uloženog za $n$ godina početkom svake godine podiže isti iznos − ***renta R***. Ako je $K_m$ preostali novčani iznos početkom i $K_m'$ preostali novčani iznos krajem $m$-te godine ($m \leq n$), onda važi $K_m = Kq^{m-1} - R\dfrac{q^m - 1}{q - 1}$ i

$$K_m' = Kq^m - Rq\frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

Stanje na računu je 0, tj. $K_n' = 0$, ako je $Kq^n = Rq\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, odnosno

$$Kq^{n-1} = R\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Slično, za dekurzivne uloge suma na kraju $n$-te godine je $K_n = U\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (poklapa se sa $U_n$), a za dekurzivnu rentu imamo:

$R = Kq^n \dfrac{q - 1}{q^n - 1}$ (rješavajući linearnu jednačinu $K_n = 0$ po $R$).

Uz datu godišnju kamatnu stopu i $m$ uloga u toku jedne godine, za $n$ godina, potrebno je godišnju stopu svesti na ispodgodišnju (konformnu) i $n$ zamijeniti sa $nm$, jer u toku svake od $n$ godina imamo $m$ obračunskih perioda. Na taj način, sve izvedene formule za godišnji obračun važe i u ispodgodišnjem obračunu.

## 9. Investicioni zajmovi

***Anuiteti*** su novčani iznosi kojima se vraća zajam, u jednakim vremenskim razmacima (godišnje, polugodišnje, ...). Anuitet je jednak zbiru ***rate*** (kojom se vraća dio glavnog duga) i kamate (cijene zajmovnog kapitala).

U praksi su uobičajena sljedeća dva metoda otplate zajma:

a) ***jednakim ratama*** ili

b) ***jednakim anuitetima***,

početkom ili krajem dogovorenog vremenskog intervala, uz dekurzivni ili anticipativni obračun kamata.

Zajam je vraćen (***amortizovan***) ako su otplaćeni glavni dug i sve kamate.

Neka se zajam $K$ vraća za $n$ godina, krajem godine, uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p$ i godišnji obračun kamata.

Neka je $K_m$ preostali dio glavnog duga, $a_m$ anuitet, a $R_m$ i $i_m$ rata i interes za $m$-tu godinu, $m$ = 1, 2, ..., $n$. Izvršiti kontrolu plana otplate (tabele amortizacije) znači provjeriti tačnost sljedeće 4 relacije: $\sum a_m = \sum R_m + \sum i_m$ , $\sum R_m = K$ , $K_{n-1} = R_n$ , $K_n = 0$.

Tabele amortizacije (plan otplate) ima sljedeći izgled:

| Termin | Kamata | Rata | Anuitet | Glavni dug |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $K$ |
| 1 | $i_1$ | $R_1$ | $a_1$ | $K_1$ |
| 2 | $i_2$ | $R_2$ | $a_2$ | $K_2$ |
| .... | .... | .... | .... | .... |
| $n$-1 | $i_{n-1}$ | $R_{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $K_{n-1}$ |
| $n$ | $i_n$ | $R_n$ | $a_n$ | $K_n$ |

a) **Vraćanje zajma jednakim ratama**

Kako su rate jednake, to važi:

$$R_1 = R_2 = \quad \dots \quad = R_n \equiv R, R = \frac{K}{n}$$

$$i_1 = \frac{pK}{100}, i_2 = \frac{p(K-R)}{100}, \dots, i_n = \frac{p\left[K-(n-1)R\right]}{100}$$

$$a_1 = R + i_1, a_2 = R + i_2, \dots, a_n = R + i_n .$$

Uzastopne kamate obrazuju artimetički niz čiji je prvi član $i_1$, $n$-ti član $i_n$ i razlika $-\frac{pR}{100}$, pa je zbir svih kamata

$$\sum i_m = (i_1 + i_n)\cdot\frac{n}{2} = (\frac{pK}{100} + \frac{pK}{100} - \frac{pK}{100} + \frac{pK}{100n})\cdot\frac{n}{2} = \frac{pK(n+1)}{200}.$$

Anuiteti takođe obrazuju aritmetički niz čiji je prvi član $a_1$, $n$-ti $a_n$ i razlika $a_2 - a_1 = i_2 - i_1$, pa je zbir svih anuiteta

$$\sum a_m = \sum i_m + nR = \frac{pK(n+1)}{200} + K = K\left[1 + \frac{p(n+1)}{200}\right].$$

b) **Vraćanje zajma jednakim anuitetima**

Kako su anuiteti (krajem roka) jednaki, to važi:

$a_1 = a_2 = \ \ldots\ = a_n \equiv a$, $K_n = Kq^n - a(1 + q + q^2 + \ \ldots\ + q^{n-1})$, pa iz uslova $K_n = 0$, tj. $a(1 + q + \ \ldots\ + q^{n-1}) = Kq^n$, dobija se formula za anuitet $a = Kq^n \frac{q-1}{q^n - 1}$.

Primjenjujući ***diskontnu metodu***, po kojoj je zbir svih isplata (odliva) diskontovanih na neki raniji trenutak (obično $t = 0$) jednak zbiru svih uplata (priliva) diskontovanih na isti trenutak, sadašnja vrijednost zajma $K$ jednaka je zbiru sadašnjih vrijednosti svih anuiteta:

$$K = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ \ldots\ + \frac{a}{q^n} \Rightarrow Kq^n = a(q^{n-1} + q^{n-2} + \ \ldots\ + q + 1) \Rightarrow Kq^n = a\frac{q^n - 1}{q-1}$$

ili $a = Kq^n \frac{q-1}{q^n - 1}$.

Iz anuiteta i interesa rata iznosi $R_m = a_m - i_m = a - i_m$.

Izjednačavajući desne strane izraza $a = R_1 + i_1$ i $a = R_2 + i_2$, dobija se da je

$$R_2 + \frac{pK_1}{100} = R_1 + \frac{pK}{100} \text{ odnosno } R_2 = R_1 + \frac{p(K - K_1)}{100} = R_1 + \frac{pR_1}{100} = R_1\cdot(1 + \frac{p}{100}), \text{ tj.}$$

$R_2 = R_1 q$.

Slično se dobija $R_m = R_{m-1}q = R_1 q^{m-1}$, pa uzastopne rate obrazuju geometrijsku progresiju (prvi član je $R_1$, a količnik $q$).

Sve izvedene relacije važe i za ispodgodišnje anuitete. Potrebno je broj $n$ zamijeniti sa $n\cdot m$ i godišnju kamatnu stopu svesti na ispodgodišnju konformnu.

Ako se zajam vraća jednakim anuitetima početkom termina, imaćemo:

$$K_{n-1} = Kq^{n-1} - aq\frac{q^{n-1} - 1}{q-1}.$$

Ako je $K_n'$ ostatak zajma početkom $n$-te godine, onda je $K_n' = K_{n-1} - a = 0$, pa je:

$$a = Kq^{n-1}\frac{q-1}{q^n - 1}.$$

Do iste formule, osim metodom prolongacije, može se doći i diskontovanjem:

$$K = a + \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \quad \ldots \quad + \frac{a}{q^{n-1}}.$$

Slučaj anticipativnog obračuna kamata, koji je rijedak u praksi, kao i obračun interkalarne kamate, može se naći u udžbeniku [6].

## 10. Rentabilnost investicije

### *1. Metoda ravnomjernih ekvivalentnih godišnjih troškova (EGT)*

Uz pretpostavku da su prihodi po svim opcijama isti, ovom metodom se svi investicioni troškovi (bilo da su godišnji ili zbirni), po svim varijantama, svedu na jednake godišnje iznose. Kada su ti troškovi najmanji, data opcija je najrentabilnija. Jednaki godišnji iznos (godišnji „prosjek") računa se uz pomoć formule za anuitet.

Ako troškovi korišćenja i održavanja nijesu isti svake godine, računa se njihova sadašnja vrijednost, koja će biti osnovica za obračun anuiteta. Tako nastaju EGT korišćenja i održavanja. Početno ulaganje $K$ već je sadašnja vrijednost, pa će se EGT od nabavne vrijednosti dobiti primjenom obrasca za anuitet, gdje je osnovica $K$. Ukupni EGT je zbir prethodna dva.

Kada su troškovi održavanja isti svake godine, da bi se dobio EGT, dovoljno je na anuitet od nabavne vrijednosti (početnog ulaganja) dodati taj godišnji trošak.

### *2. Metoda sadašnje vrijednosti*

Suština metode je da se svi troškovi svedu na sadašnji trenutak, pa se zatim ti troškovi uporede (prihodi su isti za sve projekte).

Ako investicije ne daju isti efekat (prihodi nijesu isti), tada se izračuna sadašnji neto efekat investicije, kao razlika sadašnje vrijednosti prihoda i sadašnje vrijednosti troškova.

Investicija je rentabilna ako je njen sadašnji neto efekat pozitivan. Prosječni godišnji neto efekat investicije dobijamo ako izračunamo anuitet od sadašnjeg neto efekta.

Treća metoda − interna stopa prinosa (IRR − *Internal Rate of Return*) − biće uvedena kasnije.

## 11. Osnovne i izvedene hartije od vrijednosti

Na finansijskom tržištu razmjenjuju se finansijski instrumenti. Finansijsko tržište je organizovani prostor gdje se susreću ponuda i tražnja za finansijskim sredstavima, odnosno u širem smislu, finansijsko tržište je svaki mehanizam razmjene finansijskih sredstava. Dakle, to je tržište na kome se trguje finansijskim instrumentima. HOV su tzv. „neopipljiva" dobra, kod kojih je, za razliku od zemlje, mašina, zgrada, vrijednost sadržana u budućoj isplati. Dakle, njihova vrijednost ne zavisi od fizičkih svojstava, već je sadržana u zakonskom pravu da se naplate potraživanja u budućnosti. Za funkcionisanje finansijskog tržišta potrebno je obezbijediti učesnike, finansijske instrumente i mehanizam trgovine. Postoje mnogobrojne klasifikacije finansijskog tržišta. Prema predmetu trgovanja, finansijsko tržište može biti: tržište novca, tržište kapitala i tržište deviza. Na prvom se trguje kratkoročnim novčanim sredstvima i kratkoročnim HOV, kod tržišta kapitala dugoročnim, a na tržištu deviza stranim sredstvima plaćanja.

Tržište kapitala je organizovani prostor gdje se susreću ponuda i tražnja kapitala. Pod kapitalom ćemo smatrati novac raspoloživ u roku dužem od godinu dana. Tržište kapitala, u odnosu na tok emisije, dijeli se na primarno i sekundarno. Prvo omogućava emisiju i prvi otkup HOV (IPO − *Initial Public Offer*). Na sekundarnom tržištu kupuju se i prodaju već izdate HOV. Sekundarno tržište kapitala obuhvata vanberzansko tržište i berze. Prvo je neformalnog karaktera. Trgovanje se obavlja direktnim pregovorima učesnika, dok se kod berzi slobodno sučeljavaju ponuda i tražnja. Berza je mjesto gdje se trguje tipiziranom robom, po unaprijed utvrđenim pravilima. Prema načinu naplate, tržište kapitala može biti promptno i terminsko. Adekvatno tome, na berzi se trguje promptnim i terminskim ugovorima. Kod prvih se realizacija predmeta ugovora vrši odmah, a kod drugih u nekom narednom periodu. Terminski ugovori dijele se na: forvarde, fjučerse, svopove i opcije, dok se na promptnom tržištu trguje akcijama i obveznicama.

Kako se finansijska matematika bavi obračunima povezanim sa HOV, podsjetimo se njihove definicije. HOV je isprava kojom se njen emitent obavezuje da će zakonitom imaocu ispuniti obavezu upisanu na njoj. S aspekta ročnosti, HOV se dijele na kratkoročne, kojima se trguje na tržištu novca i na dugoročne, kojima se trguje na tržištu kapitala. Osnovne HOV su obveznice (kratkoročne i dugoročne) i akcije, kojima se trguje na tržištu kapitala. Obveznica je HOV kojom se emitent obavezuje da će njenom imaocu, u roku njene dospjelosti, isplatiti nominalnu vrijednost i ugovorenu kamatu (kupone). To su dužničke HOV (instrumenti duga) koje izdavaocu služe za zaduživanje, tj. akumulaciju finansijskih sredstava za određene investicije. Dugoročna obveznica može biti s kuponima ili bez njih. S aspekta roka dospijeća, obveznice mogu biti kratkoročne (s rokom dospijeća do godinu dana) i dugoročne (čiji je rok dospijeća preko jedne godine).

Akcije su vlasničke HOV, koje firme emituju s ciljem akumuliranja kapitala za obavljanje poslova. Akcije su dokaz o pravu svojine. One daju imovinska i neimovinska prava svojim vlasnicina. Vlasnik običnih akcija − akcionar ostvaruje pravo da upravlja akcionarskim društvom (glasa na skupštini akcionara), kao i materijalno pravo na isplatu dijela profita – dividende, ukoliko skupština akcionara donese odluku o isplati dividendi. Investitor kupuje akcije s motivom da ostvari prihod kroz kapitalni dobitak (razlika između prodajne i kupovne cijene) i dividendu. Akcije se emituju u dematerijalizovanoj formi i evidentiraju u bazi podataka Centralnih registara HOV (engl. CSD − *Central Securities Depositories*). Akcija može da glasi na donosioca i na ime. S aspekta elektronske trgovine na sekundarnom tržištu HOV, podrazumijeva se da akcije glase na ime. Za razliku od običnih akcija, preferencijalne (prioritetne) akcije vlasnicima obezbjeđuju pravo prvenstva na naplatu dividendi iz ostvarene neto dobiti preduzeća, ali ne daju pravo glasa na skupštini akcionara. Dividenda je za prioritetnu akciju unaprijed poznata, pa postoji velika sličnost s obveznicom sa kuponom, kod koje je prihod (kamata) poznat (fiksan). Trgovanje akcijama obavlja se izdavanjem naloga, koji se izvršavaju preko brokera.

Kao što je rečeno, u izvedene HOV (finansijske derivate) spadaju: forvardi, fjučersi, svopovi i opcije (ali nabrojane nijesu jedine). Terminski ugovori su oni s odloženom realizacijom. Temelje se na vremenskom razmaku između zaključivanja i izvršenja posla. Upotrijebljen je termin izvedene HOV (derivati) jer su njihova vrijednost i karakteristike zavisne (izvode se) od vrijednosti i karakteristika osnovne (bazne) HOV koja je predmet trgovine.

Forvardi su nestandardizovani ugovori sklopljeni između dva lica o isporuci određene robe, po danas utvrđenoj cijeni u fiksiranom momentu u budućnosti. Za ove tzv. klasične terminske ugovore ne postoji sekundarno tržište.

Fjučersi su izvedene HOV (derivati) koje obavezuju ugovorne strane da kupe ili prodaju neku aktivu (finansijski instrument ili robu) po unaprijed dogovorenoj cijeni, na unaprijed definisani budući trenutak. Njima se trguje na berzama fjučersa, uz posredovanje klirinške kuće, koja u potpunosti garantuje izvršenje ugovora. Za razliku od klasičnih terminskih ugovora, sekundarno tržište fjučersa veoma je aktivno, pa je moguće da trgovci zaključe svoju poziciju prema klirinškoj kući prije ugovorom utvrđenog dana isporuke, vršeći reverzibinu transakciju. Klirinška kuća, kao posrednik, svakodnevno vrši sravnjenje dobitka ili gubitka po osnovu promjene vrijednosti fjučers ugovora (engl. *mark to market*). Razlikujemo robne (metali, žitarice, …) i finansijske fjučerse (valutni, kamatni, na HOV, na indekse, …).

Opcija je ugovor kojim prodavac kupcu tog ugovora daje pravo, ali ne i obavezu, da kupi od prodavca ili ovom proda određeni finansijski instrument (npr. neku osnovnu HOV ili fjučers). Ukoliko opcija daje njenom kupcu pravo da od prodavca kupi određeni finansijski instrument, ona se zove kupovna opcija (*call option*, *call*), a ukoliko je predviđeno pravo prodaje, ona se zove prodajna opcija (*put option*, *put*). Za kupovinu opcionog ugovora plaća se opcijska cijena ili premija (*option premium*, *option price*). Cijena po kojoj kupac opcije može da kupi ili proda predmet opcionog ugovora zove se cijena izvršenja (*strike price*). Rok dospijeća (engl. *expiration date*) jeste datum kada opciji ističe rok. Prema tome kada kupac može iskoristiti pravo iz opcionog ugovora po strajk cijeni (govorićemo „izvršiti opciju"), opcije mogu biti evropskog i američkog tipa. Kod prvih imalac opcije izvršava opciju na dan kada opcija ističe, dok se kod drugih opcija može izvršiti i prije tog roka. Napomenimo da prodavac opcije, za razliku od kupca, mora izvršiti ugovorenu obavezu u trenutku izvršavanja opcije. Ako do određenog roka opcija nije podnijeta na realizaciju, ona postaje nevažeća. Najčešće ćemo pod predmetom trgovine podrazumijevati akcije, tj. razmatraćemo opcije na akcije. Unutrašnja vrijednost (engl. *intrinsic value*) kupovne opcije jeste razlika između tržišne cijene akcija i strajk cijene ako je ona pozitivna, inače je jednaka nuli. Ako opcija ima unutrašnju vrijednost, kažemo da je *in the money*. U slučaju da je *call* na gubitku (strajk cijena je veća od tržišne cijene akcija), kažemo da je *out of the money*, a ako su te cijene jednake, kažemo da je *at the money*. Unutrašnja vrijednost opcije u dva posljednja slučaja je jednaka 0, jer njeno izvršenje tada nije profitabilno. Analogno razmatranje važi i za put opcije. Osnovne razlike između opcija i akcija su: opcije imaju ograničen vijek trajanja (poslije određenog roka prestaju da budu HOV), broj akcija je limitiran, za razliku od broja opcija koji nije, vlasnik opcije nema udjela u kompaniji, nema pravo glasa niti pravo na isplatu dividendi, za razliku od vlasnika akcije. Opcije, osim toga što stabilizuju cijene na dugi rok, instrumenti su za smanjenje rizika poslovanja. Vlasnik (kupac) opcije zauzima dugu poziciju, a prodavac kratku.

Kod svopova se razmjenjuju budući novčani tokovi, fiksni s varijabilnim. Forvardi su prosti svopovi, jer se kod njih razmjena budućih novčanih tokova vrši jedanput, a kod svopova i više puta.

### 12. Utvrđivanja cijena obveznica

Tržišna vrijednost $P_0$ dugoročne obveznice s kuponom $I$ određuje se tako što se godišnji iznos kamata (kupona) koje ona donosi do roka dospijeća i njena nominalna vrijednost $N$, uz kamatnu stopu $p\%$ i složenu kapitalizaciju, svedu na sadašnju vrijednost. Prema principu ekvivalencije važi:

$$P_0 = \frac{I}{q} + \frac{I}{q^2} + \ldots + \frac{I}{q^n} + \frac{N}{q^n} = I\frac{q^n - 1}{q^n p}100 + N\frac{1}{q^n},$$

gdje je $n$ broj godina do roka dospijeća, a $q = 1 + p/100$.

Ukoliko je riječ o obveznici bez kupona, njena tržišna vrijednost iznosi $P_0 = \dfrac{N}{q^n}$
.

Ovako određena tržišna vrijednost nije cijena po kojoj se dugoročna obveznica i prodaje na sekundarnom tržištu, već samo predstavlja izvjesnu orijentaciju za učesnike u trgovini. Zbog toga je preciznije ovako utvrđene vrijednosti zvati ***sadašnjim (fer) vrijednostima***. Kamatnu stopu $p$ zovemo ***prinosom do dospijeća***. Ako su poznati rok dospijeća i svi novčani tokovi − sadašnja vrijednost obveznice, godišnje kamate, nominalna vrijednost obveznice − tada se može odrediti prinos do dospijeća. To je, u stvari, interna stopa prinosa − IRR, koja se određuje, u principu, metodom pokušaja i linearne interpolacije, o čemu će kasnije biti više riječi. Primijetimo da većem prinosu odgovara niža cijena, i obrnuto.

### 13. Tržišna vrijednost obične i preferencijalne akcije

Za razliku od obveznica, tržišnu vrijednost akcije teško je utvrditi bez određenih pretpostavki. Ako procijenimo iznos dividendi po godinama, onda se može primijeniti tzv. **model diskontovanja *dividendi*** (dividendna teorija), po kojoj je tržišna vrijednost akcije jednaka sadašnjoj vrijednosti očekivanih dividendi koje ona donosi. Ako su dividende po godinama jednake $D_1, D_2, \ldots, D_n$, a kamatna stopa $i$ (u decimalnom obliku), tada tržišna vrijednost akcija $P_0$, na osnovu principa ekvivalencije (svodeći sve novčane tokove na $t = 0$), iznosi:

$$P_0 = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+i)^n}.$$

Ako su dividende konstantne i iznose $D$ (Gordonov model), gornja suma postaje:

$$P_0 = \frac{D}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Ako se pretpostavi da će akcije preduzeća rasti u narednom periodu i da će početna dividenda $D$ rasti po konstantnoj stopi $r$ (u decimalnom obliku), tada je tržišna vrijednost akcija jednaka

$$P_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{D(1+r)^k}{(1+i)^k} = D(1+r)\frac{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n - 1}{r-i}.$$

Kod gornje relacije iskorišćena je formula za zbir geometrijske progresije količnika $\frac{1+r}{1+i}$.

Ako je $i > r$ i ako $n \to \infty$, tada je suma konvergentnog brojnog reda jednaka $P_0 = D(1+r)\frac{1}{i-r}$.

Kako je $D_1 = D(1+r)$, odavde se može izračunati stopa prinosa na investicije u akcije:
$i = r + D_1/P_0$.

Kod preferencijalnih akcija dividenda je fiksna, pa je njihova tržišna vrijednost data sa:
$P_0 = \frac{D}{p}100 = \frac{Ni}{p}100$, gdje je $D$ fiksna dividenda (u apsolutnom monetarnom iznosu), $N$ − nominalna vrijednost preferencijalne akcije, $p$ − stopa prinosa, a $i$ − stopa fiksne dividende, izračunata kao količnik dividende i nominalne vrijednosti preferencijalne akcije.

Napomenimo da je ovako određena vrijednost akcije ujedno i tržišna jedino na savršenom tržištu, koje u potpunosti odražava pretpostavke ovog modela cijene akcija. Znači, ona je samo orijentir za učesnike na sekundarnom tržištu HOV. Tržišna vrijednost zavisi od trenutne ponude i tražnje. Kao što je naglašeno kod obveznica, ovako određene vrijednosti bilo bi preciznije nazvati ***fer ili sadašnjim vrijednostima***.

### 14. Duracija, modifikovana duracija i konveksnost

Za poznate novčane tokove $CF_t$ koje u trenutku $t$ donosi obveznica, da bismo opisali kako se mijenja njena cijena $V$, reagujući na promjenu kamatne stope (stope prinosa $i = \frac{p}{100}$), uvodimo pojmove duracija $D$, modifikovana duracija $MD$ i konveksnost $C$, kako slijedi:

$$V = \sum_t \frac{CF_t}{(1+i)^t} \text{ − vrijednost obveznice},$$

$$D = \frac{\sum_t \frac{t\,CF_t}{(1+i)^t}}{V} \text{ − duracija},$$

$$MD = -\frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V} = \frac{D}{1+i} \text{ − modifikovana duracija},$$

$$C=\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}}{V}=\frac{\sum_t \frac{(t+t^2)CF_t}{(1+i)^t}}{V(1+i)^2} \quad -\text{ konveksnost}.$$

Da bismo mjerili važnu komponentu tržišnog rizika − rizik promjene kamatne stope, pokazuje se da važi sljedeća (približna) relacija:

$$\frac{\Delta V}{V}\approx -MD\,\Delta i+\frac{1}{2}C\,\Delta i^2 \ .$$

Ova približna relacija izvodi se primjenom razvoja funkcije $V$ (cijene obveznice) u Tajlorov red (do drugog stepena). Nezavisna promjenljiva je kamatna stopa $i$ (stopa prinosa).

*Lako se provjerava (korišćenjem navedenih formula) da duracija, modifikovana duracija i konveksnost za 15-godišnju obveznicu bez kupona nominale 1.000 €, uz stopu 6%, iznose 15, 14, 151 i 213, 599, kao i da se cijena te obveznice smanjuje za približno 6,8% ako se kamatna stopa promijeni za 50 b. p., tj. poveća za 0,5%.*

Napomenimo da kod obveznica ***kriva prinosa*** predstavlja grafički odnos cijene i stope prinosa, ili češće grafički odnos vremena ($t$) i kamatne stope (stope prinosa $i$).

## 15. Uopštenja kamatnih stopa

Cilj je da se uvede uopšteni diskontni faktor, koji će biti validan kada imamo situaciju nekonstantne kamatne stope.

### 15.1. Efektivna i nominalna kamatna stopa

Kamatna stopa za jedinicu vremena, od $t$ do $t$ + 1, jeste funkcija vremena, koju ćemo označavati sa $i(t)$. Stopu $i(t)$ zvaćemo ***efektivna***[1] (stvarna) kamatna stopa za jedinicu vremena u trenutku $t$, da bismo naglasili razliku od nominalne kamatne stope (koja je povezana s ispodgodišnjim kapitalisanjem).

Uz složeni kamatni račun od $K$ novčanih jedinica u trenutku $t=0$, u trenutku $t=1$, imamo: $K_1=K(0,1)=K\left[1+i(0)\right]$, a u trenutku $t=n\in N$:

$$K_n=K(0,n)=K\left[1+i(0)\right]\left[1+i(1)\right]\cdots\left[1+i(n-1)\right]$$

što za $i(t)=i,\ \forall t$ (kamatna stopa je konstantna sve vrijeme transakcije) daje:

$$K_n=K(1+i)^n=Kq^n,$$

gdje je $i=p\%=\dfrac{p}{100}$ kamatna stopa u decimalnom obliku, a $q=1+i$.

Za slučaj prostog interesnog računa $K_n=K(0,n)=K(1+in)$.

Broj $K(t_1,t_2)$ je ***faktor akumulacije*** u trenutku $t_2$, investicije od $K$ = 1 novčanih jedinica investiranih u trenutku $t_1$.

[1] U praksi se isti termin koristi u drugačijem kontekstu, kod odobravanja kredita − da bi se izrazila ukupna cijena zajmovnog kapitala (koja uključuje i sve troškove obrade kredita).

Posmatrajmo transakciju dužine $h$ vremenskih jedinica gdje je $h>0$ (obično, $h=\frac{1}{m}$ $m$-ti dio jedinice vremena). ***Nominalna*** kamatna stopa, u oznaci $i_h(t)$, za jedinicu vremena transakcije koja počinje u trenutku $t$ i koja traje $h$ vremenskih jedinica, jeste ona stopa za koju je efektivna stopa za period dužine $h$, koji počinje u trenutku $t$, jednaka $h\cdot i_h(t)$.

Važi $K(t,t+h)=1+h\cdot i_h(t)$.

Za $h=1$ dobijamo da se efektivna i nominalna stopa poklapaju. Na osnovu prethodne formule:

$$i_h(t)=\frac{K(t,t+h)-1}{h}.$$

***Intenzitet kamate*** (brzina rasta uloga) od $K=1$ novčanih jedinica (engl. *force of interest*) definiše se kao $\delta(t)=\lim\limits_{h\to 0+} i_h(t)$.

Ovo je situacija kod neprekidnog kapitalisanja, kada broj obračuna interesa teži beskonačnosti, a dužina intervala u kojima se on računa teži 0.

***Princip konzistentnosti*** govori da nema priliva ni odliva kapitala u toku kapitalisanja:

$$\text{za } t_0\le t_1\le t_2 \;\; K(t_0,t_2)=K(t_0,t_1)\cdot K(t_1,t_2).$$

15.2. Teorema o faktoru akumulacije

**TEOREMA:** Ako su $\delta(t)$ i $K(t_0,t)$ neprekidne funkcije (po nezavisno promjenljivoj $t$) za $t\ge t_0$ i ako važi princip konzistentnosti tada je $K(t_1,t_2)=Ke^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt}$.

Ako je $\forall t\in(t_1,t_2)$ $\delta(t)=\delta$ (konstantan intenzitet kamate) i $t_1=0, t_2=n$, tada prethodna formula postaje $K_n=K(0,n)=Ke^{n\delta}$.

Ako δ prikažemo u procentualnom obliku $\delta=p\%$, tada je $K_n=Ke^{\frac{np}{100}}$, što predstavlja formulu za računanje konačne sume kod neprekidnog kapitalisanja.

Ako je intenzitet kamate konstantan, tj. $\delta(t)=\delta, \forall t$, tada je i nominalna stopa konstantna i za $h=1, K=1$ na osnovu formule za nominalnu kamatnu stopu $i_h(t)=i=e^{\delta}-1$, tj. $e^{\delta}=1+i$, pa imamo $K(t_0,t_0+n)=e^{\delta n}=(1+i)^n=q^n$, što smo imali i kod klasičnog modela i godišnjeg kapitalisanja, ali sada $n$ može biti bilo koji pozitivan realan broj, a ne samo prirodan.

15.3. Sadašnja vrijednost novčanih tokova

Diskontovana vrijednost kapitala u trenutku $t = t_1,\ t_1 \le t_2$ je

$K = \dfrac{K(t_1,t_2)}{e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt}} = K(t_1,t_2)e^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt}$, a sadašnja vrijednost $(t_1 = 0, t_2 = t)$ je $K = K(0,t)\cdot e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$.

**Funkcija sadašnje vrijednosti** je $v(t) \overset{def.}{=} e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$.

To je diskontni faktor koji za $t \ge 0$ predstavlja sadašnju vrijednost 1 novčane jedinice date u trenutku *t*, a za $t < 0$ predstavlja akumulaciju u trenutku 0, 1 novčane jedinice uložene u trenutku *t*.

Ako je $\delta(t) = \delta,\ \forall t$ pisaćemo $v(t) = v^t,\ \ v = v(1) = e^{-\delta}$. Veza s diskretnim (godišnjim) kapitalisanjem je očigledna. Tamo je diskontni faktor bio $\dfrac{1}{q^t}$, a ovdje je $e^{-\delta t}\left[ = (e^{\delta})^{-t} = (1+i)^{-t} = (\dfrac{1}{1+i})^t = \dfrac{1}{q^t} = v^t \right]$. To je, u stvari, faktor čija je vrijednost izračunata u $II_p^t,\ i = \dfrac{p}{100}$ − drugim tablicama složenog interesnog računa. Važi da je $\delta = \ln(1+i)$, jer je $e^{\delta} = 1+i$.

Do formule za funkciju sadašnje vrijednosti moglo se lakše doći korišćenjem definicije $\delta(s) = -\dfrac{v'(s)}{v(s)}$. U stvari, $\delta$ je stopa promjene (rasta) *v*. Integraleći je u granicama od 0 do *t* i rješavajući datu diferencijalnu jednačinu s razdvojenim promjenljivim, uzimajući u obzir da je $v(0) = 1$, dobija se formula za $v(t)$. Funkcija $v(t)$ očigledno je opadajuća, pa je zato prisutan negativan predznak (rast je pozitivan). U stvari, ona predstavlja uopšteni diskontni faktor u režimu promjenljive kamatne stope, koji se svodi na standardni diskontni faktor, za slučaj konstantne kamatne stope.

15.4. Diskretni i neprekidni novčani tokovi

**a) Diskretni novčani tokovi**

Zbirna sadašnja vrijednost novčanih tokova $C_{t1}, C_{t2}, \dots, C_{tn}$ u trenucima $t_1, t_2, \dots, t_n$ iznosi $\sum_{j=1}^{n} C_{tj} v(t_j)$, gdje je *v* funkcija sadašnje vrijednosti.

**b) Neprekidni novčani tokovi**

Ako je $\rho(t)$ visina novčanog toka u trenutku *t*, $t \in [0, T]$, sadašnja vrijednost novčanog toka između $t$ i $t+\Delta t$ iznosi $v(t)\rho(t)\Delta t$, a sadašnja vrijednost cijelog novčanog toka iznosi $\int_0^T v(t)\rho(t)dt$.

Zbirna sadašnja vrijednost, u opštem slučaju, iznosi $\sum_{t \le T} C_t v(t) + \int_0^T v(t)\rho(t)dt$, jer se mogu kombinovati diskretni i neprekidni novčani tokovi. Ako je $\rho(t) = 0$, imamo čisto diskretne tokove, a ako je $C_t = 0$ za svako *t*, dobijamo čisto neprekidne novčane tokove.
Visina novčanog toka može biti i negativna, za slučaj odliva.

15.5. Rentabilnost investicionog projekta − IRR metoda

Za konstantnu kamatnu stopu stanje na računu u trenutku $t = T$ je:

$$\sum_{t \le T} C_t q^{T-t} + \int_0^T \rho(t) q^{T-t} dt,\ q = 1 + i,$$

a za $t = 0$ uz oznaku $v = \dfrac{1}{q}$ je $NSV(i) = \sum_{t \le T} C_t v^t + \int_0^T \rho(t) v^t dt$.

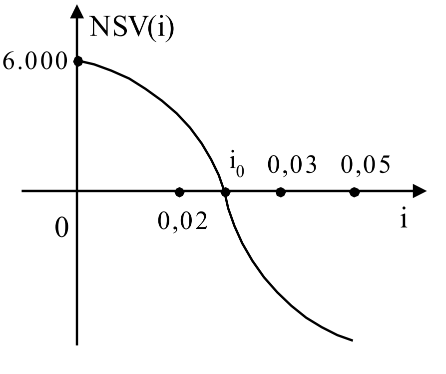
Funkciju NSV zovemo **neto sadašnja vrijednost** razmatrane investicije uz kamatnu stopu *i*. Primijetimo da je diskontni faktor sada $v(t) = v^t$, jer je stopa konstantna.

Ako $i \to \infty$ tada $NSV(i) \to C_0$.

U slučaju da je $NSV(i) > 0$ investicija je rentabilna. Maksimum opadajuće funkcije $NSV(i)$ dostiže se za *i* = 0.

Pretpostavimo da postoji stopa $i_0$ takva da je $NSV(i) = 0$ i da prolazeći kroz tu tačku NSV mijenja znak sa plus na minus. Stopa $i_0$ je **interna stopa prinosa** (engl. *internal rate of return*), u oznaci *IRR*.

Na sljedećem grafiku *IRR* pripada intervalu (2%, 3%)



Interpretirajmo $NSV$(i) i $i_0$ ($IRR$).

S aspekta investiranja, $IRR$ je očekivani povraćaj od investicije. Međutim, kako su novčani tokovi u startu izrazito negativni (zbog početnog ulaganja), investitor obično mora da se zaduži, pa je potrebna interpretacija s aspekta finansiranja.

Neka investitor pozajmljuje novac uz fiksnu stopu $i_1$. Ako je $NSV(i_1) > 0$ projekat je profitabilan. Profit (ili gubitak) u trenutku $T$ iznosi $NSV(i_1)q_1^T$, $q_1 = 1 + i_1$. Po definiciji $IRR$, projekat je profitabilan ako i samo ako je $i_1 < i_0$. Interna stopa prinosa $i_0$ ($IRR$) je, dakle, gornja granica do koje investitor može da se zadužuje, a da projekat i dalje bude profitabilan.

## 15.6. Uticaj inflacije

Pretpostavljajući da inflacija raste za jednu vremensku jedinicu po stopi $e$, tada je potrebno modifikovati novčane tokove $C_t$ i $\rho(t)$. Njihove nove vrijednosti su:

$$C_t^e = (1+e)^t C_t \text{, odnosno } \rho^e(t) = (1+e)^t \cdot \rho(t).$$

Ako novčane tokove diskontujemo uz realnu kamatnu stopu $i_r$ (u decimalnom obliku), tada je faktor akumulacije $q_r = 1 + i_r = \dfrac{1+i}{1+e}$, gdje je $i$ dogovorena (u našoj praksi nominalna, engl. *money*) kamatna stopa. U ovom slučaju zbirna sadašnja vrijednost novčanih tokova veća je nego u slučaju kada se ne zaračunava efekat inflacije, čime se čuva buduća vrijednost novca.

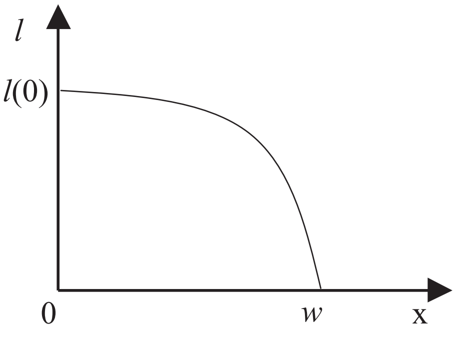
**NAPOMENA**: U udžbeniku [6] navedeno je sljedećih 5 faktora: faktor akumulacije $q^n$ (dat u I tablicama $\left(I_p^n\right)$), njegova recipročna vrijednost, koja je u II tablicama; faktor dodatnih uloga $q\dfrac{q^n-1}{q-1}$, izračunat u III tablici, faktor aktuelizacije koji je dat u IV tablicama, a njegova recipročna vrijednost data je u V tablicama, uz pomoć kojih se razmatrani problemi kraće rješavaju. Kao i ranije, $q = 1 + \dfrac{p}{100}$. U ovoj zbirci su sve kalkulacije obavljene na džepnom kalkulatoru, bez upotrebe tablica. Takođe, u upotrebi su i finansijske funkcije povezane s ovim faktorima.

# GLAVA II − AKTUARSKA MATEMATIKA

Cilj druge glave je da uvedemo diskontni faktor u osiguravajuće-tehničkom smislu, koji ćemo koristiti kod izvođenja formula za premije raznih polisa životnog osiguranja. Za to su nam potrebne funkcija doživljenja i standardni diskontni faktor razmatran u prvoj glavi. Korišćenjem mortalitetnih tablica, čija je prva kolona vrijednost broja živih lica starih x godina i diskontne stope $p$, uvešćemo diskontni faktor u osiguranju kao proizvod standardnog diskontnog faktora i vjerovatnoće doživljenja. Zato se i kaže da računske osnove neto tarifa u životnom osiguranju čine tablice smrtnosti i diskontna stopa.

## 1. Biometrijske funkcije

Funkciju − koja starosnom dobu pridružuje broj živih lica tog starosnog doba – označavamo sa $l$ i zovemo ***funkcija doživljenja***. To je opadajuća, diferencijabilna, pozitivna funkcija.




$$l : N \cap [0, w] \to N \cap [0, l(x_0)]$$

$w$ − oznaka za najdublju starost (rješenje jednačine $l_x = 0$).

$l(x_0)$ − broj živih članova polazne grupe osoba starih $x_0$ godina.

Iako su postojali brojni pokušaji da se zada analitički izraz za funkciju doživljenja, ipak se kod obračuna u osiguranju života, naročito kod određivanja premije, koriste tablice smrtnosti. Tablice se formiraju statističkom procedurom uzorkovanja, pa se za raspodjelu na populaciji proglašava raspodjela dobijena na uzorku. U njima su dati i drugi tzv. komutativni brojevi ($D_x$, $N_x$, $C_x$ i $M_x$), koji služe da se formule za premiju zapišu u prostom obliku, budući da je kod osiguranja narušena pravilnost geometrijske progresije, zbog prisustva vjerovatnoće doživljenja kod diskontnog faktora u osiguravajuće-tehničkom smislu.

***Intenzitet smrtnosti*** $\mu_x$ jeste trenutna stopa smrtnosti lica starih $x$ godina:

$$\mu_x = -\frac{l_x'}{l_x}.$$

Kako izvod mjeri brzinu promjene polazne $f$-je, ova definicija je opravdana. Predznak minus je posljedica toga što je funkcija doživljenja opadajuća, a intenzitet (stopa) smrtnosti ne može biti negativan.

Ako je poznat intenzitet smrtnosti, do funkcije doživljenja dolazimo rješavanjem gornje diferencijalne jednačine s razdvojenim promjenljivim: $l_x = c \cdot e^{-\int \mu_x dx}$. Iz opšteg rješenja dobijamo partikularno rješenje zadavanjem početnog uslova, obično $l_0 = 100.000$.

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju $l_x$, pošto znamo njenu vrijednost iz tablica smrtnosti, možemo odrediti približnu vrijednost intenziteta smrtnosti:

$$\mu_x \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}.$$

## 1.1 Vjerovatnoće života i smrti

Prema klasičnoj definiciji vjerovatnoće, imamo da je vjerovatnoća da će lice staro $x$ godina doživjeti narednu $x+1$−vu godinu jednaka:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Prema formuli za vjerovatnoću suprotnog događaja, imamo da je vjerovatnoća da lice staro $x$ godina neće doživjeti $x+1$–vu godinu, jednaka:

$$q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

Vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti $x+n$ godina je:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

a da neće:

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}.$$

## 1.2. Srednje i vjerovatno trajanje života

Formula za srednje trajanje života glasi $ET = \int_0^{w-x} {}_t p_x dt = \int_0^{w-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt$, a približna formula pogodna za primjenu tablica smrtnosti je $ET \approx \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{w-1}}{l_x}$.

Vjerovatno trajanje života je broj $k$ takav da je $\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2}$, tj. $l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$.

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju doživljenja, do broja $k$ dolazimo korišćenjem tablica smrtnosti i metode linearne interpolacije.

## 2. Osiguranje života uplatom mize

U ovoj sekciji ponavljamo formule za neto jednokratnu premiju (mizu) lične rente i osiguranja kapitala (za slučaj doživljenja, smrti i mješovitog osiguranja). Neto premija predstavlja cijenu preuzetog rizika, za razliku od bruto premije, koja predstavlja cijenu cjelokupnog osiguranja.

### 2.1. Osiguranje lične rente

Lična renta je iznos koji osiguranik prima lično, dok je u životu. Jednokratna neto premija za jediničnu i rentu od $R$ € iznosi:

1. Neposredna doživotna lična renta $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ $\quad M = R \cdot \frac{N_x}{D_x}$
2. Odložena ($m$ godina) doživotna lična renta ${}_m a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$ $\quad M = R \cdot \frac{N_{x+m}}{D_x}$
3. Neposredna privremena ($n$ godina) lična renta

$$a_{x,n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad M = R \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

4. Odložena ($m$ godina) privremena ($n$ godina) lična renta

$${}_m a_{x,n} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \qquad M = R \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Komutativni brojevi $D_x$ i $N_x$ nalaze se u tablicama gdje je korišćena kamatna stopa 5% (pa je $q = 1,05$), a definisani su kao:

$$D_x = \frac{l_x}{q^x} \text{ i } N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{w-1}.$$

### 2.2. Osiguranje kapitala

Za razliku od lične rente, gdje imamo više isplata, kod osiguranja kapitala vrši se jedna isplata − osigurana suma.
Slijede formule za jednokratnu premiju kod osiguranja kapitala za jediničnu i osiguranu sumu od $K$ €.

### 2.2.1. *Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja*

Formula za jednokratnu neto premiju za slučaj doživljenja ugovorenog roka glasi: $B_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$, $M = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$. Isplatu dobija osiguranik ako bude u životu kroz $n$ godina.

Ona je interesantna i zbog toga što je to ${}_nE_x$ − diskontni faktor u osiguravajuće-tehničkom smislu: proizvod je standardnog diskontnog faktora i vjerovatnoće doživljenja narednih $n$ godina: $B_x = \frac{1}{q^n}\frac{l_{x+n}}{l_x}$ $(= {}_nE_x)$.

Generalno kod životnog osiguranja, prema principu ekvivalencije, uplata (neto premija) jednaka je očekivanoj diskontovanoj isplati $EX$ (ili njihovom zbiru, kod rentnih osiguranja). Detaljna izvođenja data su u udžbeniku.

### 2.2.2. *Osiguranje kapitala za slučaj smrti*

U ovom slučaju osiguranu sumu (1 € ili $K$ €) dobija nasljednik, bezuslovno ili pod određenim uslovima (ako smrt osiguranog lica nastupi poslije $m$ godina ili u toku prvih $n$ godina).

Neto premija za doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti: $A_x = \frac{M_x}{D_x}$, $M = K \cdot \frac{M_x}{D_x}$.

Odloženo ($m$ godina) doživotno osiguranje za slučaj smrti (neto premija):
${}_mA_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$, $M = K \cdot \frac{M_{x+m}}{D_x}$.

Neposredno privremeno ($n$ godina) osiguranje kapitala za slučaj smrti (neto premija):
$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$, $M = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$.

Neto premija za odloženo ($m$ godina) privremeno ($n$ godina) osiguranje kapitala za slučaj smrti: ${}_mA_{x,n} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$, $M = K \cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$.

### 2.2.3. *Mješovito osiguranja kapitala*

Do premije (date su ispod) za mješovito osiguranje dolazimo sabiranjem (pokriva se rizik doživljenja i rizik smrti) premije za slučaj doživljenja i premije za slučaj smrti, jer se isplata osigurane sume vrši osiguraniku, ako doživi ugovoreni rok i/ili nasljedniku, u zavisnosti da li su predviđene moguće dvije isplate ili samo jedna:

- za mješovito osiguranje kapitala s jednom isplatom $\overline{A_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$,
- za mješovito osiguranje kapitala s dvije isplate $A_x^{'} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x}{D_x}$.

### 3. Osiguranje premijama

U praksi se premije plaćaju iz više puta, obično godišnje. Do godišnje neto premije $P$ dolazimo pomoću jednokratne premije A, korišćenjem principa ekvivalencije (svođenjem svih novčanih tokova na $t = 0$):

- neposredna doživotna godišnja premija $P = \frac{A}{a_x}$,
- neposredna privremena (za $n -$ godina) premija $P = \frac{A}{a_{x,n}}$.

Ove formule se koriste kad god treba jednokratan iznos svesti na njemu ekvivalentan godišnji iznos (u osiguravajuće-tehničkom smislu), slično kao kod kredita $K$ i godišnjeg anuiteta $a$, samo što je ovdje diskontni faktor kompleksniji.

### 4. Bruto premija

Ako na cijenu rizika (neto premiju) dodamo troškove sprovođenja osiguranja, dobijamo cijenu osiguranja (bruto premiju).

Troškovi kod životnog osiguranja obuhvataju:

1. akvizicione – troškove pribavljanja osiguranja ($x_1$)
2. inkaso – troškove naplate premije ($y$) i
3. administrativne (upravne) troškove ($z$).

Prvi i treći troškovi zaračunavaju se od osigurane sume, a drugi od bruto premije.

Visina jednokratne bruto premije $JB$, koja odgovara jednokratnoj neto premiji $JN$, za jedinicu osiguranog kapitala iznosi $JB = \frac{JN + x_1 + y}{1 - z}$.

Visina godišnje bruto premije za jedinicu osiguranog kapitala iznosi $PB = \frac{PN + d + e}{1 - z}$,

gdje je $d = \frac{x_1}{a_x}$ ili $d = \frac{x_1}{a_{x,n}}$, a $e = \frac{y}{a_x}$ ili $e = \frac{y}{a_{x,n}}$, u zavisnosti od toga da li je premija doživotna ili privremena. Ovdje su $d$ i $e$ pripadajući godišnji dio akvizicionih i upravnih troškova.

# ZADACI

## 1. Privredni račun

### 1.1. Procentni račun

**1.** Cijena neke robe prvo je povećana za 10%, zatim snižena za 7% i na kraju je opet povećana za 8%. Da li je krajnja cijena robe veća ili manja od početne cijene i za koliko procenata?

**Rješenje:**

Ako sa $x$ označimo početnu cijenu, sa $y$ krajnju, tada je $y = x\cdot 1{,}1\cdot 0{,}93\cdot 1{,}08 = 1{,}10484x$.

Dakle, krajnja cijena je veća, jer je 1,10484>1. Neka je veća za $p$%, tada je $x + p\%x = y$, tj. $x + \frac{p}{100}\cdot x = 1{,}10484x \Rightarrow \frac{p}{100} = 0{,}10484$, pa je $p$=10,484.

Znači, krajnja cijena je veća za 10,484%. Kako je $y = q\cdot x$, $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}10484$, formula za $p$ je $p = (q-1)\cdot 100 = 10{,}484$, što je drugi način određivanja $p$.

**2.** Roba u prvoj prodavnici poskupjela je 9%, a zatim pojeftinila 7%. Ista roba (iste početne cijene) u drugoj prodavnici pojeftinila je 4%, a zatim poskupjela 6%. U kojoj je prodavnici, na kraju, roba skuplja i za koliko procenata?

**Rješenje:**

Ako sa $x$ označimo početnu cijenu, sa $y$ krajnju u prvoj prodavnici, a sa $z$ krajnju u drugoj prodavnici, tada je $y = x\cdot 1{,}09\cdot 0{,}93 = 1{,}0137x$ i $z = x\cdot 0{,}96\cdot 1{,}06 = 1{,}0176x$.

Dakle, krajnja cijena je veća u drugoj prodavnici.

Neka je veća za $p$%, tada je $y + p\%y = z$, tj.

$$1{,}0137x + \frac{p}{100}\cdot 1{,}0137x = 1{,}0176x \Rightarrow \frac{p}{100}\cdot 1{,}0137x = 0{,}0039x$$, pa je $p$ = 0,385.

Znači, krajnja cijena je veća u drugoj prodavnici za 0,385%. Primijetimo da rezultat nije zavisio od toga kolika je početna cijena. Takođe, $p=(q-1)\cdot 100$, pa iz $y\cdot q=z\Rightarrow q=1,00385$, tj. $p$ = 0,385.

**3.** Roba u prvoj prodavnici poskupjela je 9%, a zatim pojeftinila 7%. U drugoj prodavnici je pojeftinila 4%, a zatim poskupjela 6%. Ako su im krajnje cijene jednake, u kojoj je prodavnici roba na početku bila skuplja i za koliko procenata?

**Rješenje:**

Ako sa $x$ označimo početnu cijenu u prvoj prodavnici, sa $y$ početnu cijenu u drugoj prodavnici, a sa $z$ krajnju cijenu (u obje je ista), tada je $z=x\cdot 1,09\cdot 0,93=1,0137x$ i $z=y\cdot 0,96\cdot 1,06=1,0176y$.

Otuda je $1,0137x=1,0176y$, pa je $x=\frac{1,0176}{1,0137}y=1,0038y>y$.

Dakle, početna cijena je veća u prvoj prodavnici, jer je 1,0038>1.

Ako je veća za $p$%, tada je $y+p\%y=x$, tj. $y+\frac{p}{100}y=1,0038y\Rightarrow p=0,38$.

Znači, veća je krajnja cijena u drugoj prodavnici za 0,38%. Primijetimo da ni u ovom zadatku rezultat nije zavisio od toga kolika je početna cijena i da se do $p$ moglo doći formulom, čime se izbjegava rješavanje linearne jednačine.

**4.** Preduzeće ima tri pogona. Prvi je ostvario proizvodni plan sa 80%, što iznosi 1.200.000 €, drugi sa 75%, što iznosi 370.000 €, a treći pogon proizveo je robu u vrijednosti od 900.000 €, čime je svoj plan premašio za 9%. Izračunati plan za svaki pogon i ukupnu proizvodnju preduzeća. Koliko procenata je ukupno ostvarena proizvodnja manja u odnosu na ukupan plan?

**Rješenje:**

Označimo sa $x_1, x_2$ i $x_3$ planiranu, a sa $y_1, y_2$ i $y_3$ ostvarenu proizvodnju za svaki od pogona.

Tada je:

$y_1=0,8\cdot x_1=1.200.200€$, $y_2=0,75\cdot x_2=370.000€$ i $y_3=1,09\cdot x_3=900.000€$, a odavde je:

$x_1=\frac{1.200.200€}{0,8}=1.500.000€$, $x_2=\frac{370.000€}{0,75}=493.333,33€$ i $x_3=\frac{900.000€}{1,09}=825.688,07€$.

Označimo sa $X$ ukupnu planiranu, a sa $Y$ ukupnu ostvarenu proizvodnju. Tada je: $X = x_1 + x_2 + x_3 = 1.500.000€ + 493.333,33€ + 825.688,07€ = 2.819.021,40€$.

$Y = y_1 + y_2 + y_3 = 1.200.200€ + 370.000€ + 900.000€ = 2.470.000€$, pa je, u apsolutnom iznosu, ostvarena proizvodnja manja od planirane za 349.021,4 €, a u procentima:

$Y = X - p\%X \Rightarrow 2.470.000 = 2.819.021,40 - \frac{p}{100}2.819.021,40$. Odavde je $p = 12,38$.

Znači, ostvarena proizvodnja je 12,38% manja od planirane.

I ovdje smo mogli iskoristiti gotovu formulu $p = \frac{i}{K} \cdot 100 = \frac{349.021,4}{2.819.021,4} \cdot 100 = 12,38$

, što se ubuduće i preporučuje.

**5.** Predviđeno je da se izvjesna količina robe proda po određenoj cijeni. Međutim, samo 1/10 robe je prodata po planiranoj cijeni, dok je 1/5 prodata po cijeni većoj za 10%; 3/10 je prodato po cijeni manjoj za 20% od planirane, a ostatak je prodat po cijeni od 88 € po kg, čime je u prosjeku postignuta planirana cijena. Izračunati koliko je robe bilo planirano da se proda i po kojoj cijeni, ako je za robu dobijeno 1.200.000 €?

**Rješenje:**

Označimo sa $x$ ukupnu količinu robe, a sa $p$ predviđenu cijenu. Tada je $\frac{1}{10}x$ prodato po cijeni $p$; $\frac{1}{5}x$ po 1,1$p$; $\frac{3}{10}x$ po 0,8$p$ i $\frac{2}{5}x$ $\left(= x - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5}x - \frac{3}{10}x \text{ – ostatak}\right)$ po $88€/kg$.

Kako je u prosjeku postignuta planirana cijena, to je

$$\frac{1}{10}x \cdot p + \frac{1}{5}x \cdot 1,1p + \frac{3}{10}x \cdot 0,8p + \frac{2}{5}x \cdot 88 = xp,$$

odakle se, nakon skraćivanja sa $x$, dobija $p = 80$. Kako je $xp = 1.200.000 \Rightarrow x = 15.000$.

**6.** Nikola je za večeru pojeo 40% torte, a Marko 150 grama. Filip je pojeo 30% ostatka torte i još 120 grama, a Ana je pojela preostalih 90 grama torte. Kolika je početna masa torte?

**Rješenje:**

Označimo sa $x$ ukupnu masu torte. Tada je

$$\underset{\text{Nikola}}{0,4x} + \underset{\text{Marko}}{150} + \underbrace{0,3 \cdot (x - 0,4x - 150) + 120}_{\text{Filip}} + \underset{\text{Ana}}{90} = x.$$

Rješavajući ovu linearnu jednačinu, dobija se $x = 750$, pa je ukupna masa torte 750 grama.

**7.** Ukupan ostvareni kvartalni profit u filijalama A i B kompanije *K* je 364.000 €. Filijala A je ostvarila profit od 161.000 €, što je za 15% više od planiranog. Filijala B je u istom periodu premašila planirani profit za 18.000 €. Za koliko procenata je premašen ukupan planirani profit u filijalama A i B?

**Rješenje:**

Neka je $x$ planirani profit u filijali A. Po uslovu zadatka je $1{,}15x = 161.000$, pa je $x = \dfrac{161.000}{1{,}15} = 140.000$.

Profit u filijali A premašen je za: $161.000 - 140.000 = 21.000$.

Profit u filijalama A i B premašen je za $21.000 + 18.000 = 39.000$.

Ukupan planirani profit dobijamo kada ukupan profit umanjimo za iznose za koje je profit premašen u filijalama A i B: $364.000 - 39.000 = 325.000$.

Dakle, planirani profit je bio $K = 325.000$ i premašen je za $i = 39.000$, pa ako je $p$ tražena stopa, tada je $p = \dfrac{i}{K} \cdot 100 = \dfrac{39.000}{325.000} \cdot 100 = 12$, što znači da je ukupan planirani profit premašen za 12%.

Rješenje smo mogli dobiti i direktno iz jednačine:

$$364.000\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}\right) = 161.000\left(1 - \frac{1}{1.15}\right) + 18.000,$$

gdje je $p$ traženi procenat. Lijeva strana jednakosti predstavlja iznos za koji je premašen ukupan planirani profit, a desna strana zbir iznosa za koje je premašen profit u svakoj od filijala. Uočimo da se iz uslova zadatka dobija da je $PP = \dfrac{161.000}{1.15}$ planirani profit filijale A (jer je $1{,}15PP = 161.000$), a slično $\dfrac{364.000}{1 + \frac{p}{100}}$ ukupan planirani profit.

**8**. Nikola je za večeru pojeo 30% torte, a Marko 180 grama. Filip je pojeo 40% ostatka torte i još 20 grama. Marija je pojela preostalih 40 grama torte. Kolika je početna masa torte?

**9**. Cijena neke robe prvo je snižena za 8%, zatim povećana za 9%, a na kraju je opet snižena za 2%. Da li je krajnja cijena robe veća ili manja od početne cijene i za koliko procenata?

**10**. Cijena neke robe prvo je povećana za 10%, zatim snižena za 7%, i na kraju je opet povećana za 8%. Da li je krajnja cijena robe veća ili manja od početne cijene i za koliko procenata?

**11**. Preduzeće ima tri pogona. Prvi je ostvario proizvodni plan sa 90%, što iznosi 1.800.000 €, drugi sa 95%, što iznosi 570.000 €, a treći pogon je proizveo robu u vrijednosti od 954.000 €, čime je svoj plan premašio za 6%. Izračunati plan za svaki pogon i ukupnu proizvodnju preduzeća. Koliko procenata je ukupno ostvarena proizvodnja manja u odnosu na ukupan plan?

**12**. Predviđeno je da se izvjesna količina robe proda po određenoj cijeni. Međutim, samo 2/10 robe je prodato po planiranoj cijeni, dok je 1/5 prodata po cijeni većoj za 20%; 1/10 je prodata po cijeni manjoj za 10% od planirane, a ostatak je prodat po cijeni od 47 € po kg, čime je u prosjeku postignuta planirana cijena. Izračunati koliko je robe bilo planirano da se proda i po kojoj cijeni, ako je za robu dobijeno 1.200.000 €.

**13**. Jedna osmina robe prodata je sa zaradom 5%, dvije osmine sa zaradom 6% i tri osmine sa zaradom 7%. Ostatak robe, uz gubitak od 4%, prodat je za 48.000 €. Kolike su nabavne i prodajne cijene djelova i cijele robe, i koliko procenata ukupne prodajne vrijednosti iznosi ukupna zarada, ako se pojedinačne zarade i gubici računaju od nabavne vrijednosti?

**14**. Dvije osmine robe prodate su sa zaradom 5%, jedna osmina sa zaradom 7%, i tri osmine sa zaradom 6%. Ostatak robe, uz gubitak od 6%, prodat je za 48.000 €. Kolike su nabavne i prodajne cijene djelova i cijele robe, i koliko procenata ukupne prodajne vrijednosti iznosi ukupna zarada, ako se pojedinačne zarade i gubici računaju od nabavne vrijednosti?

**15**. Ako apoteka može nabaviti lijek od drugog proizvođača po cijeni 15,55 €, a trenutna cijena je 20,16 €, kolika je ušteda ukoliko ga kupi po nižoj cijeni (u odnosu na veću cijenu) u procentima? Koliko gubi u procentima (tj. plaća više u odnosu na cijenu 15,55 €) ako ga ne nabavi jeftinije?

1.2. Proporcije

**1**. Šest radnika podiže zid visine 2,5 m i dužine 120 m, za 3 dana uz osmočasovno radno vrijeme. Da li treba povećati ili smanjiti radno vrijeme i za koliko procenata da bi 5 radnika ozidalo zid visine 2 m i dužine 180 m za 4 dana?

**Rješenje:**

| Radnici $\downarrow$ | Visina $\uparrow$ | Dužina $\uparrow$ | Dani $\downarrow$ | Radno vrijeme $\uparrow$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 2,5 | 120 | 3 | 8 |
| 5 | 2 | 180 | 4 | $x = ?$ |

$x:8=\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{2{,}5}\cdot\frac{180}{120}\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow x=8{,}64>8$, što znači da treba povećati radno vrijeme. Ako je $p$ procenat za koji ga treba povećati, tada je $8+\frac{p}{100}\cdot 8=8{,}64\Rightarrow p=8$. Znači, treba povećati radno vrijeme za 8%.

**II način:** $p=\frac{i}{K}\cdot 100=\frac{0{,}64}{8}\cdot 100=8$.

**Napomena:** Umjesto posmatranja 5 veličina, mogli smo posmatrati 4, tj. objediniti visinu i dužinu u površinu.

**2**. Šest metara platna širine 70 cm plaćeno je 45 €. Koliko treba platiti 4 metra platna širine 80 cm? Povećanje/smanjenje cijene izraziti procentualno.

**Rješenje:**

| Dužina $\uparrow$ | Širina $\uparrow$ | Cijena $\uparrow$ |
|---|---|---|
| 6 | 70 | 45 |
| 4 | 80 | $x = ?$ |

$x:45=\frac{4}{6}\cdot\frac{80}{70}\Rightarrow x=34{,}29<45$, pa je cijena manja nego cijena prvog platna za 10,71 €.

Kako je $45-\frac{p}{100}\cdot 45=34{,}29\Rightarrow p=23{,}8$, to je cijena novog platna niža za 23,8%.

**II način:** $p = \dfrac{i}{K} \cdot 100 = \dfrac{10,71}{45} \cdot 100 = 23,8$.

**3**. Na jednoj farmi sa 55 krava ima hrane za 27 dana. Nakon 10 dana kupljeno je još 5 krava. Koliko dana će moći da se hrani ukupan broj krava? Odrediti da li će se novi broj krava hraniti duže ili kraće od predviđenog (preostalog) broja dana i izračunati to povećanje ili smanjenje u procentima.

**Rješenje:**

**I način:**

Prvo se izračuna koliko je hrane potrošeno za 10 dana. Sa *H* označimo ukupnu količinu. Tada:

| Krave | | Dani | | Hrana | |
|---|---|---|---|---|---|
| 55 | $\uparrow$ | 27 | $\uparrow$ | $H$ | $\uparrow$ |
| 55 | | 10 | | $x = ?$ | |

$x : H = \dfrac{55}{55} \cdot \dfrac{10}{27} \Rightarrow x = \dfrac{10}{27} H$. Dakle, krave su za 10 dana potrošile $\dfrac{10}{27}$ ukupne količine hrane, što znači da je ostalo $\dfrac{17}{27}$ ukupne količine hrane $(\dfrac{17}{27} H)$.

Sada tražimo koliko će dana sve krave moći da se hrane s preostalom hranom.

| Krave | | Dani | | Hrana | |
|---|---|---|---|---|---|
| 55 | $\downarrow$ | 27 | $\uparrow$ | $H$ | $\uparrow$ |
| 60 | | $x = ?$ | | $\dfrac{17}{27} H$ | |

$$x : 27 = \frac{55}{60} \cdot \frac{\frac{17}{27} H}{H} \Rightarrow x = 27 \cdot \frac{55}{60} \cdot \frac{17}{27} = 15,58.$$

Dakle, ima hrane za još 15,58 dana, što je manje od 17, koliko bi bilo za nepromijenjen broj krava. Sada imamo $15,58 = 17 - p\%17 \Rightarrow p = 8,35$. Dakle, sa dodatnih 5 krava hraniće se kraće za 8,35%.

Konačan rezultat može se dobiti i iz $p = \dfrac{i}{K} \cdot 100 = \dfrac{1,42}{17} \cdot 100 = 8,35$.

**II način:**

Nakon 10 dana, s preostalom hranom (označimo je sa PH) početnih 55 krava moglo bi da se hrani još 17 dana (= 27 – 10). Otuda,

| Krave | | Dani | | Hrana | |
|---|---|---|---|---|---|
| 55 | $\downarrow$ | 17 | $\uparrow$ | PH | $\uparrow$ |
| 60 | | $x=?$ | | PH | |

$$x:17=\frac{55}{60}\cdot\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PH}}\Rightarrow x=17\cdot\frac{55}{60}\Rightarrow x=17\cdot\frac{55}{60}=15,58.$$

Procenat se računa isto kao i u prvom rješenju, formulom ili linearnom jednačinom.

**4**. Na nekoj farmi sa 25 krava ima hrane za 40 dana. Nakon 5 dana, zbog štetočina, uništeno je 20% preostale hrane. Vlasnici su zato prodali 8 krava. Koliko će još dana preostale krave moći da se hrane?

**Rješenje:**

Prvo se izračuna koliko je hrane potrošeno za 5 dana. Sa $H$ označimo ukupnu količinu. Tada:

| Krave | | Dani | | Hrana | |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | $\uparrow$ | 40 | $\uparrow$ | $H$ | $\uparrow$ |
| 25 | | 5 | | $x$ | |

$x:H=\frac{25}{25}\cdot\frac{5}{40}\Rightarrow x=\frac{5}{40}H$. Dakle, krave su za 5 dana potrošile $\frac{5}{40}$ ukupne količine hrane, što znači da je ostalo $\frac{35}{40}$ ukupne količine hrane. Uništeno je 20%, pa je ostalo $0,8\cdot\frac{35}{40}$ ispravne hrane ( $0,8\cdot\frac{35}{40}H$ ).

Sada računamo koliko se s tom hranom može hraniti smanjeni broj krava.

| Krave | | Dani | | Hrana | |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | $\downarrow$ | 40 | $\uparrow$ | $H$ | $\uparrow$ |
| 17 | | $x=?$ | | $0,8\cdot\frac{35}{40}H$ | |

$$x:40=\frac{25}{17}\cdot\frac{0,8\cdot\frac{35}{40}H}{H}\Rightarrow x=40\cdot\frac{25}{17}\cdot 0,8\cdot\frac{35}{40}=41,18.$$

Preostale krave će moći da se hrane još 41,18 dana.

**5**. Auto-put dužine 50 km gradi 5.000 radnika za 500 dana. Nakon 100 dana pridružilo im se još 500 radnika. Ako ukupno treba izgraditi 55 km auto-puta, za koliko će se dana završiti?

**Rješenje:**

Prvo ćemo odrediti koliko auto-puta je završeno za 100 dana.

| Dužina | | Radnici | | Dani | |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 km | $\uparrow$ | 5.000 | $\uparrow$ | 500 | $\uparrow$ |
| $x = ?$ | | 5.000 | | 100 | |

$\frac{x}{50} = \frac{5.000}{5.000} \cdot \frac{100}{500} \Rightarrow x = 10$, što znači da je za 100 dana 500 radnika uradilo 10 km auto-puta.

Sada postavljamo novu proporciju:

| Dužina | | Radnici | | Dani | |
|---|---|---|---|---|---|
| 50km | $\uparrow$ | 5.000 | $\downarrow$ | 500 | $\uparrow$ |
| 45 | | 5.500 | | $x = ?$ | |

$\frac{x}{500} = \frac{5.000}{5.500} \cdot \frac{45}{50} \Rightarrow x = 409,09$.

Povećani broj radnika treba da radi još 409,09 dana, što znači da je ukupno vrijeme 509,09 dana.

**6**. Fabrici koja zapošljava 18 radnika, koji rade po 6 sati dnevno, za porudžbinu od 540 proizvoda potrebno je 15 dana. Nakon 7 dana od početka rada na porudžbini, 6 radnika je bilo prinuđeno da se podvrgne samoizolaciji zbog koronavirusa. Za koliko dana će fabrika završiti rad na porudžbini ako preostali radnici počnu da rade po 9 sati dnevno?

**Rješenje:**

Radeći u normalnim okolnostima, fabrika za 15 dana proizvede 540 proizvoda. Označimo sa $P$ broj proizvoda koje je fabrika proizvela u prvih sedam dana rada na porudžbini (prije odlaska radnika u samoizolaciju). Kako se u prvih 7 dana nije mijenjao broj radnika ni radno vrijeme, broj $P$ možemo dobiti iz direktne proporcije:

| Dani | Proizvodi |
|---|---|
| 15 | 540 |
| 7 | $P$ |

Odgovarajuća jednačina glasi: $P:540 = 7:15$ iz koje dobijamo da je $P = 252$.
Dakle, treba odrediti za koliko dana će preostalih 12 radnika proizvesti $540 - 252 = 288$ proizvoda, radeći po 9 sati dnevno. Označimo traženi broj sa $D$. Proširenu proporciju koja odgovara ovom dijelu zadatka možemo grafički predstaviti na sljedeći način:

| Radnici | Sati | Dani | Proizvodi |
|---|---|---|---|
| 18 | 6 | 15 | 540 |
| 12 | 9 | $D$ | 288 |

Odakle je $D:15 = \frac{288}{540} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{18}{12} \Rightarrow D = 15 \cdot \frac{288}{540} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{18}{12} = 8$.
Dakle, fabrika će završiti sa radom takođe za 15 dana (7 + 8).

**7**. Na nekoj farmi sa 25 krava ima hrane za 45 dana. Nakon 5 dana, zbog štetočina, uništeno je 30% preostale hrane. Vlasnici su zato tada prodali 7 krava. Koliko će još dana preostale krave moći da se hrane?
**Rezultat**: 38,89.

**8**. U jednoj fabrici za proizvodnju papira radi 12 mašina i za 30 dana zajedno proizvedu 87.000 paketa. Nakon 5 dana pokvarila se jedna mašina. Koliko će još paketa papira proizvesti preostale mašine ako ukupan posao treba završiti prije roka, za 20 dana (umjesto preostalih 25)? Pretpostavlja se da sve mašine proizvode istu količinu.
**Rezultat**: 53.166,67.

**9**. Na jednoj farmi sa 45 krava ima hrane za 32 dana. Nakon 10 dana kupljeno je još 5 krava. Koliko dana će moći da se hrani ukupan broj krava. Odrediti da li će se novi broj krava hraniti duže ili kraće od predviđenog (preostalog) broja dana i izračunati za koliko procenata je to povećanje ili smanjenje.
**Rezultat**: smanjenje za 10%.

**10**. U jednoj fabrici za proizvodnju papira radi 11 mašina i za mjesec dana zajedno proizvedu 78.000 paketa. Nakon 3 dana pokvarila se jedna mašina. Koliko će još paketa papira proizvesti preostale mašine ako ukupan posao treba završiti prije roka, za 20 dana (umjesto preostalih 27)? Pretpostavlja se da sve mašine proizvode istu količinu.
**Rezultat**: 47.272,73.

**11**. Auto-put dužine 60 km gradi 5.600 radnika za 600 dana. Nakon 100 dana pridružilo im se još 400 radnika. Ako ukupno treba izgraditi 65 km auto-puta, za koliko će se dana završiti?
**Rezultat**: 513,33.

**12**. Temelje za zgradu dimenzija 10 m x 30 m kopa 20 radnika za 8 dana. Nakon dva dana, zbog bolesti, napustio ih je 1 radnik. Za koliko će vremena preostali radnici iskopati temelj? Za koliko se u procentima povećao/smanjio broj dana u odnosu na prvobitno planirani?
**Rezultat**: 6,32. Povećanje 4% ((8,32-8)/8·100).

**13**. Temelje za zgradu dimenzija 15 m x 35 m kopa 25 radnika za 12 dana. Nakon tri dana, zbog bolesti, napustila su ih 2 radnika. Za koliko će vremena preostali radnici iskopati temelj? Za koliko se u procentima povećao/smanjio broj dana u odnosu na prvobitno planirani?
**Rezultat**: 9,78. Povećanje 6,5%.

**14**. Temelje za zgradu osnove dimenzije 12 m x 40 m kopa 20 radnika za 10 dana. Nakon 2 dana, zbog bolesti, napustio ih je 1 radnik. Investitor je tada odlučio da zgradu produži za još jedan metar (nove dimenzije su 12 m x 41 m). Za koliko će vremena preostali radnici iskopati novi temelj?

**15**. Temelje za zgradu osnove dimenzije 11 m x 20 m kopa 11 radnika za 10 dana. Nakon 3 dana, zbog bolesti, napustilo ih je 2 radnika. Investitor je tada odlučio da zgradu produži za još jedan metar (nove dimenzije su 12 m x 20 m). Za koliko će vremena preostali radnici iskopati novi temelj?

**16**. Zgradu dimenzija 10 m x 30 m x 20 m gradi 28 radnika za 15 dana. Nakon dva dana pridružio im se 1 radnik. Za koliko će vremena radnici završiti zgradu? Za koliko se u procentima povećao/smanjio broj dana u odnosu na prvobitno planirani?

**17**. Zgradu dimenzija 15 m x 35 m x 25 m gradi 35 radnika za 14 dana. Nakon tri dana pridružuju im se 2 radnika. Za koliko će vremena radnici završiti zgradu? Za koliko se u procentima povećao/smanjio broj dana u odnosu na prvobitno planirani?

**18**. Na jednoj farmi sa 45 krava ima hrane za 27 dana. Nakon 10 dana kupljeno je još 7 krava. Koliko dana će moći da se hrani ukupan broj krava. Odrediti da li će se novi broj krava hraniti duže ili kraće od predviđenog (preostalog) broja dana i izračunati za koliko procenata je to povećanje ili smanjenje.

1.3. Račun diobe

**1**. U elementarnoj nepogodi brod je pretrpio štetu od A = 11.400.000 €. Vrijednost broda je a1 = 210.600.000 €, vrijednost tereta je a2 = 16.300.000 €, prevoz je a3 = 1.100.000 €. Nastalu štetu snose brodovlasnik, vlasnik tereta i prevoznik proporcionalno navedenim vrijednostima. Koliku štetu snosi svaki od njih pojedinačno?

**Rješenje:**

Neka su $x_1, x_2, x_3$ djelovi štete koju snose navedena lica, redom. Tada je:

$x_1 = 210.600.000k$, $x_2 = 16.300.000k$, $x_3 = 1.100.000k$

tj. $x_1 + x_2 + x_3 = 228.000.000k$.

Kako je ukupna šteta 11.400.000 €, to je $228.000.000k = 11.400.000$, odnosno $k = 0,005$.

Sada je $x_1 = 0,05 \cdot 210.600.000 = 10.530.000$, $x_2 = 815.000$, $x_3 = 55.000$.

Isto bi preko produžene proporcije riješili na sljedeći način:

$x_1 : x_2 : x_3 = 210.600.000 : 16.300.000 : 1.100.000$, odakle slijedi da je:

$x_1 : x_2 = 210.600.000 : 16.300.000 \quad (= 2.106 : 163)$ i

$x_1 : x_3 = 210.600.000 : 11.300.000 \quad (= 2.106 : 11)$,

pa je $x_2 = \frac{163x_1}{2.106}$, $x_3 = \frac{11x_1}{2.106}$. Ako ove izraze uvrstimo u jednačinu

$x_1 + x_2 + x_3 = 11.400.000$, dobijamo prethodni rezultat.

**2**. Tri naselja napravila su most za 3.720.000 €. Prvo naselje udaljeno je od mosta 3 km, drugo 2 km i treće 5 km. Učešće u cijeni mosta je obrnuto proporcionalno udaljenosti naselja od mosta. Koliko je učešće svakog naselja pojedinačno?

**Rješenje:**

Ako su $x_1$, $x_2$, $x_3$ učešća tih naselja u cijeni, a kako se radi o obrnutoj proporcionalnosti, biće:

$$x_1 = \frac{k}{3},\ x_2 = \frac{k}{2},\ x_3 = \frac{k}{5}.$$

Ukupna cijena je $x_1 + x_2 + x_3 = 3.720.000$, pa je $k = 3.600.000$, odakle je $x_1 = 1.200.000$ €, $x_2 = 1.800.000$ €, $x_3 = 720.000$ €.

**3**. Višak od 621 € treba da podijele tri radnika proporcionalno svojoj godišnjoj zaradi i radnom stažu, a obrnuto proporcionalno broju dana odsustva s posla. Godišnja zarada prvog radnika je 1.600 €, radni staž 10 godina i ima 8 dana izostanka s posla. Odgovarajući podaci za drugog i trećeg radnika su: 1.800 €, 8 godina, 9 dana i 2.100 €, 3 godine, 4 dana. Kako treba raspodijeliti višak?

**Rješenje:**

Prvi radnik će dobiti: $x_1 = k \cdot 1600 \cdot \frac{10}{8}$,

drugi: $x_2 = k \cdot 1800 \cdot \frac{8}{9}$,

a treći: $x_3 = k \cdot 2100 \cdot \frac{3}{4}$.

Uzimajući u obzir još i uslov $x_1 + x_2 + x_3 = 621$ dobija se $k = 0{,}12$, odnosno: $x_1 = 0{,}12 \cdot 2.000 = 240$, $x_2 = 192$, $x_3 = 189$, što znači da će prvi radnik dobiti 240 €, drugi 192 €, a treći 189 €.

**4**. Nagradu od 2.000 € treba da podijele tri radnika proporcionalno broju godina radnog staža i broju prekovremenih sati provedenih na poslu. Prvi radnik ima 2 godine radnog staža i 6 sati prekovremenog rada, drugi 4 godine i 3 sata, a treći 6 godina i 4 sata, respektivno. Koliko će svaki od njih dobiti? Ukoliko se naredne godine nagrada poveća za 15%, koliki iznos će dobiti ovi radnici?

**Rezultat**: 500 €, 500 €, 1000 €; 575 €, 575 €, 1.150 €.

## 1.4. Račun smješe

**1**. Raspolažemo sa 6-procentnim i 20-procentnim rastvorom hlorne kiseline, a želimo da napravimo 12-procentni rastvor. U kom odnosu treba miješati postojeće rastvore? Koliko treba uzeti od svakog da bismo dobili 220 litara 12-procentnog rastvora?

**Rješenje:**

Označimo sa $x_1$ količinu prvog, a sa $x_2$ količinu drugog rastvora. Tada je

$\frac{6x_1 + 20x_2}{x_1 + x_2} = 12 \Rightarrow 6x_1 + 20x_2 = 12 \cdot (x_1 + x_2)$ tj. $6x_1 = 8x_2 \Rightarrow 3x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 : x_2 = 4:3$,

pa postojeće rastvore treba miješati u odnosu 4:3.

Konkretno, ako je $x_1 + x_2 = 220$, iz prve jednačine lako se dobija da je $x_1 = 188,57$ i $x_2 = 31,43$.

Kako je već dat odnos rastvora, ovaj dio zadatka bilo je moguće uraditi i računom diobe. Naime, iz $x_1 : x_2 = 4:3 \Rightarrow x_1 = 4k, x_2 = 3k$, pa je $4k + 3k = 220 \Rightarrow k = \frac{220}{7}$, pa se lako dobija da je $x_1 = 188,57$ i $x_2 = 31,43$.

## 1.5. Mješoviti zadaci

**1**. Konopac dužine 300 metara treba podijeliti na tri dijela tako da se krajnji djelovi odnose kao 3 : 5, a srednji dio je jednak razlici krajnjih djelova. Odrediti dužinu sva tri dijela. Takođe odrediti za koliko procenata je najkraći dio manji od najdužeg dijela.

**Rješenje:**

Označimo djelove konopca sa $x_1$, $x_2$ i $x_3$. Tada je $x_1 + x_2 + x_3 = 300$, $x_1 : x_3 = 3:5$ i $x_2 = x_3 - x_1$. Iz druge jednačine $5x_1 = 3x_3$, tj. $x_1 = \frac{3}{5}x_3$, a iz treće $x_2 = x_3 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{2}{5}x_3$.

Uvrštavajući dobijene vrijednosti u prvu jednačinu dobija se

$\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_3 + x_3 = 300 \Rightarrow 2x_3 = 300 \Rightarrow x_3 = 150$. Dalje se lako dobija da je $x_1 = 90$ i $x_2 = 60$.

Ako sa $p$ označimo procenat za koji je najkraći dio manji od najdužeg, imamo $150 - p\%150 = 30$, odakle se dobija da je $p = 60$.

Isto tako, korišćenjem formule imamo da je $p = \frac{i}{K} \cdot 100 = \frac{90}{150} \cdot 100 = 60$ .

**2**. Prodavac je nabavio 3 vrste kafe po istoj nabavnoj cijeni. Međutim, na prvu vrstu je porez 15% nabavne cijene, a marža 10% nabavne cijene, na drugu je porez 17%, a marža 8%, i na treću je porez 14%, a marža je 12%. Ako je kupljeno 5 kg prve vrste, 4 kg druge vrste i 12 kg treće vrste i to prodato za 6 € po kilogramu, kolika je nabavna cijena i kolike su prodajne cijene svake od te tri vrste kafe?

**Rješenje:**

Označimo sa $x$ nabavnu cijenu, a sa $x_1$, $x_2$ i $x_3$ prodajne cijene svake od tri vrste kafa. Tada je $x_1 = 1{,}15 \cdot 1{,}1x = 1{,}265x$, $x_2 = 1{,}17 \cdot 1{,}08x = 1{,}2636x$ i $x_3 = 1{,}14 \cdot 1{,}12x = 1{,}2768$.

Dalje je

$$\frac{1{,}265x \cdot 5 + 1{,}2636x \cdot 4 + 1{,}2768x \cdot 12}{5 + 4 + 12} = 6 \Rightarrow \frac{26{,}701x}{21} = 6 \text{, odakle je } x = 4{,}72.$$

Dakle, nabavna cijena kafe je 4,72 €, a prodajne su 5,97 €, 5,96 € i 6,03 €, tim redom.

**3**. Posuda s vodom ima masu 3.000 gr. Kada se odlije 20% vode, ostane 88% ukupne mase. Kolike su početne mase posude i vode?

**Rješenje:**

Označimo sa $x$ masu posude, a sa $y$ masu vode. Tada je $x + y = 3.000$. Nakon odlivanja 20% vode dobija se $x + 0{,}8y = 3.000 \cdot 0{,}88$, tj. $x + 0{,}8y = 2.640$. Iz prve jednačine $x = 3.000 - y$, pa nakon uvrštavanja u drugu imamo da je $3.000 - y + 0{,}8y = 2.640$. Odavde se lako dobija da je $y = 1.800$ i $x = 1.200$.

Dakle, masa posude je 1.800 grama, a vode 1.200 grama.

Zadatak se mogao jednostavnije uraditi postavljanjem jednačine $0{,}2y = 12\% \cdot 3.000$ (odliveno je 12% = 100% – 88%), odakle se dobijaju tražene vrijednosti.

**4**. U jednoj prodavnici roba je prvo poskupjela 6%, a zatim pojeftinila 4%. U drugoj prodavnici poskupjela je 11%, a potom pojeftinila 9%. U trećoj prodavnici je pojeftinila 7%, a potom poskupjela 9%. Ako krajnje cijene stoje u odnosu 3 : 7 : 5, u kom odnosu su bile na početku?

**Rješenje:**

Označimo sa $x_1, x_2$ i $x_3$ početne, a sa $y_1, y_2$ i $y_3$ krajnje cijene u svakoj od prodavnica, redom.

Tada je:

$y_1 = x_1 \cdot 1,06 \cdot 0,96 = 1,0176 \cdot x_1$,

$y_2 = x_2 \cdot 1,11 \cdot 0,91 = 1,0101 \cdot x_2$,

$y_3 = x_3 \cdot 0,93 \cdot 1,09 = 1,0137 \cdot x_3$.

Kako krajnje cijene stoje u odnosu 3: 7: 5, tj. $y_1 : y_2 : y_3 = 3 : 7 : 5$, to je za neko $k$: $y_1 = 3k$, $y_2 = 7k$ i $y_3 = 5k$, odakle je $1,0176 \cdot x_1 = 3k$, $1,0101 \cdot x_2 = 7k$ i $1,0137 \cdot x_3 = 5k$, pa je odavde $x_1 = \frac{3}{1,0176}k = 2,9481k$, $x_2 = \frac{7}{1,0101}k = 6,93k$ i $x_3 = \frac{5}{1,0137}k = 4,9324k$. Dakle, $x_1 : x_2 : x_3 = 2,9481 : 6,93 : 4,9324$.

**5**. Konopac dužine 400 metara treba podijeliti na tri dijela tako da se krajnji djelovi odnose kao 7 : 5, a srednji dio jednak je razlici krajnjih djelova. Odrediti dužinu sva tri dijela. Takođe odrediti za koliko procenata je najduži dio veći od najkraćeg dijela.
**Rezultat:** 200; 57,14; 142,86. 250%.

**6**. Konopac dužine 800 metara treba podijeliti na tri dijela tako da se krajnji djelovi odnose kao 7 : 2, a srednji dio jednak je razlici krajnjih djelova. Odrediti dužinu sva tri dijela. Takođe odrediti za koliko procenata je najduži dio veći od najkraćeg dijela.
**Rezultat**: 400; 285,72; 114,28. 250%.

**7**. Prodavac je nabavio 3 vrste vina od tri proizvođača, po istoj nabavnoj cijeni. Na prvu vrstu je porez 15%, a marža 10%, na drugu je porez 16%, a marža 9% i na treću je porez 20%, a marža 8%. Ukupno je kupljeno 1.000 litara i nakon miješanja prodato je sve za 8.500 €. Ako je kupljena ista količina prva dva vina, a trećeg 600 litara, kolika je nabavna cijena po litru svakog od vina?
**Rezultat**: 6,62 €.

**8**. Prodavac je nabavio 3 vrste kafe po istoj nabavnoj cijeni. Međutim, na prvu vrstu je porez 11% nabavne cijene, a marža 12% nabavne cijene, na drugu je porez 18%, a marža 7%, i na treću je porez 15%, a marža je 13%. Ako je kupljeno 4 kg prve vrste, 3 kg druge vrste i 6 kg treće vrste i to prodato za 8 € po kilogramu, kolika je nabavna cijena i kolike su prodajne cijene svake od te tri vrste kafe?
**Rezultat**: Nabavna cijena: 6,28 €. Prodajne cijene: 7,81 €; 7,93 €; 7,8 €.

**9**. Osoba ima na bankovnom računu i u kešu 2.000 eura. Nakon što je potrošila keš, ostalo joj je 80% od ukupnih novčanih sredstava. Koliko je, na početku, osoba imala novca na računu, a koliko u kešu?
**Rezultat**: 1.600 €, 400 €.

**10**. Jedna sedmina robe prodata je sa zaradom 4%, dvije sedmine sa zaradom 6% i tri sedmine sa zaradom 7%. Ostatak robe, uz gubitak od 4%, prodat je za 30.000 €. Kolike su nabavne i prodajne cijene djelova i cijele robe i koliko procenata ukupne prodajne vrijednosti iznosi ukupna zarada ako se pojedinačne zarade i gubici računaju od nabavne vrijednosti?

**11**. Jedna sedmina robe prodata je sa zaradom 5%, dvije sedmine sa zaradom 7% i tri sedmine sa zaradom 6%. Ostatak robe je, uz gubitak od 3%, prodat za 35.000 €. Kolike su nabavne i prodajne cijene djelova i cijele robe i koliko procenata ukupne prodajne vrijednosti iznosi ukupna zarada ako se pojedinačne zarade i gubici računaju od nabavne vrijednosti?

**12**. Dvije grupe radnika zaradile su 10.080 €. Radnici prve grupe zaradili su prosječno po 320 €, a druge grupe po 350 €. Prosječna zarada po svakom radniku je 336 €. Koliko radnika je bilo u prvoj, a koliko u drugoj grupi?

**13**. Dvije grupe fudbalera dale su ukupno 2.600 golova. Članovi prve grupe dali su prosječno po 12, a druge grupe po 25 golova. Prosječan broj golova po svakom fudbaleru je 20. Koliko fudbalera ima u prvoj, a koliko u drugoj grupi?

**14**. Dva kompleta knjiga koštala su 180 €. Knjige prvog kompleta koštale su prosječno po 5 €, a drugog kompleta po 8 €. Prosječna cijena po svakoj knjizi je 6 €. Koliko knjiga je u prvom, a koliko u drugom kompletu?

**15**. Dvije grupe radnika proizvele su 336 proizvoda. Članovi prve grupe proizveli su prosječno po 30, a druge grupe po 2 proizvoda. Prosječan broj proizvoda po svakom radniku je 12. Koliko je radnika u prvoj, a koliko u drugoj grupi?

**16**. U jednoj prodavnici roba je prvo poskupjela 5%, a zatim pojeftinila 7%. U drugoj prodavnici poskupjela je 8%, a potom pojeftinila 9%. U trećoj prodavnici pojeftinila je 6%, a potom poskupjela 7% Ako krajnje cijene stoje u odnosu 3 : 4 : 5, u kom odnosu su bile na početku?

## 2. Prost i složen interesni račun. Kratkoročne obveznice

**1**. a) Ako je kod složene kapitalizacije kamatna stopa 1% mjesečno u toku prvog kvartala, 2% mjesečno za drugi, 3% mjesečno za treći i 4% mjesečno u toku četvrtog kvartala, kolika je konstantna kvartalna stopa *p* obračunata za ta 4 kvartala?

b) Izračunati zbirnu neto sadašnju vrijednost novčanih tokova $c_1$= -500, $c_2$= 600, ako su forverd stope za prvi period 4%, a za drugi period 5,5%. Koliko ona iznosi ako je 5,5% spot stopa za 2 perioda? Pokazati da je tada forverd stopa za drugi period 7,02%.

**Napomena**: Spot stopa, u oznaci $i_n^S$, za period dužine *n* je prosječna godišnja stopa za koju važi $\left(1+i_n^s\right)^n=\left(1+i_{n-1}^s\right)^{n-1}\cdot\left(1+i_n^F\right)$, gdje je $i_n^F$ forverd stopa koja se primjenjuje u toku posljednje godine, a $i_1^s=i_1^F$ (po definiciji, spot i forverd stope za prvu godinu su iste).

**Rješenje**:

a) Označimo sa $q_1=1,01; q_1=1,02; q_1=1,03$ i $q_1=1,04$ mjesečne faktore akumulacije u toku prvog, drugog, trećeg i četvrtog kvartala, redom. Ako sa *p* označimo traženu konstantnu kamatnu stopu, tada je, svodeći sve na kraj godine (*t* = 1):

$$K_1=K\cdot q_1^3\cdot q_2^3\cdot q_3^3\cdot q_4^3=K\left(1+\frac{p}{100}\right)^4,\ \text{odakle je}\ \left(1+\frac{p}{100}\right)^4=(1,01\cdot1,02\cdot1,03\cdot1,04)^3,$$

tj.

$$1+\frac{p}{100}=\sqrt[4]{1,343929}\Rightarrow p=7,67 \text{ (zaokruženo na dvije decimale).}$$

b) $$SV_1=-\frac{500}{1,04}+\frac{600}{1,04\cdot1,055}=66,08.$$

$$SV_2=-\frac{500}{1,04}+\frac{600}{1,055^2}=58,3.$$

Na osnovu definicije, lako se pokazuje da je forverd stopa za drugi period 7,02%.

**2**. Neki kapital je učetvorostručio svoju vrijednost nakon 15 godina ukamaćivanja, uz mjesečni obračun, složeno kapitalisanje i konformnu kamatnu stopu. Koliku godišnju kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos uz primjenu prostog interesnog računa i relativnu kamatnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu.

**Rješenje**:

Označimo sa $K$ početni kapital. Tada je, uz mjesečni obračun, složeno kapitalisanje i konformnu kamatnu stopu $K_{15} = 4K$.

Ako je $p$ primijenjena godišnja stopa, tada je $q = 1 + \frac{p}{100}$ godišnji faktor akumulacije, a $q_1 = \sqrt[12]{q}$ odgovarajući mjesečni faktor akumulacije, pa je

$K_{15} = K \cdot q_1^{180} = 4K \Rightarrow q_1^{180} = 4 \Rightarrow q_1^{180} = \sqrt[180]{4} \Rightarrow q_1 = 1,00773 \Rightarrow q = 1,09682$, što znači da je $p$ = 9,68. Kako se nije tražila mjesečna stopa, zadatak je bilo moguće uraditi znajući da je $q = q_1^{12}$, jer iz $\mathrm{q}^{15} = 4 \Rightarrow \mathrm{q} = 1,09682$.

Ako sa $p_1$ označimo godišnju stopu, čijom primjenom će se uz prosti interesni račun i relativnu kamatnu stopu dobiti isti iznos, tada je:

$$K_{15} = K\left(1 + \frac{\frac{p_1}{12} \cdot 180}{100}\right) = 4K \Rightarrow 1 + \frac{p_1 \cdot 15}{100} = 4 \Rightarrow p_1 = 20.$$

Dakle, uz prosti interesni račun i relativnu kamatnu stopu, potrebna je veća stopa. Neka ona iznosi $r$%. Tada je $9,68 + \frac{r}{100} 9,68 = 20$, odakle je $r$ = 106,61. Znači, veća je za 106,61%. Do istog rješenja brže se dolazi formulom $p = \frac{i}{K} \cdot 100 = \frac{10,32}{9,68} \cdot 100 = 106,61$.

**3**. Neki kapital je uložen uz primjenu prostog interesnog računa i relativnu kamatnu stopu i ukamaćivan je 9 godina i 7 mjeseci. Obračun je za prvih 9 godina bio godišnji, a za preostalih 7 mjeseci mjesečni. Ako na kraju na računu ima 10.000 €, a uloženo je 6.000 €, kolika je godišnja kamatna stopa?

**Rješenje**:

Označimo sa $t$ = 9/7 vremenski trenutak nakon 9 godina i 7 mjeseci. Tada je

$$K_{9/7} = 6.000 \cdot \left(1 + \frac{9p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot \frac{p}{12}}{100}\right) = 10.000 \Rightarrow 6 \cdot \left(1 + \frac{9p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot \frac{p}{12}}{100}\right) = 10,$$

tj. $(1 + 0,09p) \cdot (6 + 0,035p) = 10$, a odavde se, nakon sređivanja, dobija kvadratna jednačina $0,00315p^2 + 0,575p - 4 = 0$, odakle se dobijaju dva rješenja $p_1 = 6,68$ i $p_2 = -170,97$. Kako kamatna stopa mora biti pozitivna, ona iznosi 6,68 (a procenat 6,68%).

**4**. Osoba posjeduje dvije mjenice nominalnih vrijednosti 4.000 € i 6.000 €, koje dospijevaju kroz 32 i 45 dana, tim redom. Prva banka ne naplaćuje proviziju za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 5.000 €, a inače naplaćuje proviziju od 1‰ od nominalne vrijednosti. Uvijek naplaćuje manipulativne troškove 20 € po mjenici. Eskontna stopa je 5%, a eskont racionalni. Druga banka naplaćuje proviziju za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 5.000 € od 1% od eskontovane vrijednosti, a za veće naplaćuje proviziju od 1,1‰ od eskontovane vrijednosti. Uvijek naplaćuje manipulativne troškove 15 € po mjenici. Eskontna stopa je 5,5%, a eskont komercijalni. Na koji način će osoba prodati mjenice?

**Rješenje**:

Treba ispitati za svaku od mjenica koja banka će je povoljnije otkupiti. Označimo sa $x_1$ iznos koji bi prva banka platila za prvu mjenicu, a sa $x_2$ iznos koji bi prva banka platila za drugu mjenicu. Sa $y_1$ označimo iznos koji bi druga banka platila za prvu mjenicu, a sa $y_2$ iznos koji bi druga banka platila za drugu mjenicu.

Provjerimo koja je bolja opcija za prodaju prve mjenice.

Kod prve banke za ovu mjenicu nema provizije, pa će osoba za nju dobiti eskontovanu vrijednost umanjenu za manipulativne troškove. Kako je eskont racionalni, to je

$K_0 = \dfrac{4.000}{1 + \dfrac{5 \cdot 32}{36.000}} = 3.982,30$. Odbijanjem troškova (20 €) dobija se $x_1 = 3.962,30$.

Kod druge banke, uz komercijalni eskont, dobija se:

$$y_1 = K_0 - 1‰ K_0 - 15 = 4.000 \cdot \left(1 - \frac{5,5 \cdot 32}{36.000}\right) - 1‰ \cdot 4.000 \cdot \left(1 - \frac{5,5 \cdot 32}{36.000}\right) - 15 = 3.925,64.$$

Dakle, prvu mjenicu će prodati prvoj banci i dobiće 3.962,30 € (što je veće od 3.925,64 €). Sada provjerimo koja je opcija bolja za prodaju druge mjenice.
Kod prve banke provizija za ovu mjenicu je 1‰ od nominalne vrijednosti, pa će prva banka za drugu mjenicu platiti:

$$x_2 = K_0 - 1‰ \cdot 6.000 - 20 = \frac{6.000}{1+\frac{5\cdot 45}{36.000}} - 1‰ \cdot 6.000 - 20 = 5.936,73\,.$$

Kod druge banke će dobiti:

$$y_2 = K_0 - 1{,}1‰ K_0 - 15 = 6.000\cdot\left(1-\frac{5{,}5\cdot 45}{36.000}\right) - 1{,}1‰\cdot 6.000\cdot\left(1-\frac{5{,}5\cdot 45}{36.000}\right) - 15, \text{ tj. } 5.937{,}20.$$

Kako je $y_2 > x_2$, to je drugu mjenicu isplativije prodati drugoj banci, po (većoj) cijeni (5.937,20 €). Uzgred, od prodaje će ukupno dobiti 3.962,30 € + 5.937,20 € = 9.899,50 €.

**5**. Dvije mjenice čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 4 : 5, a koje su naplative kroz 5 i 7 mjeseci, treba zamijeniti s druge dvije mjenice čije su nominalne vrijednosti 5.000 € i 6.000 €, a koje su naplative kroz 6 i 8 mjeseci. Naći sve nominalne i eskontovane vrijednosti, ako je eskontna stopa 6%, uz komercijalni eskont.
**Rješenje**:

Kako je $K_{n1} : K_{n2} = 4:5$, to postoji $k$ tako da je $K_{n1} = 4k$ i $K_{n2} = 5k$.
Budući da se radi o konverziji mjenica, zbir eskontovanih vrijednosti ove dvije mjenice mora biti isti kao i zbir eskontovanih vrijednosti druge dvije mjenice, pa jednačina vrijednosti (za $t = 0$) glasi:

$$K_{n1}\left(1-\frac{6\cdot 5}{1.200}\right) + K_{n2}\left(1-\frac{6\cdot 7}{1.200}\right) = 5.000\left(1-\frac{6\cdot 6}{1.200}\right) + 6.000\left(1-\frac{6\cdot 8}{1.200}\right), \text{ tj.}$$

$3{,}9k + 4{,}825k = 10.610 \Rightarrow k = 1216{,}05$, a odavde je $K_{n1} = 4.864{,}18$ i $K_{n2} = 6.080{,}23$.
Nalaženje eskontovanih vrijednosti prepuštamo čitaocu.

**6**. Dvije mjenice jednakih nominalnih vrijednosti $A$, naplative kroz 2 mjeseca i 5 mjeseci, treba zamijeniti s druge dvije mjenice čije su nominalne vrijednosti u odnosu $m:n$, a koje su naplative kroz 4 mjeseca i 6 mjeseci. Naći sve nominalne i eskontovane vrijednosti (u terminima $A$, $m$ i $n$), ako je eskontna stopa 6%, uz komercijalni eskont.
**Rješenje**:

Neka su $K_{01}$ i $K_{02}$ eskontovane vrijednosti mjenica naplativih kroz 2 mjeseca i 5 mjeseci redom. Po uslovu zadatka važi:

$$K_{01}=A\left(1-\frac{2\cdot 6}{1.200}\right)=0,99A \text{ i } K_{02}=A\left(1-\frac{5\cdot 6}{1.200}\right)=0,975A.$$

Neka je $K_{03}$ eskontovana vrijednost mjenice naplative kroz 4 mjeseca, a $K_{n3}$ nominalna vrijednost te mjenice. Tada važi:

$$K_{03}=K_{n3}\left(1-\frac{4\cdot 6}{1.200}\right)=0,98K_{n3}.$$

Slično, ako sa $K_{04}$ označimo eskontovanu vrijednost mjenice naplative kroz 6 mjeseci, a sa $K_{n4}$ nominalnu vrijednost te mjenice, onda važi $K_{04}=K_{n4}\left(1-\frac{6\cdot 6}{1.200}\right)=0,97K_{n4}$.

Kako je, po uslovu zadatka, $K_{n3}:K_{n4}=m:n,$ to je $K_3=K_{n4}\cdot\frac{m}{n}$.

Da bi se prvi par mjenica mogao zamijeniti drugim, zbir eskontovanih vrijednosti prve i druge mjenice mora biti jednak zbiru eskontovanih vrijednosti treće i četvrte mjenice: $K_{01}+K_{02}=K_{03}+K_{04}$.

Posljednju relaciju možemo zapisati na sljedeći način:

$$0,99A+0,975A=0,98K_{n3}+0,97K_{n4}\Rightarrow 1,965A=0,98\cdot K_{n4}\cdot\frac{m}{n}+0,97K_{n4}\Rightarrow$$

$$1.965A=K_{n4}\left(0,98\cdot\frac{m}{n}+0,97\right), \text{ a odavde je } K_{n4}=\frac{1,965A}{0,98\cdot\frac{m}{n}+0,97},$$

$$\text{pa je } K_{04}=0,97\cdot K_{n4}=0,97\cdot\frac{1,965A}{0,98\cdot\frac{m}{n}+0,97},$$

$$K_{n3}=K_{n4}\cdot\frac{m}{n}=\frac{1,965A}{0,98\cdot\frac{m}{n}+0.97}\cdot\frac{m}{n}=\frac{1,965A}{0,98+0,97\frac{n}{m}} \text{ i}$$

$$K_{03}=0,98K_{n3}=0,98\cdot\frac{1,965A}{0,98+0,97\frac{n}{m}}.$$

**7**. Banka kupuje dvije mjenice. Zbir nominalnih vrijednosti mjenica je 33.000 €, a nominalna vrijednost manje od dvije mjenice jednaka je nominalnoj vrijednosti veće mjenice umanjenoj za 35%. Rokovi dospijeća su 36 dana za mjenicu s manjom nominalnom vrijednošću i 45 dana za mjenicu s većom nominalnom vrijednošću. Banka je koristila komercijalni eskont i istu eskontnu stopu za obje mjenice, i naplatila je proviziju po 2‰ od nominalnih vrijednosti po mjenici. Ako je banka za mjenicu s manjom nominalnom vrijednošću platila 12.909 €, kolika je eskontna stopa, a koliko je banka platila za drugu mjenicu?

**Rješenje**:

Neka su $K_{n1}$ i $K_{n2}$ nominalne vrijednosti manje i veće mjenice, redom. Po uslovu zadatka je $K_{n1}+K_{n2}=33.000$.

Takođe, nominalna vrijednost manje mjenice predstavlja 65% nominalne vrijednosti veće mjenice, pa je $K_{n1}=0,65\cdot K_{n2}$.

Kombinujući posljednje dvije relacije dobijamo:

$0,65\cdot K_{n2}+K_{n2}=33.000 \Rightarrow 1,65\cdot K_{n2}=33.000 \Rightarrow K_{n2}=\dfrac{33.000}{1.65}=20.000$, odakle je

$K_{n1}=0,65\cdot K_{n2}=0,65\cdot 20.000=13.000$.

Ako sa $K_{01}$ i $K_{02}$ označimo odgovarajuće eskontovane vrijednosti, onda važi:

$K_{01}=K_{n1}\left(1-\dfrac{36p}{36.000}\right)=13.000\left(1-\dfrac{p}{1.000}\right)$ i $K_{02}=K_{n2}\left(1-\dfrac{45p}{36.000}\right)=20.000\left(1-\dfrac{p}{800}\right)$.

Banka je, nakon uzimanja provizije od 2‰ od vrijednosti $K_1$ za mjenicu s manjom nominalom vrijednošću platila 12.909 €, pa je $K_{01}-0.002\cdot K_1=12.909$. Uvrštavajući prethodno dobijeni izraz za $K_{01}$ i izračunatu vrijednost za $K_1$ u posljednju relaciju dobija se:

$13.000\left(1-\dfrac{p}{1.000}\right)-0,002\cdot 13.000=12.909 \Rightarrow 13.000-13p-26=12.909$, tj.

$12.974-13p=12.909$, odakle je $13p=65$, odnosno $p=5$.

Dakle, banka je koristila eskontnu stopu od 5%, što znači da je za drugu mjenicu platila $K_{02}-0.002\cdot K_{n2}$, pa se, nakon računa, dobija:

$K_{02}-0,002\cdot K_{n2}=20.000\left(1-\dfrac{5}{800}\right)-0,002\cdot 2.000=19.835$ €.

**8**. Tri mjenice s nominalnim vrijednostima *A*, *B* i *C*, i rokovima dospijeća od *a*, *b* i *c* dana, zamjenjuju se jednom mjenicom nominalne vrijednosti *A*+*B*+*C*. Poslije koliko dana *n* ističe ta mjenica, uz komercijalni eskont?

**Rješenje**:

Kako se radi o konverziji mjenica, eskontovana vrijednost zbirne mjenice mora biti jednaka zbiru eskontovanih vrijednosti prve tri mjenice:

$$A\cdot\left(1-\frac{ap}{36.000}\right)+B\cdot\left(1-\frac{bp}{36.000}\right)+C\cdot\left(1-\frac{cp}{36.000}\right)=(A+B+C)\cdot\left(1-\frac{np}{36.000}\right)\Rightarrow$$

$$A-\frac{ap}{36.000}\cdot A+B-\frac{bp}{36.000}\cdot B+C-\frac{cp}{36.000}\cdot C=$$

$$A+B+C-\frac{np}{36.000}\cdot A-\frac{np}{36.000}\cdot B-\frac{np}{36.000}\cdot C\Rightarrow$$

$$\frac{ap}{36.000}\cdot A+\frac{bp}{36.000}\cdot B+\frac{cp}{36.000}\cdot C=\frac{np}{36.000}\cdot A+\frac{np}{36.000}\cdot B+\frac{np}{36.000}\cdot C\Rightarrow$$

$$aA+bB+cC=nA+nB+nC\Rightarrow n=\frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C}.$$

Primijetimo da je u pitanju ponderisana aritmetička sredina, gdje su novčani iznosi količine, a vrijeme predstavlja kvalitet.

**9**. Banka kupuje dvije kratkoročne državne obveznice uz komercijalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 2 : 6, a zbir nominalnih vrijednosti je 8.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 60 dana, uz stopu diskonta 8%, a druge je 90 dana. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu, ako je poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV platila 7.600 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa prinosa koja odgovara dobijenoj stopi diskonta manja od 28%?

**Rješenje**:

Termin stopa diskonta odgovara komercijalnom eskontu, a stopa prinosa racionalnom eskontu.

Iz $K_{n1} : K_{n2} = 2 : 6 \Rightarrow K_{n1} = 2k$ i $K_{n2} = 6k$, pa kako je $K_{n1} + K_{n2} = 8.000 \Rightarrow 2k + 6k = 8.000 \Rightarrow 8k = 8.000 \Rightarrow k=1.000$, dobija se $K_{n1} = 2.000$ i $K_{n2} = 6.000$.

Sada je $K_{n1}\left(1-\frac{60\cdot 8}{36.000}\right)+K_{n2}\left(1-\frac{90\cdot p}{36.000}\right)-P=7.600$, gdje je $P$ provizija.

Kako banka naplaćuje proviziju od 1‰ na nominalne vrijednosti obveznica, to je $P$ = 2.000·1‰+6.000·1‰ = 8, pa je

$$2.000\cdot\left(1-\frac{60\cdot 8}{36.000}\right)+6.000\cdot\left(1-\frac{90\cdot p}{36.000}\right)-8=7.600,$$ tj.

$$6.000\cdot\left(1-\frac{90\cdot p}{36.000}\right)=5.634,67\Rightarrow 1-\frac{90\cdot p}{36.000}=0,93911$$, odakle se dobija $p = 24{,}36$.

Ekvivalentna godišnja stopa prinosa, koja odgovara dobijenoj stopi diskonta, jeste $p_d=\frac{100p_a}{100-p_a}=\frac{2.436}{75,64}=32,2$, pa nije manja od 28.

**10**. Banka A ima kod Centralne banke, s dospijećem 21.8, tri mjenice od 1.700 €, 5.200 € i 4.400 €. Da bi namirila dug, na taj dan banka A ustupa dvije nove mjenice od 4.300 € i 5.100 €, koje dospijevaju za 53 dana i 77 dana, dodajući u gotovini koliko treba. Koliko je banka A platila u gotovini Centralnoj banci ako se za prvu mjenicu primjenjuje komercijalni, a za drugu racionalni eskont, uz stopu 6% u oba slučaja, a ukupni troškovi za obje mjenice iznose 20 €?

**Rezultat**: 2.002,6 €.

**11**. a) Neki kapital je utrostručio svoju vrijednost nakon 14 godina ukamaćivanja, uz kvartalni obračun, proste kamate i relativnu kamatnu stopu. Koliku kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos uz primjenu složenog interesnog računa i konformnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu.

b) Ako je kod složene kapitalizacije kamatna stopa 1% mjesečno u toku prvog polugođa, 2% mjesečno za drugo polugođe, 3% za treće i 4% za četvrto polugođe, kolika je konstantna polugodišnja stopa $p$ obračunata za ta četiri polugođa?

**Rezultat**: a) Veća za 75,07%.

b) 15,93%.

**12**. Neki kapital utrostručio je svoju vrijednost nakon 12 godina ukamaćivanja, uz mjesečni obračun, proste kamate i relativnu kamatnu stopu. Koliku kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos, uz primjenu složenog interesnog računa i konformnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu.

**Rezultat**: 16,67%, 9,59%. Veća za 73,83%.

**13**. Neki kapital je uložen uz primjenu prostog interesnog računa i relativne kamatne stope i ukamaćivan je 11 godina i 9 mjeseci. Obračun za prvih 11 godina bio je

godišnji, a za preostalih 9 mjeseci mjesečni. Ako je na kraju na računu 15.000 €, a uloženo je 9.000 €, kolika je godišnja kamatna stopa?
**Rezultat**: 5,45%.

**14**. Neki kapital je učetvorostručio svoju vrijednost nakon 13 godina ukamaćivanja, uz kvartalni obračun, složeno kapitalisanje i konformnu kamatnu stopu. Koliku kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos uz primjenu prostog interesnog računa i relativnu kamatnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu
**Rezultat**: 11,25%, 23,08%. Veća za 105,13%.

**15**. Dvije mjenice čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 7 : 5, a koje su naplative kroz 6 i 9 mjeseci, treba zamijeniti s druge dvije čije su nominalne vrijednosti 6.000 € i 8.000 €, a koje su naplative kroz 7 i 11 mjeseci. Naći sve nominalne i eskontovane vrijednosti ako je eskontna stopa 7%.
**Rezultat**: Nominalne: 8.065,4 €; 5.761,0 €; 6.000 €; 8.000 €; Eskontovane: 7.783,12 €; 5.458,55 €; 5.755 €; 7.486,67 €.

**16**. Neki kapital je učetvorostručio svoju vrijednost nakon 15 godina ukamaćivanja, uz mjesečni obračun, složeno kapitalisanje i konformnu kamatnu stopu. Koliku kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos uz primjenu prostog interesnog računa i relativnu kamatnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu.
**Rezultat**: 9,68%; 20%. Veća za 106,6%.

**17**. Osoba posjeduje mjenicu nominalne vrijednosti 5.000 €, naplativu kroz 5 mjeseci. Jedna banka zaračunava proviziju od 1‰ od nominalne vrijednosti i eskontnu stopu od 6%. Druga banka zaračunava proviziju 0,8‰ od eskontovane vrijednosti, kao i manipulativne troškove od 10 €, ali je eskontna stopa 5%. Koju će banku odabrati?
**Rezultat**: Izabraće drugu banku (4.870 < 4.881,92).

**18**. Osoba posjeduje mjenicu nominalne vrijednosti 7.000 €, naplativu kroz 7 mjeseci. Jedna banka zaračunava proviziju od 1,5‰ od eskontovane vrijednosti i eskontnu

stopu od 6%. Druga banka zaračunava proviziju 1‰ od nominalne vrijednosti, kao i manipulativne troškove od 5 €, ali je eskontna stopa 5,5%. Koju će banku odabrati?
**Rezultat**: Izabraće drugu banku (6.744,87 < 6.783,83).

**19**. Osoba posjeduje 2 mjenice koje su naplative kroz 5 i 7 mjeseci, takve da je nominalna vrijednost prve 7.000 €, a druge 5.000 €. Banka X zaračunava eskontnu stopu 5% od nominalne vrijednosti i uzima proviziju od 2‰ od nominalne vrijednosti, kao i manipulativne troškove od 13 €. Banka Y zaračunava eskontnu stopu 6% od nominalne vrijednosti. Za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 6.000 € ne uzima proviziju, dok je za ostale provizija 1,5‰ od nominalne vrijednosti. Koliko novca će dobiti prodajom (može da ih prodaje na bilo koji način – obje jednoj banci ili jednu jednoj, a drugu drugoj).
**Rezultat**: Banka X: 6.827,17 €; 4.801,17 €. Banka Y: 6.814,5 €; 4.825 €.
Dobiće 6.827,17 € + 4.825 € = 11.652,17 €.

**20**. Mjenicu od 10.000 €, naplativu kroz dva mjeseca i 17 dana, treba zamijeniti s dvije nove mjenice kod kojih nominalne vrijednosti stoje u odnosu 4 : 6 i rokovi dospijeća su 4 i 7 mjeseci, respektivno. Eskontna stopa je 6%. Odrediti nominalne vrijednosti novih mjenica. Primijeniti komercijalni eskont.
**Rezultat**: 4.066,6 €; 6099,9 €.

**21**. Neki kapital je utrostručio svoju vrijednost nakon 14 godina ukamaćivanja, uz kvartalni obračun, proste kamate i relativnu kamatnu stopu. Koliku kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos uz primjenu složenog interesnog računa i konformnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu.
**Rezultat**: 1,29%; 8,16%. Veća za 75,12%.

**22**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice čije nominalne vrijednosti stoje u razmjeri 7 : 3, a zbir nominalnih vrijednosti je 10.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 115 dana, uz stopu prinosa 7%, a druge 130 dana. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu ako je poslije uzimanja provizije 2‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV platila 9.300 €? Primijeniti racionalni eskont za prvu, a komercijalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta i stope prinosa?
**Rezultat**: Stope prinosa su 7% i 50,5%. Stope diskonta su 6,54% i 47,6%.

**23**. Lice uz racionalni eskont prodaje 2 mjenice nominalnih vrijednosti 11.000 € i 9.000 €, koje dospijevaju kroz 7 mjeseci i kroz 169 dana redom. Banka A primjenjuje stopu prinosa od 6% za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 10.000 €, a za ostale 4%. Provizija za svaku mjenicu je 5‰. Banka B za sve mjenice primjenjuje stopu prinosa od 5,5%, a provizija za mjenice nominalne vrijednosti manje od 10.000 € je 7 €, a za ostale 4‰. Obje banke provizije računaju od nominalne vrijednosti. Na koji način će to lice prodati mjenice i koliko novca će dobiti?
**Rezultat**: AI = 10.694,19 €, AII = 8.708,44 €, BI = 10.614,05, BII = 8.766,47 €. Dakle, za prvu mjenicu odabraće banku A, a za drugu banku B i dobiće 10.694,19 € + 8.766,47 € = 19.460,66 €.

**24**. Banka A ima kod Centralne banke, s dospijećem 20. 6, tri mjenice od 1.000 €, 5.400 € i 4.000 €. Da bi namirila dug, na taj dan banka A ustupa dvije nove mjenice od 3.300 € i 4.200 €, koje dospijevaju za 63 dana i 58 dana, dodajući u gotovini koliko treba. Koliko je platila u gotovini Centralnoj banci ako se za prvu mjenicu primjenjuje komercijalni, a za drugu racionalni eskont uz stopu 7% u oba slučaja, a ukupni troškovi za obje mjenice iznose 10 €?
**Rezultat**: 2.997,23 €.

**25**. Banka kupuje 12. 3. mjenicu koja glasi na 5.000 € sa dospijećem 17. 7. Koliku je eskontnu stopu primijenila ukoliko je, poslije uzimanja provizije od 1‰ od nominalne vrijednosti mjenice i manipulativnih troškova od 5 €, banka platila 4.280 €? Primijeniti komercijalni eskont.
**Rezultat**: 40,25%.

**26**. Banka kupuje 23. 3. mjenicu koja glasi na 4.000 € s dospijećem 28. 6. Koliku je eskontnu stopu primijenila ukoliko je, poslije uzimanja provizije od 2‰ od nominalne vrijednosti mjenice i manipulativnih troškova od 6 €, banka platila 3.720 €? Primijeniti komercijalni eskont.
**Rezultat**: 24,68%.

**27**. Banka kupuje dvije kratkoročne državne obveznice uz racionalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 1 : 5, a zbir nominalnih vrijednosti je 12.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 50 dana, uz stopu prinosa 8%, a druge je 90 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja

provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 11.963 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa diskonta koja odgovara dobijenoj stopi prinosa manja od 10%?
**Rezultat**: 13,73%. Ekvivalentna stopa diskonta je 12,08% > 10%.

**28**. Banka kupuje dvije kratkoročne državne obveznice uz racionalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 2 : 5, a zbir nominalnih vrijednosti je 14.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 75 dana, uz stopu prinosa 7%, a druge je 80 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 13.200 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa diskonta koja odgovara dobijenoj stopi prinosa manja od 27%?
**Rezultat**: 35,36%. Ekvivalentna stopa diskonta je 26,12% < 27%.

**29**. Banka kupuje 17. 7. dvije kratkoročne obveznice. Prva je, uz eskontnu stopu 8%, nominalne vrijednosti 3.000 € i rokom dospijeća 5. 10, a druga s rokom dospijeća 25. 10. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti, za obje HOV platila 6.800 €? Nominalne vrijednosti prve i druge HOV stoje u razmjeri 3 : 4. Primijeniti komercijalni eskont za prvu, a racionalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta.
**Rezultat**: 13,02; 11,52 > 8.

**30**. Banka kupuje dvije kratkoročne državne obveznice uz komercijalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 3 : 5, a zbir nominalnih vrijednosti je 16.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 80 dana, uz eskontnu stopu 7%, a druge je 100 dana. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 15.400 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa prinosa koja odgovara dobijenoj stopi diskonta manja od 19%?

**31**. Osoba posjeduje dvije mjenice nominalnih vrijednosti 3.000 € i 7.000 €, koje dospijevaju kroz 46 i 15 dana, tim redom. Prva banka ne naplaćuje proviziju za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 5.000 €, a za veće naplaćuje proviziju od 1‰ od nominalne vrijednosti. Uvijek naplaćuje manipulativne troškove od 20 € po mjenici. Eskontna stopa je 5%, a eskont racionalni. Druga banka naplaćuje proviziju za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 5.000 € od 2% od eskontovane vrijednosti, a za veće naplaćuje proviziju od 1,3‰ od eskontovane vrijednosti. Uvijek naplaćuje manipulativne troškove od 10 € po mjenici. Eskontna stopa je 6,5%, a eskont komercijalni. Na koji način će osoba prodati mjenice?

**32**. Tri mjenice s nominalnim vrijednostima 4.000 €, 4.200 € i 1.000 €, i rokovima dospijeća $a$, $b$ i $c$ dana, zamjenjuju se jednom mjenicom nominalne vrijednosti 9.200 €. Poslije koliko dana ističe ta mjenica, uz komercijalni eskont?

**33**. Tri mjenice s nominalnim vrijednostima 3.000 €, 3.600 € i 1.400 €, i rokovima dospijeća $m$, $n$ i $p$ dana, zamjenjuju se jednom mjenicom nominalne vrijednosti 8.000 €. Poslije koliko dana ističe ta mjenica, uz komercijalni eskont?

**34**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice čije nominalne vrijednosti stoje u razmjeri 4 : 5, a zbir nominalnih vrijednosti je 9.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 68 dana, uz stopu prinosa 9%, a druge 75 dana. Koliku eskontnu stopu je primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 2‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 8.600 €? Primijeniti racionalni eskont za prvu, a komercijalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta i stope prinosa.

**35**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice čije nominalne vrijednosti stoje u razmjeri 5 : 3, a zbir nominalnih vrijednosti je 8.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 108 dana, uz stopu prinosa 7%, a druge 130 dana. Koliku je eskontnu stopu primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 2‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 7.300 €? Primijeniti racionalni eskont za prvu, a komercijalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta i stope prinosa.

**36**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 3 : 4, a zbir nominalnih vrijednosti je 7.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 80 dana, uz eskontnu stopu 8%, a druge je 100 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 6.800 €? Primijeniti komercijalni eskont za prvu, a racionalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta.

**37**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 4 : 3, a zbir nominalnih vrijednosti je 7.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 74 dana, uz eskontnu stopu 6%, a druge je 100 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 6.300 €? Primijeniti komercijalni eskont za prvu, a racionalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta.

**38**. Tri mjenice s nominalnim vrijednostima E, F i G, i rokovima dospijeća od *e*, *f* i *g* dana, mijenjaju se jednom mjenicom nominalne vrijednosti E + F + G. Poslije koliko dana *d* ističe ta mjenica, uz komercijalni eskont?

**39**. Neki kapital učetvorostručio je svoju vrijednost nakon 13 godina ukamaćivanja, uz kvartalni obračun, složeno kapitalisanje i konformnu kamatnu stopu. Koliku kamatnu stopu treba primijeniti da bi se dobio isti iznos uz primjenu prostog interesnog računa i relativnu kamatnu stopu? Odrediti za koliko je procenata godišnja stopa (po prostom računu) veća/manja od odgovarajuće godišnje kamatne stope po složenom interesnom računu.

**40**. Banka kupuje 23. 3. mjenicu koja glasi na 4.000 € sa dospijećem 28. 6. Koliku je eskontnu stopu banka primijenila ukoliko je, poslije uzimanja provizije od 2‰ od nominalne vrijednosti mjenice i manipulativnih troškova od 6 €, platila 3.720 €? Primijeniti racionalni eskont.

**41**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice državnih agencija uz komercijalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 2 : 4, a zbir nominalnih vrijednosti je 12.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 40 dana, uz stopu diskonta 5%, a druge je 65 dana. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 10.900 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa prinosa koja odgovara dobijenoj stopi diskonta veća od 17%?

**42**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice državnih agencija uz komercijalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 2 : 3, a zbir nominalnih vrijednosti je 15.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 35 dana, uz eskontnu stopu 7%, a druge je 50 dana. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 14.000 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa prinosa koja odgovara dobijenoj stopi diskonta veća od 11%?

**43**. Banka kupuje dvije kratkoročne državne obveznice uz komercijalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 3 : 5, a zbir nominalnih vrijednosti je 16.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 80 dana, uz eskontnu stopu 7%, a druge je 100 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 6.800 €? Uporediti njihove stope diskonta.

**44**. Banka kupuje dvije kratkoročne državne obveznice uz komercijalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 2 : 6, a zbir nominalnih vrijednosti je 8.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 60 dana, uz eskontnu stopu 8%, a druge je 90 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 5.700 €? Uporediti njihove stope diskonta.

**45**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice državnih agencija uz racionalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 3 : 4, a zbir nominalnih vrijednosti je 14.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 60 dana, uz stopu prinosa 6%, a rok dospijeća druge je 75 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 13.500 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa diskonta koja odgovara dobijenoj stopi prinosa veća od 25%?

**46**. Banka kupuje dvije kratkoročne obveznice državnih agencija uz racionalni eskont čije nominalne vrijednosti stoje u odnosu 2 : 5, a zbir nominalnih vrijednosti je 21.000 €. Rok dospijeća prve obveznice je 50 dana, uz stopu prinosa 8%, a druge je 65 dana. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV platila 20.500 €? Da li je ekvivalentna godišnja stopa diskonta koja odgovara dobijenoj stopi prinosa veća od 14%?

**47**. Banka kupuje 20. 7. dvije kratkoročne obveznice. Prva je, uz eskontnu stopu 6%, nominalne vrijednosti 4.000 € i rokom dospijeća 2. 10, a druga sa rokom dospijeća 28. 10. Koliku je stopu prinosa primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 1‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 6.300 €? Nominalne vrijednosti prve i druge HOV stoje u razmjeri 4 : 3. Primijeniti komercijalni eskont za prvu, a racionalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta.

**48**. Banka kupuje 17. 6. dvije kratkoročne obveznice. Prva je, uz stopu prinosa 9%, nominalne vrijednosti 4.000 € i rokom dospijeća 11. 10, a druga s rokom dospijeća 20. 10. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 2‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 7.100 €? Nominalne vrijednosti prve i druge HOV stoje u razmjeri 4 : 5. Primijeniti racionalni eskont za prvu, a komercijalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta.

**49**. Banka kupuje 15. 6. dvije kratkoročne obveznice. Prva je, uz stopu prinosa 7%, nominalne vrijednosti 5.000 € i rokom dospijeća 1. 10, a druga s rokom dospijeća 23. 10. Koliku je stopu diskonta primijenila banka za drugu obveznicu ako je, poslije uzimanja provizije 2‰ od nominalnih vrijednosti za obje HOV, platila 7.300 €? Nominalne vrijednosti prve i druge HOV stoje u razmjeri 5 : 3. Primijeniti racionalni eskont za prvu, a komercijalni za drugu kratkoročnu obveznicu (k, 360). Uporediti njihove stope diskonta.

**50**. Lice uz komercijalni eskont prodaje 2 mjenice nominalnih vrijednosti 3.000 € i 5.000 €, koje dospijevaju kroz 5 mjeseci i kroz 189 dana redom. Banka A primjenjuje eskontnu stopu od 5% za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 4.000 €, a za ostale 4%. Provizija za svaku mjenicu je 5‰. Banka B za sve mjenice primjenjuje eskontnu stopu od 5,5%, a provizija za mjenice nominalne vrijednosti manje od 4.000 € je 5€, a za ostale 6‰. Obje banke provizije računaju od nominalne vrijednosti. Na koji način će to lice prodati mjenice i koliko novca će dobiti?

**51**. Lice uz komercijalni eskont prodaje 2 mjenice nominalnih vrijednosti 4.000 € i 6.000 €, koje dospijevaju kroz 6 mjeseci i kroz 159 dana redom. Banka A primjenjuje eskontnu stopu od 5% za mjenice čija je nominalna vrijednost manja od 5.000 €, a za ostale 4%. Provizija za svaku mjenicu je 5‰. Banka B za sve mjenice primjenjuje eskontnu stopu od 5,5%, a provizija za mjenice nominalne vrijednosti manje od 5.000 € je 7 €, a za ostale 4‰. Obje banke provizije računaju od nominalne vrijednosti. Na koji način će to lice prodati mjenice i koliko novca će dobiti?

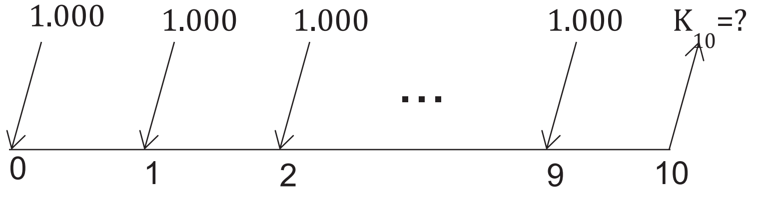
**52**. Osoba posjeduje 2 mjenice koje su naplative kroz 5 i 7 mjeseci, takve da je nominalna vrijednost prve 7.000 €, a druge 5.000 € i želi da ih zamijeni za jednu naplativu kroz 8 mjeseci i 10 dana. Banka zaračunava stopu prinosa od 5% i uzima proviziju od 2‰ u odnosu na nominalnu vrijednost, kao i manipulativne troškove od 13 €. Kolika je nominalna vrijednost treće mjenice? Primijeniti racionalni eskont.

**53**. Osoba posjeduje mjenicu nominalne vrijednosti 7.000 €, naplativu kroz 7 mjeseci. Jedna banka zaračunava proviziju od 1,5‰ od eskontovane vrijednosti i stopu prinosa od 6%. Druga banka zaračunava proviziju 1‰ od nominalne vrijednosti, kao i manipulativne troškove od 5 €, ali je stopa prinosa 5,5%. Koju će banku odabrati? Koristiti racionalni eskont.

### 3. Periodične uplate i isplate. Zajmovi

**1**. Početkom svake godine, u toku 10 godina, osoba uplaćuje po 1.000 €. Koliko novca će imati na kraju 10. godine? Kamatna stopa je 8% *p. a. d.*

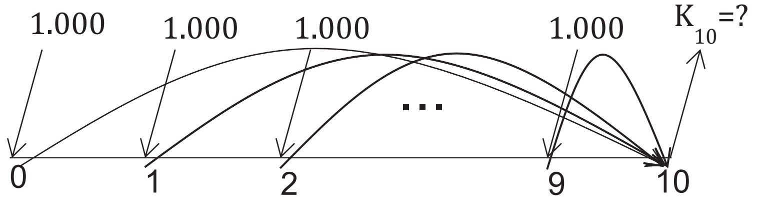
**Rješenje**:




**I način:** Primjenom gotove formule za račun anticipativnih uloga.

$$K_{10} = 1.000 \cdot 1,08 \cdot \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} = 15.645,49\,€.$$

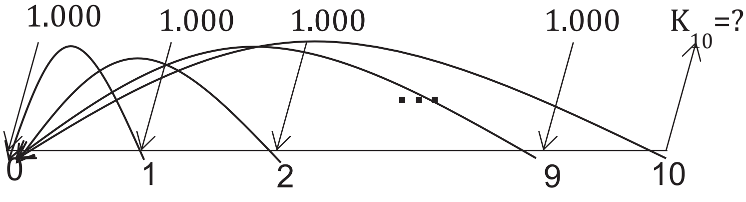
**II način:** Prolongacijom – sve novčane tokove svedemo na trenutak $t = 10$.



$$K_{10} = 1.000 \cdot 1,08^{10} + 1.000 \cdot 1,08^{9} + ... + 1.000 \cdot 1,08 = 1.000 \cdot 1,08 \cdot (1,08^{9} + 1,08^{8} + ... + 1),$$

odakle je $K_{10} = 1.000 \cdot 1,08 \cdot \dfrac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} = 15.645,49$ €.

**III način:** Diskontovanjem – sve novčane tokove svedemo na trenutak $t = 0$.

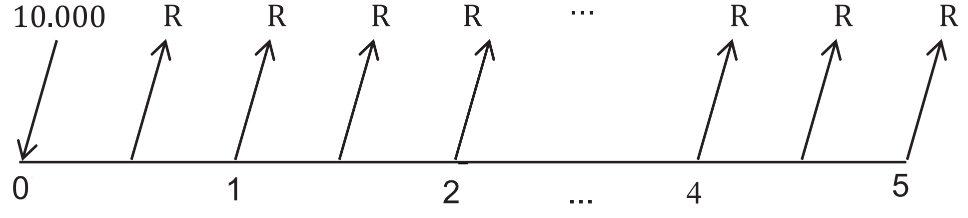



$$\frac{K_{10}}{1,08^{10}} = 1.000 + \frac{1.000}{1,08} + ... + \frac{1.000}{1,08^{9}} = \frac{1.000}{1,08^{9}} \cdot (1,08^{9} + 1,08^{8} + ... + 1) = \frac{1.000}{1,08^{9}} \cdot \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1},$$

odakle je $K_{10} = 1.000 \cdot 1,08 \cdot \dfrac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} = 15.645,49$ €.

**2**. Osoba je uplatila 10.000 €, na osnovu kojih prima polugodišnju dekurzivnu rentu u toku 5 godina. Naći rentu ako je kamatna stopa 10% *p*. a. d.

**Rješenje**:




Kao i prethodni zadatak, i ovaj se može uraditi na više načina. Prethodno moramo izračunati odgovarajući polugodišnji faktor akumulacije. Ako je $q = 1 + \dfrac{10}{100} = 1,1$ godišnji faktor akumulacije, tada je polugodišnji faktor akumulacije $q_1 = \sqrt{1,1} = 1,048808$.

**I način:** Primjenom formule za račun dekurzivne rente.

$$R = 10.000 \cdot q_1^{10} \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1^{10} - 1} = 1.287,57\ .$$

**II način:** Prolongacijom – sve novčane tokove svedemo na trenutak $t = 5$.

$10.000 \cdot q^{5} = R \cdot q_1^{9} + R \cdot q_1^{8} + ... + R \Rightarrow 10.000 \cdot q^{5} = R \cdot (q_1^{9} + q_1^{8} + ... + 1) = R \cdot \dfrac{q_1^{10} - 1}{q_1 - 1}$, pa je

$R=10.000\cdot q^5\cdot\frac{q_1-1}{q_1^{10}-1}=1.287,57$. Primijetimo da smo dobili istu formulu kao kod I načina, jer je $q^5=q_1^{10}$.

**III način**: Diskontovanjem – sve novčane tokove svedemo na trenutak $t=0$.

$$10.000=\frac{R}{q_1}+\frac{R}{q_1^2}+...+\frac{R}{q_1^{10}}=\frac{R}{q_1^{10}}\cdot\frac{q_1^{10}-1}{q_1-1}\Rightarrow R=1.287,57.$$

**3**. Osoba je iz banke podigla 10.000 €. Zajam se vraća jednakim, dekurzivnim, godišnjim anuitetima u toku 10 godina. Naći anuitet ako je kamatna stopa 9% *p*. a. d.

**Rješenje**:

Primjenom formule za anuitet, dobija se

$a=K\cdot q^n\cdot\frac{q-1}{q^n-1}=10.000\cdot 1,09^{10}\cdot\frac{1,09-1}{1,09^{10}-1}$, odakle je $a=1.558,20$.

Zadatak je, kao i prethodne, bilo moguće uraditi diskontovanjem i prolongacijom, što prepuštamo čitaocu.

**4**. Osoba je početkom svakog mjeseca, u toku 5 godina, uplaćivala u banku po 200 €. Na osnovu toga želi da prima godišnju rentu, počev od kraja 6. do kraja 15. godine. Naći rentu, ako je kamatna stopa 10% *p*. a. d.

**Rješenje**:

Prethodno moramo izračunati odgovarajući mjesečni faktor akumulacije. Ako je $q=1+\frac{10}{100}=1,1$ godišnji faktor akumulacije, tada je mjesečni faktor akumulacije $q_1=\sqrt[12]{1,1}=1,007974$.

**I način:** Primjenom formula za račun uloga i renti.

Ukupna ušteđevina na kraju 5. godine je $K_5=200\cdot q_1\cdot\frac{q_1^{60}-1}{q_1-1}=15.434,35$.

Kako su rente godišnje, a počinju godinu kasnije (kraj šeste godine), ima ih 10, to je $R=K_5\cdot q^{10}\cdot\frac{q-1}{q^{10}-1}=2.511,87$ €.

**II način:** Prolongacijom – sve novčane tokove svedemo na trenutak $t=15$.

$$200\cdot q_1^{60}q^{10}+200\cdot q_1^{59}q^{10}+\cdots+200\cdot q_1q^{10}=R\cdot q^9+R\cdot q^8+...+R.$$

Na lijevoj strani ulozi su prolongirani na kraj pete godine (množenjem s odgovarajućim mjesečnim faktorom akumulacije), a zatim je prolongacija od 5. do 15. godine urađena uz pomoć godišnjeg faktora akumulacije. Sve se moglo uraditi s mjesečnim faktorom, pa bi se umjesto gornje jednakosti mogla koristiti

$200\cdot q_1^{180}+200\cdot q_1^{179}+\cdots+200\cdot q_1^{121}=R\cdot q^9+R\cdot q^8+...+R$.

Iz prve jednakosti se dobija $200\cdot q_1 q^{10}\dfrac{q_1^{60}-1}{q_1-1}=R\cdot\dfrac{q^{10}-1}{q-1}$, pa je, nakon rješavanja,

$R=2.511,87$ €.

**III način:** Diskontovanjem – sve novčane tokove svedemo na trenutak $t = 0$.

$200+\dfrac{200}{q_1}+\dfrac{200}{q_1^2}+\cdots+\dfrac{200}{q_1^{59}}=\dfrac{R}{q^6}+\dfrac{R}{q^7}+...+\dfrac{R}{q^{15}}\Rightarrow\dfrac{200}{q_1^{59}}\cdot\dfrac{q_1^{60}-1}{q_1-1}=\dfrac{R}{q^{15}}\cdot\dfrac{q^{10}-1}{q-1}$, pa se, nakon rješavanja, dobija $R=2.511,87$ €.

**Napomena:** Zadatak je bilo moguće uraditi kombinacijom metoda diskontovanja i prolongacije. Na primjer, svi novčani tokovi su se mogli svesti na $t = 5$ (ili $t = 6$), pa bi se ulozi prolongirali, a rente diskontovale.

Takođe, valja napomenuti da je kod složenijih zadataka ponekad lakše od gotovih formula, koristeći princip ekvivalencije, tj. postavljanjem tzv. jednačine vrijednosti, sve novčane tokove svesti na isti trenutak.

Primijetimo da se zadaci u vezi s anuitetom rješavaju na isti način.

**5**. Osoba je podigla zajam od 50.000 €. Nakon 2 godine podigla je još 20.000 €. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima, počev od kraja 5. do kraja 10. godine uz 10% *p*. a. d. Poslije 13 plaćenih anuiteta dužnik prestaje da plaća anuitete za jednu godinu. Banka mu za to vrijeme (u toku 7. godine) obračunava kamatnu stopu u visini od 14% godišnje i ne odobrava produžavanje roka otplate zajma. Koliki su mjesečni anuiteti u preostalom periodu otplate zajma, ako banka ponovo obračunava 10% *p*. a. d. uz primjenu konformne kamatne stope.

**Rješenje**:

Prvo se mora naći anuitet predviđen originalnim ugovorom, što se može uraditi na neki od načina koji su predloženi u prethodnim zadacima. Ovdje ćemo zadatak uraditi diskontovanjem (svođenjem na trenutak $t = 0$). Ako sa $q=1,1$ označimo godišnji faktor akumulacije, tada je $q_1=\sqrt[12]{1,1}$ odgovarajući mjesečni faktor akumulacije.

$$50.000+\frac{20.000}{q^2}=\frac{a}{q_1^{60}}+\frac{a}{q_1^{61}}+\frac{a}{q_1^{62}}+...+\frac{a}{q_1^{120}}=\frac{a}{q_1^{120}}\cdot\left(q_1^{60}+q_1^{59}+\ldots+1\right),\text{ tj.}$$

$50.000+\frac{20.000}{q^2}=\frac{a}{q_1^{120}}\cdot\frac{q_1^{61}-1}{q_1-1}$, odakle je $66.528,93=a\cdot 30,1385898$, pa je $a=\ 2.207,43$.

Sada ćemo naći ostatak duga nakon plaćenog 13. anuiteta. To je kraj 6. godine ($t$ = 6). Dakle,

$K_6=50.000\cdot q^6+20.000\cdot q^4-a\cdot q_1^{12}-a\cdot q_1^{11}-\ldots-a$, odakle je

$$K_6=50.000\cdot q^6+20.000\cdot q^4-a\cdot\frac{q_1^{13}-1}{q_1-1}=87.755,39.$$

Kako je nakon plaćenog 13. anuiteta, u toku 7. godine, došlo do promjene kamatne stope na 14%, to je $q_2=1,14$ godišnji faktor akumulacije za tu godinu, tj. do otplate kredita. Odavde je $K_7=K_6\cdot q_2=100.041,14$.

Novi anuiteti (preostali – ima ih 36) mogu se naći na neki od ranije predloženih načina, a najjednostavnije je formulom za anuitete, pa je $a_1=K_7\cdot q_1^{36}\cdot\frac{q_1-1}{q_1^{36}-1}=3.207,84$.

Primijetimo da je − kao posljedica mirovanja otplate u toku 7. godine, a kamata se i dalje obračunavala − došlo do povećanja anuiteta.

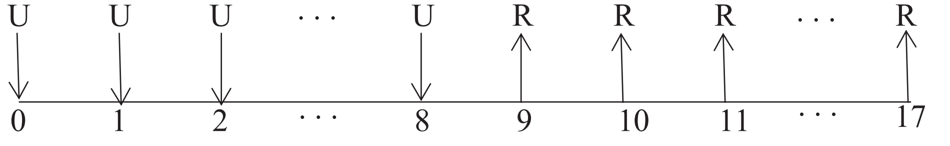
**Preporuka:** Iako se zadaci s reprogramom mogu raditi i diskontovanjem i prolongacijom, ipak je najjednostavnije, nakon nalaženja prvog anuiteta, da se nađe ostatak duga u trenutku reprograma, a zatim, na bilo koji način, preostali anuiteti. Takođe, mogu se svi novčani tokovi svesti na taj vremenski trenutak. Na taj način se neće miješati različite stope, što najčešće dovodi do grešaka. Ipak, predlažemo čitaocu da završni dio ovog zadatka uradi i diskontovanjem (u režimu promjenljive kamatne stope).

**6**. a) Neka osoba uplaćuje po U € početkom svake godine u toku 9 godina, kako bi joj se isplaćivala godišnja renta 9 puta, tako da je prva isplata godinu nakon posljednje uplate. (a1) Izraziti iznos rente $R$ kao funkciju uplate ako je kamatna stopa 4% *p*. a. d. (a2) Ako se ne izvrši posljednja uplata, a ako je osoba podigla 8 predviđenih renti visine $R$ (u prvobitno određenim vremenskim trenucima), izračunati 9. rentu.

b) Investitor je uplaćivao krajem svake godine tokom 10 godina po 1.000 €. (b1) Ako je kamatna stopa za prvih 5 godina 8%, a ostatak perioda 7%, izračunati visinu pojedinačnih 12 isplata koje je investitor počeo dobijati godinu dana nakon posljednje uplate. (b2) Izračunati i prinos (stopu prinosa) od ove transakcije.

**Rješenje**:

a) Označimo sa $q = 1,04$ godišnji faktor akumulacije. Na sljedećoj slici prikazani su novčani tokovi.




a1) Diskontovanjem (svođenjem svih novčanih tokova na trenutak $t = 0$) dobija se:

$$U + \frac{U}{q} + \frac{U}{q^2} + \ldots + \frac{U}{q^8} = \frac{R}{q^9} + \frac{R}{q^{10}} + \ldots + \frac{R}{q^{17}} \Rightarrow \frac{U}{q^8}\left(q^8 + q^7 + \ldots + 1\right) = \frac{R}{q^{17}}\left(q^8 + q^7 + \ldots + 1\right),$$

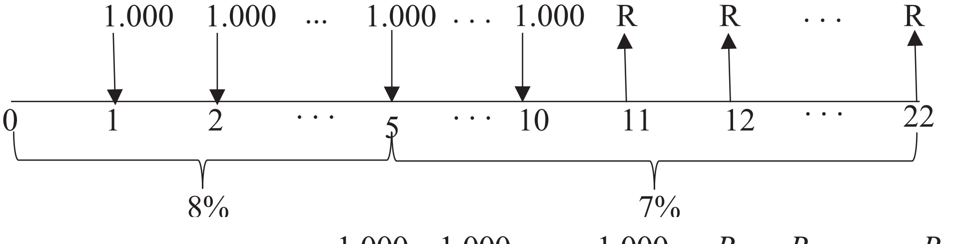
odakle je $\frac{U}{q^8} \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = \frac{R}{q^{17}} \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1}$ tj. $R = U \cdot q^9$, odnosno $R = U \cdot 1,04^9 = 1,4233U$ .

a2) Ako ne bi bilo posljednje uplate, a podignuto je 8 renti visine $R = U \cdot 1,04^9$ (kao u a1), tada se diskontovanjem dobija

$$U + \frac{U}{q} + \frac{U}{q^2} + \ldots + \frac{U}{q^7} = \frac{R}{q^9} + \frac{R}{q^{10}} + \ldots + \frac{R}{q^{16}} + \frac{R_1}{q^{17}} \Rightarrow \frac{U}{q^7} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{R}{q^{16}} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} + \frac{R_1}{q^{17}},$$

odakle je $\frac{R_1}{q^{17}} = \frac{U}{q^7} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} - \frac{R}{q^{16}} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{U}{q^7} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} - \frac{U \cdot q^9}{q^{16}} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 0$, pa je $R_1 = 0$.

b1) Označimo sa $q_1 = 1,08$ godišnji faktor akumulacije za prvih 5 godina, a $q_2 = 1,07$ godišnji faktor akumulacije za preostale godine. Na sljedećoj slici prikazani su novčani tokovi. Sve novčane tokove svešćemo na trenutak $t = 5$.




$$1.000 \cdot q_1^4 + 1.000 \cdot q_1^3 + \ldots + 1.000 + \frac{1.000}{q_2} + \frac{1.000}{q_2^2} + \ldots + \frac{1.000}{q_2^5} = \frac{R}{q_2^6} + \frac{R}{q_2^7} + \ldots + \frac{R}{q_2^{17}}.$$

Odavde je $1.000 \cdot \frac{q_1^5 - 1}{q_1 - 1} + \frac{1.000}{q_2^5} \cdot \frac{q_2^5 - 1}{q_2 - 1} = \frac{R}{q_2^{17}} \cdot \frac{q_2^{12} - 1}{q_2 - 1}$, pa je nakon računa $R =$ 1.759,98.

b2) Označimo sa $p$ stopu prinosa (tj. sa $i = p\%$), sa $q=1+i$ odgovarajući faktor akumulacije i sa $v=\frac{1}{q}$. Tada je sadašnja vrijednost svih novčanih tokova:

$NSV(i) = -1000v-1000v^2-\ldots-1000v^{10}+1759,98v^{11}+\ldots+1759,98v^{22}$, tj.

$$NSV(i)=-1.000v\cdot\frac{v^{10}-1}{v-1}+1.759,98v^{11}\cdot\frac{v^{12}-1}{v-1}.$$

Kako stopa prinosa izjednačava sadašnju vrijednost priliva i odliva, to se tražena stopa dobija rješavanjem jednačine $NSV(i)=0$. Data jednačina se ne može (u opštem slučaju) riješiti algebarski, pa je rješavamo metodom pokušaja i linearne interpolacije (aproksimiranjem NSV linearnom funkcijom).

Kako je $NSV(7\%)=82,6079$, $NSV(8\%)=-566,5938426$, to znači da je $i\in(7\%,8\%)$. Nađimo presjek prave koja prolazi kroz tačke $(7\%;\ 82,6079)$ i $(8\%;-566,5938)$ i horizontalne ose (u našem slučaju Ox osa je $i$-osa):

$0-82,6079=\frac{-566,5938-82,6079}{8\%-7\%}\cdot(x-7\%)$, odakle je $x=7{,}12\%$, tj. $i=7{,}12\%$, što je tražena stopa prinosa.

**Napomena:** U poglavlju o uopštenjima, kod nalaženja tzv. interne stope prinosa (*IRR*), biće detaljnije objašnjen ovaj postupak.

**7**. Kredit od 25.000 € otplaćuje se anuitetima od po 1.200 krajem svakog kvartala. Godišnja kamatna stopa je 9% za prve 2 godine, a 8% za ostatak perioda otplate. Za koliko će se godina kredit otplatiti? Izračunati nepotpuni anuitet koji će se platiti krajem posljednjeg kvartala.

**Rješenje:**

Neka je $q=1,09$ godišnji akumulacioni faktor za prve 2 godine, koji odgovara datoj kamatnoj stopi od 9%.

Tada je $q_1=\sqrt[4]{q}=1,007207323$ odgovarajući kvartalni faktor akumulacije.

Neka je $K_2$ preostali dug nakon 2 godine. U toku prve 2 godine plaćeno je 8 kvartalnih anuiteta, pa je: $\frac{K_2}{q^2}=25.000-\frac{1.200}{q_1}-\frac{1.200}{q_1^2}-\ldots-\frac{1.200}{q_1^8}=25.000-\frac{1.200}{q_1^8}\cdot\frac{q_1^8-1}{q_1-1}$, tj.

$$K_2=q^2\left(25.000-\frac{1.200}{q_1^8}\cdot\frac{q_1^8-1}{q_1-1}\right)=19.338,00\,.$$

Označimo sa $q_2 = 1{,}08$ faktor akumulacije za preostali period otplate koji odgovara datoj kamatnoj stopi od 8%.

Tada je $q_3 = \sqrt[4]{q_2} = 1{,}019426547$ odgovarajući kvartalni faktor akumulacije.

Označimo sa $n$ preostali broj kvartalnih anuiteta po 1.200.

Da nema nepotpunog mjesečnog anuiteta, važilo bi:

$$K_2 = \frac{1.200}{q_3} + \frac{1.200}{q_3^2} + \ldots + \frac{1.200}{q_3^n} = \frac{1.200}{q_3^n}\frac{q_3^n - 1}{q_3 - 1}.$$

Iz posljednje jednakosti možemo izračunati $n$:

$K_2 \cdot q_3^n(q_3 - 1) = 1.200(q_3^n - 1) \Rightarrow q_3^n(1.200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)) = 1.200$, tj.

$q_3^n = \dfrac{1.200}{1.200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)}$. Logaritmovanjem se dobija $\ln q_3^n = \ln\left(\dfrac{1.200}{1.200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)}\right)$,

tj.

$$n = \frac{\ln 1.200 - \ln(1.200 - K_2 \cdot (q_3 - 1))}{\ln q_3} = 19{,}52.$$

Kako izračunato $n$ nije prirordan broj, zaključujemo da je plaćeno 19 anuiteta po 1.200. Preostali dug nakon 19. anuiteta (od promjene kamatne stope) je:

$$K_2 \cdot q_3^{19} - 1200\frac{q_3^{19} - 1}{q_3 - 1} = 611{,}06.$$

Nepotpuni anuitet $a$ jednak je vrijednosti preostalog duga akumuliranog za još jedan kvartal, tj. $a = 611{,}06 \cdot q_3 = 622{,}93$.

Preporučujemo čitaocu da ovaj dio zadatka uradi i diskontovanjem novčanih tokova.

Dakle, kredit je otplaćen nakon tačno 7 godina: 2 godine prije promjene kamatne stope i 5 godina, tj. 20 kvartala (19 potpunih i 1 nepotpuni anuitet) nakon promjene kamatne stope.

**8**. Osoba je ulagala po 450 € na kraju svakog mjeseca u periodu od 3 godine. Uz posljednju uplatu deponovala je dodatnih 4.000 €. Na osnovu ovih ulaganja, želi da joj se isplaćuje 10 godišnjih renti, pri čemu se prva isplaćuje 2 godine nakon posljednjeg uloga. Naći rentu ako je stvarna godišnja kamatna stopa 6%.

**Rješenje**:

Neka je $q = 1{,}06$ godišnji faktor akumulacije koji odgovara datoj kamatnoj stopi od 6%. Tada je $q_1 = \sqrt[12]{q} = 1{,}004867551$ odgovarajući mjesečni faktor akumulacije.

Akumulirana vrijednost mjesečnih (dekurzivnih) uplata od po 450 € nakon 3 godine, tj. 36 mjeseci, iznosi:

$$450q_1^{35}+450q_1^{34}+\ldots 450q_1+450=450\frac{q_1^{36}-1}{q_1-1}=17.659,23\,.$$

Neka je $K_3$ stanje na računu na kraju 3. godine – ta vrijednost jednaka je zbiru akumuliranih mjesečnih uplata i dodatne uplate od 4.000 €, tj. $K_3=17.659,23+4.000=21.659,23$.

Označimo sa $K_5$ stanje na računu nakon 5. godine. Kako od kraja 3. do kraja 5. godine nije bilo ni uplata ni isplata, važiće $K_5=K_3\cdot q^2=24.336,31$.

Uzimajući u obzir da se prva (od ukupno 10) renti isplaćuje na kraju 5. godine i koristeći formulu za anticipativni anuitet, vrijednost rente $a$ je:

$$a=K_5\cdot q^9\cdot\frac{q-1}{q^{10}-1}=3.119,36\,.$$

Zadatak smo mogli riješiti i metodom sadašnje vrijednosti (svođenjem priliva i odliva na trenutak $t=0$), što prepuštamo čitaocu.

**9**. Osoba je pozajmila iz banke 20.000 €, a nakon godinu dana još 5.000 €. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima po 500 €, uz 9% *p*. a. d., počev od kraja 2. godine. Odrediti koliko anuiteta treba da vrati osoba, kao i visinu nepotpunog anuiteta.

**Rješenje**:

Označimo sa $n$ broj anuiteta, sa $q=1,09$ godišnji faktor akumulacije, a sa $q_1=\sqrt[12]{1,09}$ odgovarajući mjesečni faktor akumulacije.

Tada se, svođenjem na trenutak $t=2$ (trenutak uplate prvog anuiteta), dobija jednačina vrijednosti:

$$20.000\cdot q^2+5.000\cdot q=500+\frac{500}{q_1}+\ldots+\frac{500}{q_1^{n-1}}=\frac{500}{q_1^{n-1}}\cdot\frac{q_1^n-1}{q_1-1},\text{ tj.}$$

$$29.212=\frac{500}{q_1^{n-1}}\cdot\frac{q_1^n-1}{q_1-1}\Rightarrow 29.212q_1^{n-1}=500\cdot\frac{q_1^n-1}{q_1-1}\Rightarrow\frac{29.212}{q_1}q_1^n=\frac{500}{q_1-1}\cdot\left(q_1^n-1\right).$$

$\frac{29.212}{q_1}q_1^n=\frac{500}{q_1-1}\cdot q_1^n-\frac{500}{q_1-1}\Rightarrow\left(\frac{500}{q_1-1}-\frac{29.212}{q_1}\right)\cdot q_1^n=\frac{500}{q_1-1}$, pa se nakon računa dobija $q_1^n=1,718412$, odakle se logaritmovanjem dobija $n\cdot\ln q_1=\ln 1,718412$, tj.

$n = 75,39$, što znači da će osoba vratiti 75 anuiteta po 500 € i još jedan, nepotpuni 76. anuitet, koji ćemo sada izračunati. Jedan način je diskontovanjem novčanih tokova (na $t = 0$ ili $t = 2$), što prepuštamo čitaocu. U nastavku slijedi rješenje koje koristi metodu prolongacije.

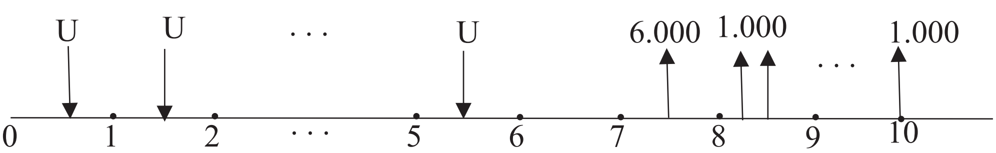
Nađimo ostatak duga nakon plaćenog 75. anuiteta. To je vremenski trenutak $t = 8/2$ (8 godina i 2 mjeseca).

$K_{8/2} = 20.000 \cdot q^8 q_1^2 + 5.000 \cdot q^7 q_1^2 - 500 q_1^{74} - 500 q_1^{73} - \ldots - 500$, odnosno

$K_{8/2} = 20.000 \cdot q^8 q_1^2 + 5.000 \cdot q^7 q_1^2 - 500 \cdot \dfrac{q_1^{75} - 1}{q_1 - 1} = 193,30$, što znači da je posljednji, nepotpuni anuitet $a_1 = 193,30 \cdot q_1 = 194,69$.

**10**. Osoba je sredinom svake godine, u toku 6 godina, uplaćivala isti iznos. Koliko iznosi taj ulog ako je na osnovu akumuliranog kapitala sredinom osme godine podigla 6.000 €, a zatim u toku 9. i 10. godine krajem svakog kvartala po 1.000 €? Stvarna godišnja kamatna stopa iznosi 6%.

**Rješenje**:




Neka je $q = 1,06$ godišnji faktor akumulacije, tada je $q_p = \sqrt{1,06}$ odgovarajući polugodišnji, a $q_k = \sqrt[4]{q}$ kvartalni faktor akumulacije.

Diskontovanjem na $t = 0$, dobija se:

$\dfrac{U}{q_p} + \dfrac{U}{q_p^3} + \ldots + \dfrac{U}{q_p^{11}} = \dfrac{6.000}{q_p^{15}} + \dfrac{1.000}{q_k^{33}} + \dfrac{1.000}{q_k^{34}} + \ldots + \dfrac{1.000}{q_k^{40}}$, tj.

$\dfrac{U}{q_p^{11}}\left(q_p^{10} + q_p^8 + \ldots + 1\right) = \dfrac{6.000}{q_p^{15}} + \dfrac{1.000}{q_k^{40}}\left(q_k^7 + q_k^6 + \ldots + 1\right)$, odakle je

$\dfrac{U}{q_p^{11}} \cdot \dfrac{\left(q_p^2\right)^6 - 1}{q_p^2 - 1} = \dfrac{6.000}{q_p^{15}} + \dfrac{1.000}{q_k^{40}} \cdot \dfrac{q_k^8 - 1}{q_k - 1}$ (prvi geometrijski niz ima količnik $q_p^2$), pa se nakon računa dobija $U = 1.694,59$ €.

**11**. Osoba je danas uložila 5.000 €, sredinom 2. godine još 3.000 €, a zatim u toku 4. i 5. godine početkom svakog polugodišta po 1.000 €. Na osnovu tih uplata želi da joj se isplaćuje 7 jednakih godišnjih renti, pri čemu se prva isplaćuje godinu dana nakon posljednjeg uloga. Naći rentu ako je stvarna godišnja kamatna stopa 6%.

**Rješenje**:

Neka je $q = 1{,}06$ godišnji faktor akumulacije, tada je $q_1 = \sqrt{1{,}06}$ odgovarajući polugodišnji, a $q_k = \sqrt[4]{q}$ kvartalni faktor akumulacije.

Diskontovanjem na $t = 0$, dobija se

$$5.000 + \frac{3.000}{q_1^3} + \frac{1.000}{q_1^6} + \frac{1.000}{q_1^7} + \ldots + \frac{1.000}{q_1^9} = \frac{R}{q^5 q_1} + \frac{R}{q^6 q_1} + \frac{R}{q^7 q_1} + \ldots + \frac{R}{q^{11} q_1}.$$

Odavde je $5.000 + \frac{3.000}{q_1^3} + \frac{1.000}{q_1^9} \cdot \frac{q_1^4 - 1}{q_1 - 1} = \frac{R}{q^{11} q_1} \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1}$, tj. $10.965{,}49 = \frac{R}{q^{11} q_1} \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1}$,

odakle je $R = 2.553{,}20$ €.

**12**. Zajam od $K$ € otplaćuje se jednakim dekurzivnim anuitetima $n$ godina. Ako je nakon $m$ godina ostatak duga 5 puta manji od $K$, dokazati da je $m$-ta rata jednaka

$$R_m = K \frac{q^m - \frac{1}{5}}{q^m - 1} \cdot \frac{q - 1}{q^{n-m+1}}.$$

**Rješenje**:

Iz formule za ostatak duga na kraju $m$-te godine (preko do tada plaćenih $m$ anuiteta), dobija se

$K_m = K \cdot q^m - a \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{K}{5} \Rightarrow K \cdot \left(q^m - \frac{1}{5}\right) = a \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}$, odakle je

$a = K \cdot \left(q^m - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}$. Kako je $R_m = R_1 \cdot q^{m-1}$ i $a = R_1 \cdot q^n$ (jednakosti su poznate i urađene u udžbeniku), to se dobija

$R_m = \frac{a}{q^n} \cdot q^{m-1} = \frac{a}{q^{n-m+1}} = K \cdot \left(q^m - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-m+1}}$, što je i trebalo dokazati.

Do ostatka duga može se doći i preko budućih (do tada neplaćenih) $n$-$m$ anuiteta:

$$K_m = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^{n-m}} = \frac{a}{q^{n-m}} \frac{q^{n-m} - 1}{q - 1}.$$

Preporučuje se da se dokaže da su ova dva izraza za $K_m$ jednaka.

**13**. Osoba je pozajmila iz banke 30.000 € uz 10% *p*. a. d. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima, počevši od kraja 6. do kraja 10. godine. Uz plaćeni 15. anuitet, osoba je uplatila još 1.000 €. Reprogramirati ostatak duga, tj. odrediti novi anuitet ako su rok otplate i kamatna stopa nepromijenjeni.

**Rješenje**:

Prvo se mora naći anuitet predviđen originalnim ugovorom, što ćemo uraditi diskontovanjem na trenutak $t = 0$. Ako sa $q = 1{,}1$ označimo godišnji faktor akumulacije, tada je $q_1 = \sqrt[12]{1{,}1}$ odgovarajući mjesečni faktor akumulacije. Tada je

$K = \frac{a}{q^{72}} + \frac{a}{q^{73}} + \ldots + \frac{a}{q^{120}} \Rightarrow K = \frac{a}{q^{120}} \cdot \frac{q^{49} - 1}{q - 1}$, odakle se dobija da je $a = 1.128{,}14$.

Kako je uz plaćeni 15. anuitet uplaćeno još 1.000 €, to ćemo opet sve novčane tokove svesti na $t = 0$:

$K = \frac{a}{q^{72}} + \frac{a}{q^{73}} + \ldots + \frac{a}{q^{86}} + \frac{1.000}{q^{86}} + \frac{a_1}{q^{87}} + \frac{a_1}{q^{88}} + \ldots + \frac{a_1}{q^{120}}$, odakle je

$K = \frac{a}{q_1^{86}} \cdot \frac{q_1^{15} - 1}{q_1 - 1} + \frac{1.000}{q_1^{86}} + \frac{a_1}{q_1^{120}} \cdot \frac{q_1^{34} - 1}{q_1 - 1}$, pa se nakon računa dobija $a_1 = 1.676{,}43$.

**14**. Osoba je pozajmila iz banke 15.000 €. Zajam se vraća jednakim godišnjim dekurzivnim anuitetima u toku 16 godina. Naći anuitete ako je kamatna stopa u toku neparnih godina 6% *p*.a.d, a u toku parnih 8% *p*. a. d.

**Rješenje:**

Označimo sa $q_1 = 1{,}06$ godišnji faktor akumulacije u toku neparnih godina, a sa $q_2 = 1{,}08$ u toku parnih godina.

Metodom diskontovanja (svođenjem novčanih tokova na $t = 0$), dobija se:

$\frac{a}{q_1} + \frac{a}{q_1 \cdot q_2} + \frac{a}{q_1^2 \cdot q_2} + \frac{a}{q_1^2 \cdot q_2^2} + \ldots + \frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^7} + \frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^8} = 15.000$.

Grupisanjem neparnih i parnih sabiraka dobijaju se dva geometrijska niza sa količnikom $q_1 \cdot q_2$

$\underbrace{\frac{a}{q_1} + \frac{a}{q_1^2 \cdot q_2} + \ldots + \frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^7}}_{Neparni} + \underbrace{\frac{a}{q_1 \cdot q_2} + \frac{a}{q_1^2 \cdot q_2^2} + \ldots + \frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^8}}_{Parni} = 15.000$, a odavde je

$\frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^7} \cdot \left(q_1^7 \cdot q_2^7 + q_1^6 \cdot q_2^6 + \ldots + 1\right) + \frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^8} \cdot \left(q_1^7 \cdot q_2^7 + q_1^6 \cdot q_2^6 + \ldots + 1\right) = 15.000$, tj.

$$\frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^7} \cdot \frac{(q_1 \cdot q_2)^8 - 1}{q_1 \cdot q_2 - 1} + \frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^8} \cdot \frac{(q_1 \cdot q_2)^8 - 1}{q_1 \cdot q_2 - 1} = 15.000, \text{ odnosno}$$

$$\frac{a}{q_1^8 \cdot q_2^7} \cdot \frac{(q_1 \cdot q_2)^8 - 1}{q_1 \cdot q_2 - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q_2}\right) = 15.000.$$

Nakon računa, dobija se $a = 1.579,71$. Dakle, anuitet iznosi 1.579,71 €.

**15**. Neka se zajam *K* otplaćuje promjenljivim anuitetima, koji rastu po aritmetičkoj progresiji, čija je razlika *d*. Neka otplata traje *n* rokova uz kamatnu stopu od *p*%, za svaki rok. Izračunati prvi, a zatim i ostale anuitete.

**Uputstvo**: Sumu $S = \frac{1}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \ldots + \frac{n-1}{q^n}$ odrediti iz $Sq - S$.

**16**. a) Neka osoba uplaćuje po *U* € početkom svake godine u toku 10 godina, kako bi joj se isplaćivala godišnja renta 10 puta, tako da je prva isplata godinu dana nakon posljednje uplate. (a1) Izraziti iznos rente *R* kao funkciju uplate ako je kamatna stopa 5% *p*. a. d. (a2) Ako se ne izvrši posljednja uplata, a ako je osoba podigla 9 predviđenih renti visine *R* (u prvobitno određenim vremenskim trenucima), izračunati 10. rentu.

b) Investitor je uplaćivao krajem svake godine tokom 10 godina po 900 €.
(b1) Ako je kamatna stopa za prvih 6 godina 8%, a ostatak perioda 7%, izračunati visinu pojedinačnih 11 isplata koje je počeo dobijati godinu dana nakon posljednje uplate.
(b2) Izračunati i prinos (stopu prinosa) na transakciju.

**Rezultat**: a1) $R = 1,629U$; a2) 0; b1) $R = 1.687$; b2) 7,19%.

**17**. Osoba je podigla zajam od 40.000 €. Nakon 2 godine podigla je još 10.000 €. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima, počev od kraja 6. do kraja 10. godine uz 11% *p*. a. d. Poslije 13 plaćenih anuiteta dužnik prestaje da plaća anuitete za jednu godinu. Banka mu za to vrijeme (u toku 8. godine) obračunava kamatnu stopu u visini od 15% godišnje i ne odobrava produžavanje roka otplate zajma. Koliki su mjesečni anuiteti u preostalom periodu otplate zajma, ako banka ponovo obračunava 11% *p*. a. d. uz primjenu konformne kamatne stope.

**Rezultat**: 2.245,95 €; 3.685,63 €.

**18**. Osoba je pozajmila iz banke 30.000 €, a kroz 2 godine još toliko. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima od kraja 6. do kraja 16. godine, uz 9% *p*. a. d.

Osoba je, uz plaćeni 12. anuitet, uplatila još 3.000 €. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih mjesečnih anuiteta, ako je kamatna stopa povećana i iznosi 10% (od trenutka uplate dodatnih 3.000 €!).
**Rezultat**: 1.141,99 €; 1.142,25 €.

**19**. Osoba je pozajmila iz banke 30.000 €, a nakon 2 godine još 5.000 €. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima po 500 €, uz 8% *p*. a. d., počev od kraja druge godine. Odrediti koliko anuiteta treba da vrati osoba, kao i visinu nepotpunog anuiteta.
**Rezultat**: 134,65 €; 326,63 €.

**20**. Osoba je sredinom svake godine, u toku 5 godina, uplaćivala isti iznos. Koliko iznosi taj ulog ako je na osnovu akumuliranog kapitala podigla sredinom 8. godine 4.000 €, a zatim u toku 9. i 10. godine početkom svakog kvartala po 2.000 €? Stvarna godišnja kamatna stopa je 7%.
**Rezultat**: 2.638,73 €.

**21**. Osoba je sredinom svake godine, u toku 5 godina, uplaćivala isti iznos. Koliko iznosi taj ulog ako je na osnovu akumuliranog kapitala podigla sredinom 7. godine 6.000 €, a zatim u toku 8. i 9. godine krajem svakog polugodišta po 800 €? Stvarna godišnja kamatna stopa je 8%.
**Rezultat**: 1.285,93 €.

**22**. Osoba je danas uložila 6.000 €, sredinom 2. godine još 2.000 €, a zatim u toku 4. i 5. godine početkom svakog polugodišta po 500 €. Na osnovu tih uplata želi da joj se isplaćuje 5 jednakih godišnjih renti, pri čemu se prva isplaćuje godinu dana nakon posljednjeg uloga. Naći rentu ako je stvarna godišnja kamatna stopa 6%.
**Rezultat**: 2.913,16 €.

**23**. Osoba je pozajmila iz banke 30.000 € uz 8% *p*. a. d. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima po 400 € počevši od kraja 6. godine. Odrediti koliki je broj anuiteta koji treba da se vrati, kao i visinu nepotpunog anuiteta.
**Rezultat**: 223 anuiteta po 400 € i nepotpuni 224. anuitet u iznosu 307,7 €.

**24**. Osoba je pozajmila iz banke 20.000 € uz 9% *p*. a. d. Zajam se vraća jednakim kvartalnim anuitetima počevši od kraja 6. do kraja 12. godine. Uz plaćeni 10. anuitet,

osoba je uplatila još 2.000 €. Reprogramirati ostatak duga, tj. odrediti novi anuitet, ako su rok otplate i kamatna stopa nepromijenjeni.
**Rezultat**: 1.716,72 €. Poslije reprograma 1.558,99 €.

**25**. Investitor je uplaćivao krajem svake godine tokom 10 godina po 1.000 €. Ako je kamatna stopa za prvih 5 godina 8%, a ostatak perioda 7%, izračunati visinu pojedinačnih 12 isplata koje je počeo dobijati godinu dana nakon posljednje uplate. Izračunati i stopu prinosa na transakciju.
**Rezultat**: 1759,98 €; 7,13%.

**26**. Neka osoba uplaćuje $U$ € početkom svake godine u toku 8 godina, kako bi joj se isplaćivala godišnja renta 8 puta, tako da je prva isplata godinu nakon posljednje uplate.

a) Izraziti iznos rente $R$ kao funkciju uplate $U$ ako je kamatna stopa 6% *p.* a. d.

b) Ako se ne izvrši posljednja uplata i ako osoba želi da podigne 8 jednakih renti $R_1$ (u prvobitno predviđenim vremenskim trenucima), izračunati koliko procenata je $R_1$ manja u odnosu na $R$?

**Rezultat**: a) $R = U \cdot q^9 = 1{,}6895 \cdot U$; b) $R_1$=1,5187$U$ = 0,89896$R$, tj. za 10,10% je manja.

**27**. Investitor je uplaćivao krajem svake godine tokom 5 godina po 1.000 €.

a) Ako je kamatna stopa za prve 3 godine 4%, a ostatak perioda 5%, izračunati visinu pojedinačnih 12 isplata koje je počeo dobijati godinu dana nakon posljednje uplate.

b) Koliko iznosi jedinstvena stopa koja izjednačava prilive i odlive?

**Rezultat**: a) 619,59 €; b) 4,92%.

**28**. Osoba je danas uložila 10.000 €, sredinom 3. godine još 5.000 €, a zatim u toku 4. i 5. godine krajem svakog kvartala po 1.000 €. Na osnovu tih uplata želi da joj se isplaćuje 10 jednakih godišnjih renti, pri čemu se prva isplaćuje pola godine nakon posljednjeg uloga. Naći rentu ako je stvarna godišnja kamatna stopa 7%.
**Rezultat**: 3.914,7 €.

**29**. Ako je plaćeno 7 dekurzivnih jednakih godišnjih anuiteta, odrediti ostatak zajma $K$ = 8.000 € na kraju 7. godine $K_7$, koji se otplaćuje za 12 godina uz 6% *p.* a. d.:

prospektivno (razmatrajući neplaćene anuitete) i retrospektivno (razmatrajući plaćene anuitete). Pokazati da je u oba slučaja u pitanju isti iznos.
**Rezultat**: 4.019,5 €.

**30**. Ako je plaćeno 9 dekurzivnih jednakih godišnjih anuiteta, odrediti ostatak zajma $K$ = 13.000 € na kraju 9. godine $K_9$, koji se otplaćuje za 16 godina uz 8% *p*. a. d.: prospektivno (razmatrajući neplaćene anuitete) i retrospektivno (razmatrajući plaćene anuitete). Pokazati da je u oba slučaja u pitanju isti iznos.
**Rezultat**: 7.646,6 €.

**31**. Osoba je početkom svakog mjeseca, u toku 2 godine, uplaćivala po 300 €. Krajem 5. godine podigla je 1.000 €. Na osnovu ostatka ušteđevine osoba je sa bankom dogovorila da prima polugodišnju rentu počevši od kraja 7. do kraja 11. godine. Kamatna stopa je 10% *p*. a. d. Međutim, nakon 3 primljene rente, u dogovoru sa bankom, uz 3. rentu podigla je još 500 €. Kolike će biti preostale rente ako banka od tog trenutka obračunava 11% *p*. a. d. uz primjenu konformne kamatne stope.
**Rezultat**: 1.614,33 €; 1.762,15 €.

**32**. Osoba je u toku prvih 5 godina pozajmljivala iz banke 500 € početkom svakog mjeseca. Na kraju 6. godine pozajmila je još 1.000 €. Zajam se vraća jednakim kvartalnim anuitetima od kraja 10. do kraja 25. godine, uz 11% *p*. a. d. Osoba je, uz plaćeni 15. anuitet, uplatila još 1.000 €. Reprogramirati plan otplate, tj. odrediti visinu originalnog anuiteta, kao i preostalih mjesečnih anuiteta.
**Rezultat**: Originalni anuitet iznosi 2.219,59 €, a novi anuitet 2.181,34 €.

**33**. a) Naći vezu između penzija (renti) R i $R_1$, ako osoba danas raspolaže iznosom S, a želi da prima početkom svake godine za 20 godina isti iznos penzije R€ uz p%, ili alternativno prve godine da primi $R_1$, a da se svaka naredna penzija povećava $p_1$% (prilagođavanje za inflaciju). Pokazati da je za p=5 i $p_1$=3 $R_1$=0,78R.

b) Izvesti formulu za zbir diskontovanih anuiteta visine $1/p$, koji se plaćaju $p$ puta u toku godine, krajem perioda (izraziti je preko sadašnje vrijednosti godišnjih anuiteta).

**34**. Neka osoba uplaćuje po U € početkom svake godine u toku 15 godina, kako bi joj se isplaćivala godišnja renta 15 puta, tako da je prva isplata godinu dana nakon posljednje uplate. Izraziti iznos rente $R$ kao funkciju uplate ako je kamatna stopa 7% *p*.

a. d. Ako se ne izvrši posljednja uplata, a ako je osoba podigla 14 predviđenih renti visine $R$, izračunati 15. rentu.

**35**. Osoba je početkom svakog mjeseca, u toku 3 godine, uplaćivala po 200 €. Krajem 5. godine podigla je 1.000 €. Na osnovu ostatka ušteđevine osoba je sa bankom dogovorila da prima polugodišnju rentu počevši od kraja 6. do kraja 10. godine. Kamatna stopa je 10% *p*. a. d. Međutim, nakon 4 primljene rente, u dogovoru sa bankom, uz 4. rentu podigla je još 500 €. Kolike će biti preostale rente, ako banka od tog trenutka obračunava 11% *p*. a. d. uz primjenu konformne kamatne stope?

**36**. Osoba je pozajmila iz banke 50.000 €, a nakon godinu dana još 10.000 €. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima, počevši od kraja 4. do kraja 10. godine. Kamatna stopa je 9,5% *p*. a. d. Međutim, uz plaćeni 25. anuitet uplatila još 2.000 €. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih anuiteta ako banka od tog trenutka obračunava 10% *p*. a. d.

**37**. Osoba je krajem svakog mjeseca, u toku 2 godine, uplaćivala po 300 €. Krajem 3. godine podigla je 1.800 €. Na osnovu ostatka ušteđevine osoba je sa bankom dogovorila da prima kvartalnu rentu počevši od kraja 5. do kraja 11. godine. Kamatna stopa je 10% *p*. a. d. Međutim, nakon 2 primljene rente, u dogovoru sa bankom, uz drugu rentu podigla je još 700 €. Kolike će biti preostale kvartalne rente, ako banka od tog trenutka obračunava 12% *p*. a. d. uz primjenu konformne kamatne stope?

**38**. Osoba je pozajmila iz banke 30.000 €, a nakon godinu dana još 20.000 €. Zajam se vraća jednakim kvartalnim anuitetima, počevši od kraja 3. do kraja 12. godine. Kamatna stopa je 8% *p*. a. d. Međutim, uz plaćeni 9. anuitet uplatila još 3.000 €. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih anuiteta ako banka od tog trenutka obračunava 10% *p*. a. d.

**39**. Zajam od $K$ eura otplaćuje se jednakim dekurzivnim anuitetima $n$ godina. Ako je nakon $m$ godina ostatak duga 4 puta manji, dokazati da je $m$-ta rata jednaka

$$R_m = K\frac{q^m - \frac{1}{4}}{q^m - 1}\cdot\frac{q-1}{q^{n-m+1}}.$$

**40**. Osoba je u toku prvih 6 godina pozajmljivala iz banke 600 € krajem svakog mjeseca. Na kraju 9. godine pozajmila je još 1.000 €. Zajam se vraća jednakim polugodišnjim anuitetima od kraja 15. do kraja 30. godine, uz 11% *p*. a. d. Osoba je, uz plaćeni 15. anuitet, pozajmila još 1.000 €. Reprogramirati plan otplate, tj. odrediti visinu preostalih mjesečnih anuiteta.

**41**. Osoba je iz banke pozajmila 10.000 €, a kroz 3 godine i 5 mjeseci vratila je polovinu ukupnog (akumuliranog) duga. Zajam se vraća jednakim polugodišnjim anuitetima, počev od kraja 7. do kraja 20. godine, uz kamatnu stopu od 9% *p*.a.d. Nakon vraćenog 5. anuiteta, banka povećava kamatnu stopu na 10%. Naći anuitete (i prije i poslije promjene).

**42**. Osoba je iz banke pozajmila 15.000 €, a kroz 2 godine i 3 mjeseca vratila je 20% ukupnog (akumuliranog) duga. Zajam se vraća jednakim kvartalnim anuitetima, počev od kraja 7. do kraja 15. godine, uz kamatnu stopu od 8% *p*. a. d. Nakon vraćenog 6. anuiteta, banka povećava kamatnu stopu na 9%. Naći anuitete (i prije i poslije promjene).

**43**. Osoba je pozajmila iz banke 10.000 € uz 5% *p*. a. d., a zajam se vraća godišnjim dekurzivnim anuitetima u toku 16 godina. Svi neparni anuiteti su jednaki i za 10% su veći od parnih. Naći anuitete.

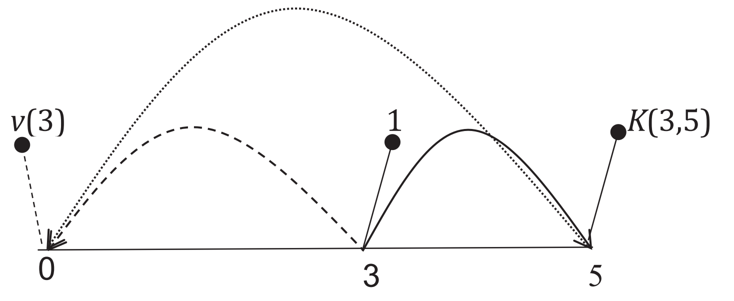
**44**. Osoba je pozajmila iz banke 10.000 €. Zajam se vraća jednakim godišnjim dekurzivnim anuitetima u toku 14 godina. Naći anuitete ako je kamatna stopa u toku neparnih godina 5% *p*. a. d, a u toku parnih 7% *p*. a. d.

### 4. Rentabilnost investicionog projekta. Uopštenja kamatnih stopa

**1**. Ako je $v = v(t)$, funkcija sadašnje vrijednosti u trenutku $t$ i $K(3,5) = \alpha$, $v(3) = \beta$ i $v(5) = \gamma$, naći vezu između α, β i γ.

**Rješenje:**

U trenutku $t = 3$ data je jedna novčana jedinica, pa njena akumulirana vrijednost u trenutku $t = 5$ iznosi $K(3,5)$ (puna linija na slici), a diskontovana vrijednost na trenutak $t = 0$ je $v(3)$ (isprekidana linija na slici).




Diskontovana vrijednost $K$ novčanih jedinica iz trenutka $t$ = 5 na trenutak $t$ = 0 iznosi $K{\cdot}v(5)$ (tačkasta linija na slici), pa je za $K(3,5)$ novčanih jedinica sadašnja vrijednost $K(3,5){\cdot}v(5)$. Prema tome, dobijena je relacija:

$K(3,5){\cdot}v(5) = v(3)$, odakle se zamjenom dobija $\alpha{\cdot}\gamma = \beta$.

**2**. Neka je efektivna kamatna stopa 11%. Naći zbirnu sadašnju vrijednost $S$ renti koje se isplaćuju u godišnjem iznosu 300 € od kraja 1. do kraja 9. godine, neprekidno. Koliki je intenzitet kamate u procentima?

**Rješenje:**

Kako su novčani tokovi neprekidni, umjesto sume se javlja integral.

**I način**: Ako koristimo diskontni faktor izražen preko efektivne stope, sadašnja vrijednost renti iznosi $S = 300\int_1^9 v^t dt = 300\cdot\frac{v^9 - v}{\ln v} = 1.466,72$, gdje je $v = \frac{1}{1+i} = 0,901$.

**II način**: Diskontni faktor u terminima intenziteta kamate:

Intenzitet kamate iznosi $\delta = \ln(1+i) = \ln(1,11) = 0.10436 = 10,436\%$, pa je

$$S = 300\cdot\int_1^9 e^{-\delta t} dt = -\frac{300}{\delta}\cdot e^{-0.10436t}\Big|_1^9 = -\frac{300}{\delta}\cdot(e^{-0,10436\cdot 9} - e^{-0,10436\cdot 1}) = 1.466,72 .$$

**3**. Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je $\delta(0)$ = 0,04, a 6%, za $t$ > 5, dok je na intervalu [0,5] linearna funkcija. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti (uopšteni diskontni faktor v($t$)). Ukoliko je polovinom 5. i krajem 6. godine osoba uplatila po 1.000 €, koliko će imati na kraju 10. godine?

**Rješenje:**

$\delta(t) = \begin{cases} a + bt, t \in [0,5] \\ 0,06,\ t > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0,04 + 0,004t,\ t \in [0,5] \\ 0,06,\ t > 5 \end{cases}$, jer iz $\delta(0)$ = 0,04 dobija se $a$ = 0,04, a zbog neprekidnosti intenzitet kamate $\delta$ za $t$ = 5 je 6%, tj. $a + 5b$ = 0,06, pa je:

$5b$ = 0,06-0,04, odnosno $b$ = 0,004.

Nađimo funkciju sadašnje vrijednosti $v = v(t)$.

1. $t \in [0,5]$

$$v(t) = e^{-\int_0^t s ds} = e^{-\int_0^t (0,04+0,004s)ds} e^{-0,04s\Big|_0^t + \frac{0,004s^2}{2}\Big|_0^t} = e^{-0,04t+0,002t^2}.$$

2. $t>5$

$$v(t) = e^{-\int_0^5 (0,04+0,004s)ds - \int_5^t 0,06ds} = e^{-0,04s\Big|_0^5 - \frac{0,004s^2}{2}\Big|_0^5 - 0,06s\Big|_5^t} = e^{-0,04t\Big|_0^5 - \frac{0,004s^2}{2}\Big|_0^5 - 0,06s\Big|_5^t}.$$

$$= e^{0,05-0,06t}.$$

Dakle, funkcija sadašnje vrijednosti (diskontni faktor kod uopštenja) iznosi:

$$v(t) = \begin{cases} e^{-0,04t+0,002t^2}, t \in [0,5] \\ e^{0,05-0,06t}, t > 5 \end{cases}.$$

Da bismo odredili $K-$ koliko osoba ima na kraju 10. godine $-$ svešćemo novčane tokove na sadašnji trenutak:

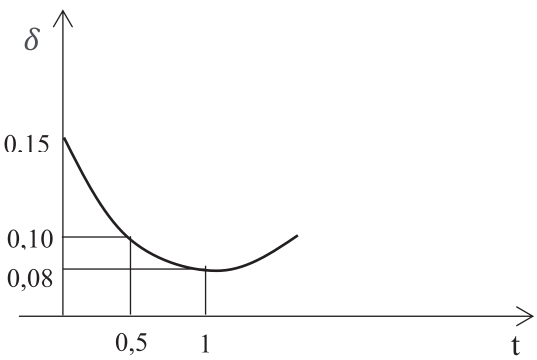
1.000 $v(4,5)$ + 1.000 $v(6) = K \cdot v(10)$,

odakle se dobija:

$$K = \frac{1.000 \cdot e^{-0,04 \cdot 4,5 - 0,002 \cdot 4,5^2} + 1.000 \cdot e^{0,05-0,06 \cdot 6}}{e^{0,05-0,06 \cdot 10}} = 2.661,52$$, pa osoba na kraju 10. godine ima 2.661,52 €.

**4**. Brzina rasta uloga (intenzitet kamate) na neki depozit na početku godine bio je 0,15, sredinom godine 0,10 i 0,08 na kraju godine. Naći akumulirani iznos na kraju godine ako je početkom godine uloženo 5.000 €, uz pretpostavku da je intenzitet kamate za godinu bio kvadratna funkcija vremena.

**Rješenje:**



Prvo odredimo intenzitet kamate $\delta(t) = at^2 + bt + c$.

Iz tri data uslova odredićemo parametre *a*, *b* i *c*:

$\delta(0) = 0{,}15$ pa je $0{,}15 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, odnosno $c = 0{,}15$.

Iz $\delta(0{,}5) = 0{,}1$ imamo $0{,}1 = a \cdot 0{,}5^2 + b \cdot 0{,}5 + c$, tj. $a + 2b = -0{,}2$.

$\delta(1) = 0{,}08$ pa je $0{,}08 = a + b + c$, odnosno $a + b = -0{,}07$.

Rješavajući dobijeni sistem dvije jednačine s dvije nepoznate dobijaju se dva preostala parametra kvadratne funkcije: $b = -0{,}13$ i $a = 0{,}06$.

Dakle, intenzitet kamate glasi $\delta(t) = 0{,}06t^2 - 0{,}13t + 0{,}15$.

Akumulirani iznos krajem prve godine možemo odrediti na dva načina: prolongacijom (korišćenjem faktora akumulacije $K(0,1)$) ili diskontovanjem (preko funkcije sadašnje vrijednosti $v = v(t)$).

**I način**:


$$K_1 = 5.000 \cdot K(0,1) = 5.000 e^{\int_0^1 (0{,}06t^2 - 0{,}13t + 0{,}15)\,dt} = 5.000 e^{0{,}06 \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 - 0{,}13 \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + 0{,}15t\Big|_0^1}$$

$$5.000 e^{0{,}02 - 0{,}065 + 0{,}15} = 5.553{,}55.$$

**II način**:

Svedimo novčane tokove na $t = 0$:

$$5.000 = K_1 v(1) = K_1 e^{-\int_0^1 (0{,}06t^2 - 0{,}13t + 0{,}15)\,dt}.$$

Rješavanjem jednačine vrijednosti po $K_1$ dobijamo traženi iznos (5.553,55 €).

**5**. Naći zbirnu sadašnju vrijednost SV konstantnog neprekidnog novčanog toka 2.000 € za 12 godina, uz konstantan intenzitet kamate 12%.

**Rješenje:**

Zadatak se može uraditi na dva načina: korišćenjem datog intenziteta kamate ili određivanjem efektivne kamatne stope *i*.

Dato je $\rho(t) = 2.000$ za $t \in (0,12)$ i $\delta(t) = \delta = 0{,}12$, pa je $SV = \int_0^{12} 2.000 e^{-\delta t}\,dt$.

Uvođenjem smjene i primjenom veze između određenog i neodređenog integrala, dobija se da je $SV = 12.717{,}87$ €.

Ako koristimo funkciju sadašnje vrijednosti (i efektivnu kamatnu stopu) $v = v(t) = v^t$, tada je $SV = \int_0^{12} 2.000 v^t dt = \left(\text{Njutn-Lajbnicova formula}\right) = 2.000 \frac{v^{12}-1}{\ln v}$, gdje je $\mathrm{e}^{\delta} = 1+i$, tj. $\mathrm{e}^{0,12} = 1+i$, pa je $i = 0,1274968516$, a $v = \frac{1}{1,1274968516}$.

Poslije računa dobija se da je $SV$ = 12.717,87 €.

**6**. Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je na intervalu [3,5] $\delta(t) = \frac{1}{t(t-1)}$, a da je van tog intervala konstantan. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Koliko novca će imati na kraju 12. godine, ako je neko lice danas uložilo 5.000 €?

**Rješenje:**

Iz uslova neprekidnosti intenziteta kamate, izjednačavajući vrijednosti za $t$ = 3 i za $t$ = 5, odredimo nepoznate konstante:

$c_1 = \frac{1}{3\cdot(3-1)} = \frac{1}{6}$ za t϶(0,3) i $c_2 = \frac{1}{5\cdot(5-1)} = \frac{1}{20} = 0,05$ za $t \geq 5$.

Odredimo diskontni faktor (funkciju sadašnje vrijednosti) u sva tri slučaja.

1. Za t϶(0,3)

$$v(t) = e^{-\int_0^t \frac{1}{6} ds} = e^{-\frac{1}{6}s\Big|_0^t} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t}.$$

2. Za t϶(3,5)

$$v(t) = e^{-\left(\frac{1}{6}s\Big|_0^3 + \int_3^t \frac{1}{s(s-1)} ds\right)}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata riješimo drugi integral:

$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$, tj. $\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A(s-1)+Bs}{s(s-1)}$, a odavde je $A(s-1)+Bs = 1$, tj. $(A+B)s - A = 1$, odakle je $-A = 1$ i $A+B = 0$, odnosno $A$ = -1 i $B$ = 1.

Sada je

$$v(t) = e^{-\left(0,5+\int_3^t\left(-\frac{1}{s}\right)ds+\int_3^t \frac{1}{s-1}ds\right)} = \langle \text{s-1 = u} \rangle = e^{-\left(0,5-\ln s\big|_3^t+\int_2^{t-1}\frac{1}{u}du\right)} =$$

$$e^{-0,5+\ln t-\ln 3+\ln u\Big|_2^{t-1}} = e^{-2,2918+\ln t-\ln(t-1)} = \frac{t}{t-1}e^{-2,2918} = 0,1\frac{t}{t-1}.$$

3. Za $t \geq 5$ redom imamo

$$v(t)= e^{-\left(0,5-\ln s\Big|_3^5+\ln(s-1)\Big|_3^5+\int_5^t \frac{1}{20}ds\right)} = e^{-(0,5-\ln 5+\ln 3+\ln 4-\ln 2+0,05t-0,05\cdot 5)} = e^{-0,4323-0,05t} .$$

Na kraju, jednačina vrijednosti glasi $K \cdot v(12) = 5.000$, tj. $K \cdot e^{-0,4323-0,05\cdot 12} = 5.000$, pa je traženi iznos $K$ = 14.037,88 €.

7. Neka je intenzitet kamate u trenutku $t$ dat sa $\delta(t) = 0,2 \cdot e^{-0,03t}$.

a) Pokazati da je funkcija sadašnje vrijednosti data sa $v(t) = e^{\frac{20}{3}(e^{-0,03t}-1)}$. Provjeriti da važi i obrnuto.

b) Naći sadašnju vrijednost niza 2 godišnje uplate, početkom godine, od po 1.000 €, od kojih je prva u trenutku $t$ = 1.

c) Provjeriti da konstantan intenzitet kamate δ, za godinu dana, za koju uplate iz b) imaju istu sadašnju vrijednost kao pod b), približno iznosi 0,1939 (19,39%). Koliko iznosi njemu ekvivalentna godišnja dekurzivna kamatna stopa $i$?

**Rješenje:**

a) Kako je $\delta_1(t) = 0,2 \cdot e^{-0.03t}$, to je

$$v(t) = e^{-\int_0^t 0,2e^{-0.03s}ds}$$

Uvođenjem smjene -0.03s = u, -0.03 $ds = du$, $ds$ = - $\dfrac{du}{0.03}$, dobija se:

$$v(t) = e^{-\left(-\frac{0.2}{0.03}\cdot e^{-0.03s}\Big|_0^t\right)} = e^{-\left(\left(-\frac{0.2}{0.03}\cdot e^{-0.03t}\right)-\left(-\frac{0.2}{0.03}\cdot e^{0}\right)\right)}$$ pa funkcija sadašnje vrijednosti glasi:

$$v(t) = e^{\frac{20}{3}\left(e^{-0.03t}-1\right)}.$$

Lako se provjerava da je $\delta(t) = -\dfrac{v'(t)}{v(t)}$.

b) $SV = 1.000 \cdot v(1) + 1.000 \cdot v(2) = 1.000 e^{\frac{20}{3}\left(e^{-0.03\cdot 1}-1\right)} + 1.000 e^{\frac{20}{3}\left(e^{-0.03\cdot 2}-1\right)} = 1.499,44$.

c) $SV = 1.000\left(e^{-\delta} + e^{-2\delta}\right)$, pa za δ=0,1939 , $SV = 1.502,29$.

Na kraju iz $e^{\delta} = 1+i$ dobija se $e^{0,1939} = 1+i = 1,2139$, pa konstantna efektivna stopa iznosi $i = 0,2139 = 21,39\%$.

**8**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija i da je za $t > 7$ $\delta(t) = 0,03t + 0,05$ a na intervalu [0,7] je konstantna funkcija. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 6. i krajem 8. godine osoba uplatila po 800 €, koliko će imati na kraju 9. godine?

**Rješenje:**

Zbog neprekidnosti, vrijednosti intenziteta kamate jednake su za $t = 7$, pa se lako određuje konstanta $c$ iz $\delta(t) = c; t \in [0,7]$: $C = 0,03 \cdot 7 + 0,05 = 0,26$. Dakle,

$\delta(t) = 0,26;\ t \in [0,7]$ i $\delta(t) = 0,03t + 0,05; t > 7$.

Svedimo sve novčane tokove na $t = 0$:

$K \cdot v(9) = 800 \cdot v(5,5) + 800 \cdot v(8)$, gdje je $K$ iznos na kraju 9. godine.

Da bismo odredili $K$, moramo utvrditi vrijednost diskontnog faktora $v(t)$.

1. Na intervalu $t \in [0,7]$: $v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} = e^{-\int_0^t 0,26ds} = e^{-0,26t}$.

2. Za $t > 7$:

$$v(t) = e^{-\left(\int_0^7 \delta(s)ds + \int_7^t \delta(s)ds\right)} = e^{-\left(0,26\cdot 7 - 0 + (0,03\cdot\frac{s^2}{2} + 0,05s\Big|_7^t\right)} = e^{-\left(1,82 + \left(0,03\frac{t^2}{2} + 0,05t - 0,03\frac{7^2}{2} - 0,05\cdot 7\right)\right)}$$

$$= e^{-\left(0,735 + 0,03\frac{t^2}{2} + 0,05t\right)} = e^{-0,03\cdot\frac{t^2}{2} - 0,05t - 0,735}.$$

Sada možemo odrediti traženi iznos: $K = \dfrac{800\left(v(5,5) + v(8)\right)}{v(9)} = 3.195,66$.

**9**. a) Investitor razmatra projekat čiji su troškovi na kraju prve godine 20.000 €, a prihodi krajem treće i krajem pete po 30.000 €. Naći *IRR* i dati tumačenje.

b) Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je za $t > 7$ $\delta(t) = 0,03t + 0,05$, a na intervalu [0,7] je konstantna funkcija. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 6. i krajem 8. godine osoba uplatila po 1.000 €, koliko će imati na kraju 9. godine?

**Rješenje:**

a) Novčani tokovi su: $C_1 = -20.000$, $C_3 = C_5 = 30.000$, a funkcija sadašnje vrijednosti $NSV(i) = -20.000v + 30.000v^3 + 30.000v^5$.

Odredimo *IRR* izjednačavajući funkciju *NSV* sa 0:

$NSV(i) = -20.000v + 30.000v^3 + 30.000v^5 = 0$, odakle je $-2v + 3v^3 + 3v^5 = 0$, tj. $v\left(3v^4 + 3v^2 - 2\right) = 0$. Kako je $v \neq 0$, dobija se $3v^4 + 3v^2 - 2 = 0$, a smjenom $v^2 = t$ kvadratna jednačina $3t^2 + 3t - 2 = 0$, čija su rješenja:

$t_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{6}$, tj. $t_1 = -1,45742718$ $t_2 = 0,457427107$.

Odbacujući negativno rješenje, uvrštavanjem u smjenu dobija se:

$v^2 = 0,457427107$, tj. $v = \sqrt{0,457427107}$. Kako je $\dfrac{1}{1+i} = 0,676333577$, to je $i = 0,47856 = 47,856\%$ (= *IRR*).

S aspekta finansiranja, *IRR* (47,856%) je najveća kamatna stopa do koje se investitor može zaduživati, a da projekat ostane rentabilan.

b) Iz uslova neprekidnosti za $t = 7$, odredimo konstantu $C$:

$C = 0,03 \cdot 7 + 0,05 = 0,26$.

Sada je intenzitet kamate $\delta(t) = \begin{cases} 0,26, & t \in [0,7] \\ 0,03t + 0,05, & t > 7 \end{cases}$.

Uopšteni diskontni faktor (funkcija sadašnje vrijednosti) $v = v(t)$ određen je u prethodnom zadatku.

Dakle, $v(t) = \begin{cases} e^{-0,26t}, & t \in [0,7] \\ e^{-0,015t^2 - 0,05t - 0,735}, & t > 7 \end{cases}$.

Prema principu ekvivalencije, jednačina vrijednosti za $t = 0$ glasi:

$1.000v(5,5) + 1.000v(8) = K \cdot v(9)$.

Dalje je, $V(5,5) = e^{-0,26 \cdot 5,5} = 0,239308922$, $V(8) = e^{-0,735 - 0,015 \cdot 8^2 - 0,05 \cdot 8} = 0,123070243$,

$V(9) = e^{-0,735 - 0,015 \cdot 9^2 - 0,05 \cdot 9} = 0,090717953$, pa je $K = \dfrac{1.000\left(v(5,5) + v(8)\right)}{v(9)} = 3.994,58$€.

**10**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija linearna na intervalu [0,2] i konstantna za $t > 2$, kao i da je $\delta(1) = 0,05$, $\delta(3) = 0,07$. Ako je početkom svake od prve 4 godine osoba uplaćivala po 2.000 €, koliki je ukupan akumulirani iznos na kraju trećeg kvartala 6. godine?

**Rješenje:**

Odredimo funciju $\delta(t)$. Ona je konstantna na intervalu $(2, +\infty)$ i $\delta(3) = 0,07$, pa je $\delta(t) = 0,07$ za sve vrijednosti $t > 2$. Kako je funkcija neprekidna, to je $\delta(2) = 0,07$.

Funkcija $\delta(t)$ linearna je na intervalu $[0,2]$ i poznate su njene vrijednosti u dvije tačke tog intervala: $\delta(1)=0,05$ i $\delta(2)=0,07$. Postavljajući jednačinu prave kroz 2 tačke, dobija se:

$$\delta(t)=\delta(1)+\frac{\delta(2)-\delta(1)}{2-1}(t-1)=0,05+0,02(t-1)=0,02t+0,03.$$

Koristi se jednačina prave koja prolazi kroz dvije tačke $(x_1,y_1)$ i $(x_2,y_2)$:

$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1-x)$. Na drugi način, iz $\delta(t)=at+b$, koeficijenti $a$ i $b$ mogli su se odrediti rješavanjem 2 linearne jednačine sa 2 nepoznate: $\delta(1)=0,05=a+b$, $\delta(2)=0,07=2a+b$.

Dakle, izraz za funkciju $\delta(t)$ glasi:

$$\delta(t)=\begin{cases}0,02t+0,03, & t\in[0,2]\\ 0,07, & t>2\end{cases}.$$

Kako trenutak kada se završava treći kvartal 6. godine odgovara vrijednosti $t = 5,75$, na osnovu teoreme o faktoru akumulacije, ukupna akumulirana vrijednost datih uplata u tom trenutku je:

$$2.000e^{\int_0^{5,75}\delta(t)dt}+2.000e^{\int_1^{5,75}\delta(t)dt}+2.000e^{\int_2^{5,75}\delta(t)dt}+2.000e^{\int_3^{5,75}\delta(t)dt}.$$

Iz:

$$\int_0^{5,75}\delta(t)dt=\int_0^{2}\delta(t)dt+\int_2^{5,75}\delta(t)dt=\int_0^{2}(0,02t+0,03)dt+\int_2^{5,75}0,07dt=$$

$$\left.(0,02\frac{t^2}{2}+0,03t)\right|_0^2+0,07t\,|_2^{5,75}=0,3625,$$

$$\int_1^{5,75}\delta(t)dt=\int_1^{2}\delta(t)dt+\int_2^{5,75}\delta(t)dt=\int_1^{2}0,02t+0,03dt+\int_2^{5,75}0,07dt=$$

$$\left.(0,02\frac{t^2}{2}+0,03t)\right|_1^2+0,07t\,|_2^{5,75}=0,3225,$$

$$\int_2^{5,75}\delta(t)dt=\int_2^{5,75}0,07dt=0,07t\,|_2^{5,75}=0,2625 \text{ i}$$

$$\int_3^{5,75}\delta(t)dt=\int_3^{5,75}0,07dt=0,07t\,|_3^{5,75}=0,1925,$$

dobija se traženi iznos:

$$2.000e^{0,3625}+2.000e^{0,3225}+2.000e^{0,2625}+2.000e^{0,1925}=10.659,89\text{ €}.$$

Zadatak se mogao uraditi i korišćenjem diskontnog faktora $v(t)$, tj. svođenjem novčanih tokova na trenutak $t=0$, što prepuštamo čitaocu.

**11**. Dat je intenzitet kamate:

$$\delta(t)=\begin{cases} 0,04, & t\in[0,2] \\ 0,05, & t\in(2,4) \\ 0,6e^{-0,04t}, & t\in[4,+\infty) \end{cases}.$$

Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako osoba želi da prima po 4.000 €, krajem trećih kvartala 3, 4. i 5. godine, koliko danas treba da uplati?

**Rješenje:**

Funkcija sadašnje vrijednosti glasi:

$$v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}.$$

S obzirom na to da je funkcija $\delta(t)$ definisana dio po dio, izraz za $v(t)$ zavisiće od vrijednosti $t$.

Za vrijednosti $t\in[0,2]$ imamo $\int_0^t \delta(s)ds=\int_0^t 0,04ds=0,04t$, pa je na tom intervalu $v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}=e^{-0,04t}$.

Za vrijednosti $t\in(2,4)$ je $\int_0^t \delta(s)ds=\int_0^2 \delta(s)ds+\int_2^t \delta(s)ds=\int_0^2 0,04ds+\int_2^t 0,05ds=$ $0,04s\,|_0^2+0,05s\,|_2^t=0,08+0,05t-2\cdot 0,05=0,05t-0,02,$

pa je na tom intervalu $v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}=e^{-0,05t+0,02}$.

Za vrijednosti $t\in[4,+\infty)$ imamo $\int_0^t \delta(s)ds=\int_0^2 \delta(s)ds+\int_2^4 \delta(s)ds+\int_4^t \delta(s)ds=\int_0^2 0,04ds+$ $\int_2^4 0,05ds+\int_4^t 0,6e^{-0,04s}ds=0,04s\,|_0^2+0,05s\,|_2^4+0,6\cdot\frac{e^{-0,04s}}{-0,04}\,|_4^t=0,08+0,2-0,1+$ $\frac{0,6}{-0,04}(e^{-0,04t}-e^{-0,04\cdot 4})=0,18-15(e^{-0,04t}-e^{-0,16})=12,96-15e^{-0,04t}$, pa je na tom intervalu $v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}=e^{-12,96+15e^{-0,04t}}$.

Izraz za funkciju sadašnje vrijednosti sada možemo kompaktno zapisati na sljedeći način:

$$v(t)=\begin{cases} e^{-0,04t}, & t\in[0,2] \\ e^{-0,05t+0,02}, & t\in(2,4) \\ e^{-12,96+15e^{-0,04t}}, & t\in[4,+\infty) \end{cases}.$$

Konačno, ako osoba želi da prima po 4.000 €, krajem 3. kvartala 3, 4. i 5. godine (odnosno u trenucima $t=2,75$, $t=3,75$ i $t=4,75$) danas treba da uplati iznos $K$ koji je jednak zbiru sadašnjih vrijednosti svih budućih isplata, tj:

$$K=4.000\cdot v(2,75)+4.000\cdot v(3,75)+4.000\cdot v(4,75)=$$

$$=4.000\cdot e^{-0,05\cdot 2,75+0,02}+4.000\cdot e^{-0,05\cdot 3.75+0,02}+4.000\cdot e^{-12,96+15e^{-0,04\cdot 4,75}}$$

$$=9.229,61 \text{ €}.$$

**12**. Ako je kapitalni izdatak za mašinu A danas 720.000 €, a njen vijek trajanja 6 godina, da li je mašina A rentabilna ako je kamatna stopa 10% godišnje, a neto godišnji prihodi su: 450.000 €, 220.000 €, 200.000 €, 130.000 €, 130.000 €, 130.000 €, respektivno za 1, 2, ... 6. godinu. Primijeniti metod sadašnje vrijednosti.

**Rješenje:**

$T_0 = 720.000$, $P_1 = 450.000$, $P_2 = 220.000$, $P_3 = 200.000$, $P_4 = P_5 = P_6 = 130.000$.

*Neto efekat investicije = Sadašnja vrijednost prihoda – Sadašnja vrijednost troškova*, pa treba naći sadašnje vrijednosti prihoda i troškova.

$$SV_P=\frac{450.000}{1,1}+\frac{220.000}{1,1^2}+\frac{200.000}{1,1^3}+\frac{130.000}{1,1^4}+\frac{130.000}{1,1^5}+\frac{130.000}{1,1^6}=$$

$$409.090,91+181.818,18+150.262,96+88.791,75+80.719,77+73.381,61=$$

$$984.065,18.$$

Posljednja tri sabirka mogla su se sabirati po geometrijskoj progresiji.

Kako je $SV_T=720.000$, to je $NEI=SV_P-SV_T=984.065,18-720.000$ $=264.065,18>0$, pa je nabavka mašine rentabilna.

**13**. Odrediti neto efekat sljedeće investicije: početno ulaganje je 1.000.000 €, a zatim svake godine u toku sljedećih 9 godina po 200.000 €. Prihodi su po 500.000 € krajem svake godine za 10 godina, a vrijednost investicije na kraju desete godine je 800.000 €. Kamatna stopa je 11% *p. a. d.* Izračunati prosječni godišnji neto efekat investicije.

**Rješenje:**

Prvo ćemo izračunati neto efekat investicije, tj. naći ćemo sadašnju vrijednost prihoda i troškova.

$$SV_T = 1.000.000 + \frac{200.000}{1,11} + \frac{200.000}{1,11^2} + ... + \frac{200.000}{1,11^9} =$$

$100.0000 + \frac{200.000}{1,11^9} \cdot (1,11^8 + 1,11^7 + ... + 1) = 100.0000 + \frac{200.000}{1,11^9} \cdot \frac{1,11^9 - 1}{1,11 - 1}$, pa se nakon računa dobija $SV_T = 2.107.409,51$.

$$SV_P = \frac{500.000}{1,11} + \frac{500.000}{1,11^2} + ... + \frac{500.000}{1,11^{10}} + \frac{800.000}{1,11^{10}} =$$

$$\frac{500.000}{1,11^{10}} \cdot \frac{1,11^{10} - 1}{1,11 - 1} + \frac{800.000}{1,11^{10}} = 3.226.363,59.$$

Otuda je $NEI = SV_P - SV_T = 3.226.363,59 - 2.107.409,51 = 1.118.954,08$.

Prosječni godišnji neto efekat investicije je

$$a = NEI \cdot 1,11^{10} \cdot \frac{1,11 - 1}{1,11^{10} - 1} = 190.000 \text{ €}.$$

**14**. a) Koristeći metodu EGT odrediti prosječni godišnji trošak sljedeće investicije koja traje 8 godina: početno ulaganje je 8.000 €, a zatim krajem svake godine, u toku narednih 5 godina, po 900 €. Kamatna stopa je 7%.

b) Ako su prihodi po 1.100 € krajem svake godine za 8 godina, a vrijednost investicije na kraju 8. godine 6.000 €, koliki je prosječni godišnji prihod uz kamatnu stopu 7%?

c) Koliko iznosi prosječni godišnji neto efekat ove investicije?

**Rješenje**:

a) Neka je $q = 1,07$ faktor akumulacije koji odgovara datoj kamatnoj stopi. Ukupnu sadašnju vrijednost troškova $SV_T$ dobijamo kada saberemo početni trošak i sadašnje vrijednosti godišnjih troškova:

$$SV_T = 8.000 + \frac{900}{q} + \frac{900}{q^2} + \ldots + \frac{900}{q^5} = 8.000 + \frac{900}{q^5} \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 11.690,18.$$

Prosječni godišnji trošak $a_T$ dobijamo kao visinu anuiteta od ukupne sadašnje vrijednosti troškova, tj. iz formule za anuitet:

$$a_T = SV_T \cdot q^8 \frac{q-1}{q^8-1} = 1.957,73.$$

Primijetimo da smo računali prosječne godišnje troškove do 8. godine, jer projekat traje 8 godina.

Vrijednost $a_T$ mogli smo izračunati i kao zbir anuiteta izračunatog od nabavne vrijednosti (troška za $t=0$) i anuiteta od zbirne sadašnje vrijednosti troškova održavanja (tj. troškova za $t>0$).

b) Ukupnu sadašnju vrijednost prihoda $SV_P$ dobijamo sabiranjem sadašnjih vrijednosti godišnjih prihoda i sadašnje vrijednosti investicije na kraju 8. godine:

$$SV_P = \frac{1.100}{q} + \frac{1.100}{q^2} + \ldots + \frac{1.100}{q^8} + \frac{6.000}{q^8} = \frac{1.100}{q^8}\frac{q^8-1}{q-1} + \frac{6.000}{q^8} = 10.060,48.$$

Analogno s prethodnim dijelom zadatka, prosječni godišnji prihod $a_P$ dobijamo formulom: $a_P = SV_P \cdot q^8 \dfrac{q-1}{q^8-1}$.

Račun prepuštamo čitaocu.

c) Prosječni godišnji neto efekat je razlika $a_P - a_T$.

**15**. Investitor razmatra projekat čiji su troškovi na kraju 2. godine 30.000 €, a prihodi krajem 4. i krajem 6. godine po 40.000 €. Naći *IRR* i dati tumačenje.

**Rješenje:**

Novčani tokovi su $C_2 = -30.000$, $C_4 = C_6 = 40.000$.

Tada je funkcija sadašnje vrijednosti $NSV(i) = -30.000v^2 + 40.000v^4 + 40.000v^6$.

Kako je *IRR* rješenje jednačine $NSV(i) = 0$, to se dobija jednačina $-30.000v^2 + 40.000v^4 + 40.000v^6 = 0$, pa se nakon skraćivanja sa $10.000v^2$ ($v \neq 0$) dobija bikvadratna jednačina $-3 + 4v^2 + 4v^4 = 0$, koja se rješava smjenom $v^2 = t$. Sada iz kvadratne jednačine imamo $4t^2 + 4t - 3 = 0$, odakle je $t = 0,5$ ili $t = -3,5$. Vraćanjem u smjenu $v = \sqrt{0,5} = 0,707106$, negativno rješenje se odbacuje. Iz $v = \dfrac{1}{1+i}$ dobija se da je $IRR = i = 0,4142 = 41,42\%$, što znači da je najveća kamatna stopa do koje se investitor može zaduživati, a da ne posluje s gubitkom, 41,42%.

**Napomena**: U ovom zadatku *IRR* je izračunat egzaktno, rješavanjem kvadratne jednačine. U opštem slučaju, *IRR* ne može se izračunati tačno već se računa približno, numeričkim metodama, uz zadovoljavajuću tačnost. Za potrebe ovog kursa, mi ćemo koristiti metodu pokušaja i metodu linearne interpolacije.

**16**. Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je za $t > 7$ $\delta(t) = 0,04t + 0,02$, a na intervalu [0,7] je konstantna funkcija. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 5. i krajem 6. godine osoba uplatila po 600 €, koliko će imati na kraju 11. godine?

**Rješenje:**

Intenzitet kamate $\delta(\mathrm{t}) = \begin{cases} c, & t \in [0,7] \\ 0,04t + 0,02, & t > 7 \end{cases}$ je neprekidna funkcija, pa je

$c = 0,04 \cdot 7 + 0,02 = 0,3$, odakle je

$$\delta(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0,3; & t \in [0,7] \\ 0,04t + 0,02; & t > 7 \end{cases}.$$

Sada je:

1. za $t \in [0,7]$: $v(t) = e^{-\int_0^t 0,3ds} = \mathrm{e}^{-0,3s\big|_0^t} = e^{-0,03t}$.

2. za $t > 7$: $v(t) = e^{-\left(\int_0^7 0,3ds + \int_7^t (0,04s+0,02)ds\right)} = e^{-\left(0,3s\big|_0^7 + 0,04\cdot\frac{s^2}{2}\big|_7^t + 0,02s\big|_7^t\right)} =$

$= e^{-\left(0,3\cdot 7 + 0,04\cdot\left(\frac{t^2}{2} - \frac{49}{2}\right) + 0,02\cdot(t-7)\right)} = e^{-0,02t^2 - 0,02t - 0,98}$.

Dakle,

$$v(\mathrm{t}) = \begin{cases} e^{-0,03t}, & t \in [0,7] \\ e^{-0,02t^2 - 0,02t - 0,98}, & t > 7 \end{cases}.$$

Iz $K_{11} \cdot v(11) = 600 \cdot v(4,5) + 600 \cdot v(6)$ dobija se $K_{11} = \dfrac{600\left(v(4,5) + v(6)\right)}{v(11)} = 38.289,46$ €.

**17**. Dat je intenzitet kamate $\delta(t) = \begin{cases} 0,05, & t \in [0,2] \\ 0,03, & t \in (2,4) \\ \dfrac{1}{t(t+1)}, & t \in [4,+\infty) \end{cases}$.

Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako osoba želi da polovinom 2. godine, polovinom 3. godine i polovinom 7. godine prima po 5.000 €, koliko danas treba da uplati novca?

**Rješenje:**

Funkcija sadašnje vrijednosti je $v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$, pa ćemo je naći na intervalima $t\in[0,2]$, $t\in(2,4)$ i $t\geq 4$ redom.

1. Za $t\in[0,2]$, $v(t)=e^{-\int_0^t 0,05ds}=e^{-0,05t}$.

2. Za $t\in(2,4)$, $v(t)=e^{-\left(\int_0^2 0,05ds+\int_2^t 0,03ds\right)}=e^{-(0,05\cdot 2+0,03\cdot(t-2))}=e^{-0,04-0,03t}$.

3. Za $t\geq 4$ $v(t)=e^{-\left(\int_0^2 0,05ds+\int_2^4 0,03ds+\int_4^t \frac{ds}{s(s+1)}\right)}=e^{-0,16-\int_4^t \frac{ds}{s(s+1)}}$.

Posljednji integral ćemo izračunati metodom neodređenih koeficijenata.

$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}\Leftrightarrow 1=A(t+1)+Bt=(A+B)\cdot t+A$. Odavde je $A+B=0$ i $A=1$, tj. $A=1$ i $B=-1$, pa je $\int_4^t \frac{ds}{s(s+1)}=\int_4^t \frac{ds}{s}-\int_4^t \frac{ds}{s+1}=\left(\ln s-\ln(s+1)\right)\Big|_4^t=\ln\frac{s}{s+1}\Big|_4^t=\ln\frac{t}{t+1}-\ln\frac{4}{5}=\ln\frac{5t}{4(t+1)}$, odakle je, na ovom intervalu $v(t)=e^{-0,16-\ln\frac{5t}{4(t+1)}}=e^{-0,16}\cdot e^{-\ln\frac{5t}{4(t+1)}}=e^{-0,16}\cdot e^{\ln\frac{4(t+1)}{5t}}=\frac{4(t+1)}{5t}\cdot e^{-0,16}$.

Dakle, ukupno:

$$v(t)=\begin{cases} e^{-0,05t}; & t\in[0,2] \\ e^{-0,04-0,03t}; & t\in(2,4) \\ \frac{4(t+1)}{5t}\cdot e^{-0,16}; & t\geq 4 \end{cases}.$$

$K=5.000\cdot v(1,5)+5.000\cdot v(3,5)+5.000\cdot v(6,5)$, pa se nakon računa dobija $K=13.059,80$ €.

**18**. Neka je intenzitet kamate data sa $\delta(t)=a+be^{-at}$.

a) Pokazati da je funkcija sadašnje vrijednosti data sa $v(t)=e^{-\frac{b}{a}}\cdot e^{-at}\cdot e^{\frac{b}{a}e^{-at}}$.

b) Na osnovu toga pokazati da sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka za $n$ godina pri konstantnom novčanom toku od 1.000 € za godinu dana iznosi: $\frac{1000}{b}\left(1-e^{\frac{b}{a}(e^{-an}-1)}\right)$.

**Rješenje:**

a) $v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}=e^{-\int_0^t\left(a+be^{-as}\right)ds}=e^{-as\Big|_0^t-b\int_0^t e^{-as}ds}$.

Posljednji integral rješava se smjenom $-as = u$, pa je

$$\int_0^t e^{-as}ds=\left\langle \begin{matrix} -as=u\Rightarrow -ads=du\Rightarrow ds=-\dfrac{du}{a} \\ s=0\Rightarrow u=0;\ s=t\Rightarrow u=-at \end{matrix}\right\rangle=-\int_0^{-at} e^u\frac{du}{a}=-\frac{e^u}{a}\Bigg|_0^{-at}=-\frac{e^{-at}}{a}+\frac{1}{a},\text{ tj.}$$

$v(t)=e^{-at-b\left(-\frac{e^{-at}}{a}+\frac{1}{a}\right)}=e^{-at}\cdot e^{-\frac{b}{a}\left(1-e^{-at}\right)}=e^{-at}\cdot e^{-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\cdot e^{-at}}$, odnosno $v(t)=e^{-\frac{b}{a}}\cdot e^{-at}\cdot e^{\frac{b}{a}e^{-at}}$, što je i trebalo pokazati.

b) $SV=\int_0^n \rho(t)v(t)dt=\int_0^n 1.000\cdot e^{-\frac{b}{a}}\cdot e^{-at}\cdot e^{\frac{b}{a}e^{-at}}dt=1.000\cdot e^{-\frac{b}{a}}\cdot\int_0^n e^{-at}\cdot e^{\frac{b}{a}e^{-at}}dt$. Posljednji integral rješava se smjenom $\frac{b}{a}e^{-at}=u$. Tada je $-be^{-at}dt=du$, tj. $e^{-at}dt=-\frac{du}{b}$.

Takođe, dolazi do promjene granica: $t=0\Rightarrow u=\frac{b}{a};\ t=n\Rightarrow u=\frac{b}{a}e^{-an}$, pa je

$$SV=-1.000\cdot e^{-\frac{b}{a}}\cdot\int_{b/a}^{(b/a)\cdot e^{-an}} e^u\frac{du}{b}=-\frac{1.000}{b}e^{-\frac{b}{a}}\cdot e^u\Bigg|_{\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}\cdot e^{-an}}=-\frac{1.000}{b}e^{-\frac{b}{a}}\cdot\left(e^{\frac{b}{a}\cdot e^{-an}}-e^{\frac{b}{a}}\right),\text{ tj.}$$

$$SV=\frac{1000}{b}\left(1-e^{\frac{b}{a}(e^{-an}-1)}\right).$$

**19**. Investitor razmatra projekat kome su početni troškovi 20.000 €, kao i polovinom svake godine po 1.000 €, u toku 10 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su neprekidni, 3.000 € u toku trajanja projekta, a likvidaciona vrijednost je 15.000 €.

a) Odrediti *IRR* i dati tumačenje.

b) Naći profit/gubitak na kraju transakcije uz stopu od 10%.

**Rješenje:**

a) Novčani tokovi su:

$C_0=-20.000,\ C_{0,5}=C_{1,5}=\ldots=C_{9,5}=-1.000,\ C_{10}=15.000,\ \rho(t)=3.000, t\in[0,10]$.

Tada je funkcija sadašnje vrijednosti

$$NSV(i) = -20.000 - 1.000\left(v^{0.5} + v^{1.5} + \cdots + v^{9.5}\right) + 3.000\int_0^{10} v^t dt + 15.000 \cdot v^{10},$$

tj. $NSV(i) = -20.000 - 1.000 \cdot v^{0.5}\dfrac{v^{10}-1}{v-1} + 3.000\dfrac{v^t}{\ln v}\Bigg|_0^{10} + 15.000 \cdot v^{10}$, odnosno

$$NSV(i) = -20.000 - 1.000 \cdot v^{0.5}\frac{v^{10}-1}{v-1} + 3.000\frac{v^{10}-1}{\ln v} + 15.000 \cdot v^{10}.$$

Metodom pokušaja ćemo naći interval dužine 1% kome pripada *IRR*.

Kako je $NSV(0\%) = 15.000 > 0$, to *IRR* svakako postoji. Ova vrijednost ne može se računati iz posljednje jednačine, već se računa iz početne (kako je $i = 0$, to je $v = 1$, pa je račun lak).

Takođe, u zadatku pod b) svakako se mora naći *NSV*(10%), pa je računanje *NSV* za stopu od 10% dobar polazni korak.

$NSV(10\%) = -1.320{,}58 < 0$, što znači da je *IRR* < 10%.

Polovljenjem intervala lako se nalazi traženi interval. Ipak, kako je $NSV(0\%) = 15.000$, a $NSV(10\%) = -1.320{,}58$, jasno je da je *IRR* bliži 10%, nego 0%. Zato kao drugu vrijednost biramo 8%.

$NSV(8\%) = 899{,}71 > 0$.

Dakle, $IRR \in (8\%, 10\%)$. Dalje je $NSV(9\%) = -257{,}15 < 0$, pa je $IRR \in (8\%, 9\%)$.

Na kraju, metodom interpolacije nalazimo približno tačno rješenje – *IRR* se približno nalazi na presjeku apscisne ose i prave koja prolazi kroz tačke A(8; 899,71) i B(9; –257,15). Dakle,

$$\frac{0 - 899{,}71}{-257{,}15 - 899{,}71} = \frac{i_0 - 0{,}08}{0{,}09 - 0{,}08} \Rightarrow i_0 = 0{,}0877 \text{, pa je } IRR = 0{,}0877 = 8{,}77\%.$$

**Napomena**: U gornjoj formuli, umjesto decimalnog zapisa za stope, mogao se koristiti procentni, pa bi se rezultat odmah dobio u procentima:

$$\frac{0 - 899{,}71}{-257{,}15 - 899{,}71} = \frac{i_0 - 8\%}{9\% - 8\%} \Rightarrow i_0 = 8{,}77\%.$$

b) Već je izračunato da je $NSV(10\%) = -1.320{,}58$, što predstavlja diskontovani (na $t = 0$) gubitak, odakle je $A(10) = NSV(10\%) \cdot 1{,}1^{10} = -1.320{,}58 \cdot 1{,}1^{10} = -3.425{,}24$.

Znači, gubitak na kraju transakcije je 3.425,24 €.

**20**. a) Izračunati *IRR* ako je $c_0 = -500$, $c_3 = 600$, $c_4 = 100$.

b) Ako umjesto $c_3$ imamo da je $c_2 = 600$, bez izračunavanja odgovoriti, uz obrazloženje, da li će *IRR* biti manja? Izračunati *IRR* i u ovom slučaju i dati tumačenje. Naći profit/gubitak u $t = 5$ uz stopu zaduženja 8%.

**Rješenje:**

a) Funkcija sadašnje vrijednosti je $NSV(i) = -500 + 600v^3 + 100v^4$, pa rješavamo jednačinu $NSV(i) = 0$.

Kako je $NSV(11\%) = 4,59$ i $NSV(12\%) = -9,38$, to je $IRR \in (11\%, 12\%)$.

Dalje, metodom linearne interpolacije nalazimo približno rješenje na presjeku apscisne ose i prave koja prolazi kroz tačke A(11; 4,59) i B(12; –9,38). Dakle,

$\dfrac{0-4,59}{-9,38-4,59} = \dfrac{i_0 - 0,11}{0,12-0,11} \Rightarrow i_0 = 0,1132$, pa je $IRR = 0,1132 = 11,32\%$.

b) Kako je diskontovana vrijednost iz ranijeg perioda ($c_2 = 600$) veća od diskontovane vrijednosti kasnijeg perioda ($c_3 = 600$), to je za istu stopu $i$ $NSV_b(i) - NSV_a(i) =$ $600v^2 - 600v^3 =$ $600v^2(1-v) > 0$, pa je $NSV_b(i) > NSV_a(i)$. To znači da će u ovom slučaju *IRR* biti veći (funkcija *NSV* će „kasnije“ presjeći Ox osu, tj. *i* osu).

Iz $NSV(i) = -500 + 600v^2 + 100v^4 = 0$ (bikvadratna jednačina koja se lako rješava smjenom $v^2 = t$), nakon uvrštavanja i skraćivanja sa 100, dobija se $-5 + 6t + t^2 = 0$. Odavde je $t = 0,74166$ (odbacili smo negativno rješenje $t = -6,7417$), tj. $v = 0,86119$, a *IRR* = 16,12%. S aspekta finansiranja, ovo (16,12%) je najveća kamatna stopa do koje se investitor može zaduživati, a da projekat ostane rentabilan.

Na kraju 5. godine, uz stopu 8%, dobija se $A(5) = NSV(8\%) \cdot 1,08^5 =$ $87,91 \cdot 1,08^5 =$ $129,16$, što znači da će na kraju transakcije biti ostvaren dobitak od 129,16 €.

**21**. Investitor razmatra 2 projekta:

Prvi, kome su početni troškovi 15.000 € kao i polovinom svake godine po 500 €, u toku 10 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su neprekidni, 3.000 € godišnje u toku trajanja projekta, a likvidaciona vrijednost je 3.000 €.

Drugi, kome su početni troškovi 15.000 €, a prihod na kraju 10. godine je 40.000 €.

a) Naći *IRR* u oba slučaja i dati tumačenje.

b) Ako je kamatna stopa 8%, za koji projekat će se investitor odlučiti?

**Rješenje:**

*Prvi projekat*

a) Funkcija sadašnje vrijednosti za prvi projekat je

$$NSV(i)=-15.000-500v^{0.5}-500v^{1.5}-500v^{2.5}-\ldots-500_1v^{9.5}+3.000\int_0^{10}v^t dt+3.000v^{10},$$

tj. $NSV(i)=-15.000-500v^{0.5}\dfrac{v^{10}-1}{v-1}+3.000\dfrac{v^{10}-1}{\ln v}+3.000v^{10}$.

Jednačinu $NSV(i)=0$ rješavamo metodom pokušaja i linearne interpolacije.

Kako je $NSV(13\%)=314,98$ i $NSV(14\%)=-255,59$, to se interpolacijom dobija da je $IRR=13,55\%$.

Funkcija sadašnje vrijednosti za drugi projekat je $NSV(i)=-15.000+40.000v^{10}$, pa rješavajući jednačinu $NSV(i)=0$ (ne mora interpolacijom!), dobija se

$40.000v^{10}=15.000\Rightarrow v^{10}=\dfrac{15.000}{40.000}=\dfrac{15}{40}$, pa je $v=\sqrt[10]{\dfrac{15}{40}}=0,90657$, odakle je *IRR* = 10,31%.

S aspekta finansiranja, investitor se za prvi projekat može zaduživati do stope 13,55%, a za drugi do stope 10,31%, a da projekat ostane rentabilan.

b) Kako je $NSV_1(8\%)=2.438,93$, a $NSV_2(8\%)=3.527.78$, to će se, uz kamatnu stopu od 8%, investitor odlučiti za drugi projekat, iako je za njega *IRR* manja.

**22**. Investitor razmatra projekat kome su početni troškovi 40.000 €, kao i krajem svake godine po 1.000 € u toku 10 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su po 2.000 € krajem svakog kvartala u toku trajanja projekta. Naći profit/gubitak na kraju projekta uz stopu od 5%, a zatim odrediti *IRR* i dati tumačenje.

**Rješenje**:

Neka je $i$ tražena kamatna stopa i $v=\dfrac{1}{1+i}$ odgovarajući godišnji diskontni faktor. Tada je $v_1=\sqrt[4]{v}$ odgovarajući kvartalni diskontni faktor. Neto sadašnja vrijednost projekta jednaka je razlici sadašnjih vrijednosti prihoda i rashoda. Sadašnja vrijednost svih rashoda je zbir početnog troška i svih (diskontovanih) godišnjh troškova. Za 10 godina investitor će imati 40 kvartalnih prihoda, pa je sadašnja vrijednost svih prihoda jednaka zbiru (diskontovanih) kvartalnih prihoda. Dakle, izraz za neto sadašnju vrijednost projekta $NSV(i)$ glasi:

$$NSV(i) = -40.000 - 1.000v - 1.000v^2 + \ldots - 1.000v^{10} + 2.000v_1 + 2.000v_1^2 + \ldots + 2.000v_1^{40} =$$

$$-40.000 - 1.000v\frac{v^{10}-1}{v-1} + 2.000v_1\frac{v_1^{40}-1}{v_1-1}.$$

Kako neto sadašnja vrijednost projekta pri kamatnoj stopi od 5% iznosi $NSV(0,05) = 15.198,63$, možemo zaključiti da je projekat isplativ po toj kamatnoj stopi. U tom slučaju će profit na kraju projekta (nakon desetogodišnje akumulacije) iznositi $15.198,63 \cdot 1,05^{10} = 24.756,97$.

Da bismo našli $IRR$, potrebno je riješiti jednačinu $NSV(i) = 0$, koju rješavamo metodom pokušaja. Direktnom provjerom $NSV(0,13) = 46,07 > 0$, a $NSV(0,14) = -1.356,21 < 0$. Na osnovu ovih vrijednosti, $IRR$ (tj. apscisu tačke ($IRR$, 0)) možemo približno odrediti linearnom interpolacijom koristeći jednačinu prave kroz 2 tačke $(0,13; 46,0699462)$ i $(0,14; -1.356,206355)$:

$$\frac{IRR - 0,13}{0,14 - 0,13} = \frac{0 - 46,07}{-1.356,21 - 46,07} \Rightarrow \frac{IRR - 0,13}{0,01} = \frac{-46,07}{-1.402,28} = 0,0329,$$

tj. $IRR = 0,13 + 0,01 \cdot 0,0329 = 0,1304 = 13,04\%$.

Primijetimo da je $NSV(0) = 30.000 > 0$. Kako je $IRR = 13,04\%$, zaključujemo da je projekat isplativ ako se investitor zadužuje po stopi manjoj od $IRR$ (inače je neisplativ).

**23**. Osoba treba da uplati 10 puta početkom godine po 20.000 €, uz prilagođenje za inflaciju. Naći njihovu zbirnu sadašnju vrijednost ako je godišnja stopa inflacije 4%, a nominalna (*money*) stopa interesa 6% godišnje? Je li sadašnja vrijednost manja ako nema prilagođavanja za inflaciju i zašto?

**Rezultat:** $1 + i_r = \frac{1,06}{1,04} = 1,01923 \; (i_r = 1,923\%)$. $SV = 20.000 \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = 183.846,28$. Veća je ova $SV$ nego zbirna sadašnja vrijednost dobijena diskontovanjem uz nominalnu stopu od 6% (jer dijelimo manjim brojem). To je u skladu s očuvanjem buduće vrijednosti novca (zaštita od inflacije).

**24**. a) Ukoliko je intenzitet kamate $\delta(t) = \frac{1}{5(2+t)^3}$ i $K_0 = 700€$, izračunati iznos kamate zarađene u toku 6. godine.

b) Odrediti nominalnu stopu koja odgovara polugodišnjem kapitalisanju ako je konstantni intenzitet kamate $\delta = 0{,}18$. Da li je u ovom slučaju veća nominalna kamatna stopa ili intenzitet kamate?

**Rezultat**: a) $I = K_6 - K_5 = 716{,}60 - 716{,}26 = 0{,}34$ . b) $i = e^{\delta} - 1 = 0{,}1972 \Rightarrow$

$q_2 = \sqrt{q} = \sqrt{1+i} = 1{,}0942 \Rightarrow p_2 = 9{,}42 \Rightarrow p_n = 2 \cdot p_2 = 2 \cdot 9{,}42 = 18{,}84$.

Dakle, 18% < 18,84%, pa je nominalna kamatna stopa veća od intenziteta kamate.

**25**. a) Na osnovu nominalne kamatne stope od 7%, koja odgovara kvartalnom ukamaćivanju, naći konstantan intenzitet kamate $\delta$. Da li je u ovom slučaju veća nominalna kamatna stopa ili intenzitet kamate?

b) Osoba ulaže na kraju 2. godine, na kraju 3. godine i na kraju 5. godine po 400 €. Ako je intenzitet kamate jednak $\delta(t) = 0{,}06t + 0{,}01$, naći akumulirani iznos na kraju 8. godine.

**Rezultat**: a) $p_n = 4 \cdot p_4 \Rightarrow p_4 = 1{,}75$ . $1+i = \left(1 + \frac{1{,}75}{100}\right)^4 \Rightarrow i = 0{,}07186$,

$e^{\delta} = 1+i \Rightarrow \delta = \ln(1+i) = 0{,}0694 = 6{,}94\% < 7\%$; b) $K_8 = 5510{,}77$.

**26**. Neka je efektivna kamatna stopa 12%. Naći zbirnu sadašnju vrijednost renti koje se isplaćuju u godišnjem iznosu 500 € od kraja 1. do kraja 10. godine, neprekidno. Koliki je intenzitet kamate u procentima?

**Rezultat**: 11,34%.

**27**. Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je za $t > 5$ $\delta(t) = 0{,}04$, a na intervalu [0,5] je linearna funkcija. Ako je $\delta(1) = 0{,}03$, odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 4. godine i krajem 7. godine osoba uplatila po 2.000 €, koliko će imati na kraju 10. godine?

**Rezultat**: 4.841,57 €.

**28**. Intenzitet kamate na neki depozit bio je na početku godine 0,12, sredinom godine 0,08 i 0,04 na kraju godine. Naći akumulirani iznos na kraju godine, ako je početkom godine uloženo 6.000 €, uz pretpostavku da je intenzitet kamate za godinu bila kvadratna funkcija vremena.

**Rezultat**: 6.499,72 €.

**29**. a) Naći zbirnu sadašnju vrijednost diskretnih godišnjih dekurzivnih novčanih tokova $c_t$ = 1.000, za $t$ = 1, ..., 12, uz konstantan intenzitet kamate 0,15.

b) Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je na intervalu [0,3) $\delta(t) = 0,02$, za $t > 5$ $\delta(t) = 0,05$, a da je na intervalu [3,5] linearna funkcija. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Koliko je novca uloženo danas ako na kraju 10. godine na računu ima 10.000 €?

**Rezultat**: a) 5.157,75 €; b) 6.836,61 €.

**30**. a) Naći zbirnu sadašnju vrijednost konstantnog neprekidnog novčanog toka $\rho(t) = 1.000$, $t \in [0,15]$, uz konstantan intenzitet kamate $\delta(t) = 0,1$.

b) Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je na intervalu [4,6] $\delta(t) = \dfrac{1}{t(t+1)}$, a da je van tog intervala konstantan. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Koliko novca će imati na kraju 10. godine, ako je danas uloženo 5.000 €?

**Rezultat**: a) 7.768,7 €; b) 7.195,4 €.

**31**. a) Ako je intenzitet kamate dat sa $\delta(t) = 0,03 \cdot 0,45^t$, naći zbirnu sadašnju vrijednost 100 novčanih jedinica datih na kraju 2. i 4. godine.

b) Za koji konstantan intenzitet kamate (formirati jednačinu pa je približno riješiti metodom pokušaja) za godinu dana će uplate iz a) imati sadašnju vrijednost 100?

**Rezultat**: a) 200,91; b) 63,31%.

**32**. Neka je intenzitet kamate u trenutku $t$ dat sa $\delta(t) = 0,1 \cdot e^{-0,07t}$.

a) Pokazati da je funkcija sadašnje vrijednosti data sa $v(t) = e^{\frac{10}{7}(e^{-0,07t}-1)}$. Provjeriti da važi i obrnuto.

b) Naći sadašnju vrijednost niza 4 godišnje uplate, početkom godine, od po 1.000 €, od kojih je prva u trenutku $t$ = 1.

c) Provjeriti da konstantan intenzitet kamate δ, za godinu dana, za koju uplate iz b) imaju istu sadašnju vrijednost kao pod b), približno iznosi 0,09? Koliko iznosi njoj ekvivalentna godišnja dekurzivna kamatna stopa $i$?

**Rezultat**: b) 3.206,1; c) $i$ = 0,0942 = 9,42%.

**33**. Dat je intenzitet kamate $\delta(t)=\begin{cases}0.01t^2+0,02t+0,01\,; & t\in[0,2]\\ \dfrac{1}{(t+1)(t-1)}; & t>2\end{cases}$. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako osoba želi da polovinom druge, polovinom 5. godine i polovinom 7. godine prima po 2.000 €, koliko danas treba da uplati?
**Rezultat**: 4.468,62 €.

**34**. Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija i da je za $t$ > 6 $\delta(t)=0,04t+0,02$, a na intervalu [0,6] je konstantna funkcija. Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 5. godine i krajem 7. godine osoba uplatila po 400 €, koliko će imati na kraju 12. godine?
**Rezultat**: 8.731,61 €.

**35**. a) Neka je efektivna kamatna stopa 8%. Naći zbirnu sadašnju vrijednost renti koje se isplaćuju u godišnjem iznosu 200 € od kraja 1. do kraja 8. godine, neprekidno. Koliki je intenzitet kamate?

b) Poznato je da je intenzitet kamate neprekidna funkcija, za $t$ > 5 je konstantna, a na intervalu [0,5] je linearna funkcija. Ako je $\delta(1)=0,04$ i $\delta(4)=0,02$, odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 4. godine i krajem 7. godine osoba uplatila po 700 €, koliko će imati na kraju 9. godine?
**Rezultat**: a) 1.002,21; 0,07696 (7,696%); b) 1.477,85 €.

**36**. a) Neka je efektivna kamatna stopa 15%. Naći zbirnu sadašnju vrijednost dekurzivnih renti koje se isplaćuju u godišnjem iznosu 600 € tokom 25 godina, diskretno. Koliki je intenzitet kamate u procentima?

b) Poznato je da je funkcija neprekidna funkcija i da je za $t$ > 6 $\delta(t)=0,08$, a na intervalu [0,6] je konstantna funkcija $\delta(t)=0,05$, odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 4. godine i krajem 7. godine osoba uplatila po 700 €, koliko će imati na kraju 10. godine?
**Rezultat**: a) 13,97%; b) 1.982,2 €.

**37**. a) Izračunati *IRR* ako je $c_0$ = –400, $c_3$ = 500, $c_4$ = 100.

b) Ako umjesto $c_3$ imamo da je $c_2 = 500$, bez izračunavanja odgovoriti, uz obrazloženje, da li će *IRR* biti manja? Izračunati *IRR* i u ovom slučaju i dati tumačenje. Naći profit/gubitak u $t = 6$ uz stopu zaduženja 8%.

**Rezultat**: a) 13,7%; b) 19,39%; A(6) = 162,13.

**38**. Investitor razmatra projekat kome su početni troškovi 20.000 €, kao i krajem svake godine po 1.000 €, u toku 20 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su neprekidni, 3.000 € u toku trajanja projekta, a likvidaciona vrijednost je 13.000 €.

a) Odrediti *IRR* i dati tumačenje.

b) Naći profit/gubitak na kraju transakcije uz stopu od 10%.

**Rezultat**: a) 10,156%; b) *NSV* = 216,25, pa je A(20) = 1.454,798.

**39**. Neka je intenzitet kamate dat sa $\delta(t) = c + de^{-ct}$.

a) Pokazati da je funkcija sadašnje vrijednosti data sa $v(t) = e^{-\frac{d}{c}} \cdot e^{-ct} \cdot e^{\frac{d}{c}e^{-ct}}$.

b) Na osnovu toga pokazati da sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka za $n$ godina pri konstantnom novčanom toku od 1.000 € za godinu dana iznosi:

$$\frac{1000}{d}\left(1 - e^{\frac{d}{c}(e^{-cn}-1)}\right).$$

**40**. Investitor razmatra 2 projekta:

Prvi, kome su početni troškovi 10.000 €, kao i polovinom svake godine po 500 €, u toku 15 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su neprekidni, 2.000 € godišnje u toku trajanja projekta, a likvidaciona vrijednost je 1.000 €.

Drugi, kome su početni troškovi 20.000 €, a prihod na kraju 15. godine je 90.000 €.

a) Naći *IRR* u oba slučaja i dati tumačenje.

b) Ako je kamatna stopa 9%, za koji projekat će se investitor odlučiti?

**41**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija i da je za $t > 5$ $\delta(t) = 0{,}06$, a na intervalu [0,5] je kvadratna funkcija. Ako je $\delta(0) = 0{,}07$ i $\delta(3) = 0{,}04$, odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako je polovinom 5. i polovinom 6. godine osoba uplatila po 5.000 €, koliko će imati na kraju 15. godine?

**42**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija i to kvadratna na intervalu [0,2], pri čemu je $\delta(0)=0,1$ $\delta(1)=0,09$, a zatim linearna za $t > 2$, pri čemu je $\delta(3)=0,04$ i $\delta(4)=0,05$. Naći iznos na kraju 10. godine ako osoba uloži po 10.000 € krajem prvih mjeseci prve 3. godine.

**43**. Investitor razmatra dva projekta. Za projekat A imao bi neprekidan rashod 4.000 € u toku 8 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su 15.000 € krajem 3. godine i 20.000 € krajem 5. godine. Početni ulog za projekat B koji traje 10 godina je 21.000 €, a prihodi su, počev od 2. godine, svake godine po 3.000 €. Za oba projekta likvidaciona vrijednost je po 5.000 €.

a) Odrediti *IRR* i dati tumačenje. Koji će se projekat odabrati?

b) Za koji projekat bi se investitor odlučio uz kamatnu stopu od 7%?

**44**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija i to kvadratna na intervalu [0,3], pri čemu je $\delta(0)=0,2$ $\delta(1)=0,07$, a linearna za $t > 3$, pri čemu je $\delta(4)=0,05$, i $\delta(5)=0,06$. Naći iznos na početku 9. godine ako osoba uloži po 5.000 € krajem trećih kvartala prve dvije godine.

**45**. Dat je intenzitet kamate: $\delta(t)=\begin{cases} 0,06\ ; & t\in[0,3] \\ 0,04\ ; & t\in(3,6] \\ \dfrac{1}{t(t+2)}; & t>6 \end{cases}$.

Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako osoba želi da polovinom 3. godine, polovinom 5. godine i polovinom 7. godine prima po 2.000 €, koliko danas treba da uplati novca?

**46**. Dat je intenzitet kamate $\delta(t)=0,02\cdot t+0,03$ na intervalu [0,1]; δ je konstanta van navedenog intervala i neprekidna je funkcija. Ako je polovinama prve dvije godine osoba uplaćivala po 3.000 €, koliki je ukupan akumulirani iznos na kraju prvog kvartala 8. godine?

**47**. Investitor razmatra projekat kome su troškovi na kraju 1. godine 10.000 €, a prihodi su krajem 2. i 3. godine po 7.000 €.

a) Odrediti *IRR* i dati tumačenje.

b) Odrediti da li će uz stopu od 10% investitor na kraju transakcije (kraj 3. godine) ostvariti profit ili gubitak i koliko iznosi?

**48**. Investitor razmatra projekat čiji su početni troškovi 60.000 €, kao i krajem svake godine po 2.500 € u toku 15 godina, koliko i traje projekat. Prihodi su 10.000 € neprekidno u toku trajanja projekta.

a) Odrediti *IRR* i dati tumačenje.

b) Odrediti da li će uz stopu od 11% investitor na kraju transakcije ostvariti profit ili gubitak i koliko iznosi?

**49**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija i da je za $t > 7$ $\delta(t) = 0,06$, a na intervalu [0,7] je kvadratna funkcija. Ako je $\delta(0) = 0,07$ i $\delta(3) = 0,04$, odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 5. godine i polovinom 8. godine osoba uplatila po 5.000 €, koliko će imati na kraju 15. godine?

**50**. Poznato je da je intenzitet kamate $\delta(t)$ neprekidna funkcija i da je za $t > 3$ $\delta(t) = 0,06$, a na intervalu [0,3] je linearna funkcija. Ako je $\delta(0) = 0,07$, odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom 2. godine i polovinom 6. godine osoba uplatila po 5.000 €, koliko će imati na kraju 8. godine?

**51**. Dat je intenzitet kamate: $\delta(t) = \begin{cases} 0,03\ ; & t \in [0,3] \\ 0.02t\text{-}0,02\ ; & t \in (3,5] \\ \dfrac{1}{(t+1)(t-1)}; & t > 5 \end{cases}$.

Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako osoba želi da polovinom 2. godine, polovinom 5. godine i polovinom 7. godine prima po 4.000 €, koliko danas treba da uplati novca?

## 5. Osiguranje

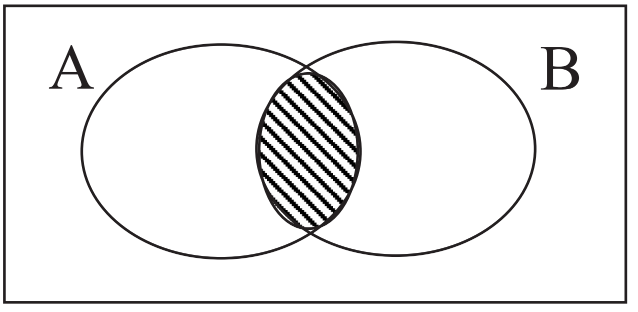
**1**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = 100.000\sqrt{1-\dfrac{x^2}{103^2}}$.

a) Naći vjerovatnoću da od dvije osobe stare 55 i 60 godina nijedna neće biti mrtva nakon 10 godina, ako umiru nezavisno jedna od druge.

b) Naći vjerovatno trajanje života osobe stare 53 godine.

**Rješenje**:

a) Vjerovatnoća da nijedna od dvije osobe neće biti mrtva nakon 10 godina znači da će obje ove osobe biti žive nakon tog perioda. Događaje je poželjno prikazati Venovim dijagramima.




Neka je: A – događaj da osoba stara 55 godina doživi narednih 10 godina;
B – događaj da osoba stara 60 godina doživi narednih 10 godina.
Tražena vjerovatnoća je $p$(A∩B). Zbog nezavisnosti događaja A i B ona je jednaka

$$p(A \cap B) = p(A)\, p(B) = \frac{l_{65}}{l_{55}} \cdot \frac{l_{70}}{l_{60}} .$$

Dalje imamo: $l_{55} = 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{55^2}{103^2}} = 84.549,67$ ;

$l_{65} = 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{65^2}{103^2}} = 77.572,75$ ; $l_{60} = 100000 \cdot \sqrt{1 - \frac{60^2}{103^2}} = 81.281,33$ i

$l_{70} = 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{70^2}{103^2}} = 73.357,21$ , pa je

$$p(A)p(B) = \frac{l_{65}}{l_{55}} \cdot \frac{l_{70}}{l_{60}} = \frac{77572.75}{84549.67} \cdot \frac{73357.21}{81281.33} = 0,8280 = 82,80\% .$$

b) Za x = 53, potrebno je odrediti broj $k$ iz definicione relacije $l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$ .

Kako je:

$100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{(53+k)^2}{103^2}} = \frac{1}{2} 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{53^2}{103^2}}$ , to poslije skraćivanja i kvadriranja dobijamo:

$1-\frac{(53+k)^2}{103^2}=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{53^2}{103^2}\right)$, odnosno $(53+k)^2=8.659,05$, tj. nakon korjenovanja:

53 + $k$ = ±93,054, pa je $k$ = 40,05. Negativno rješenje smo odbacili jer je vjerovatno trajanje života pozitivan broj.

**2**. Data je funkcija intenziteta smrtnosti $\mu_x=\frac{x}{105^2-x^2}$. Ako je $\ell_0=100.000$, odrediti funkciju doživljenja $\ell_x$ kao i najdublju starost. Kolike dvije neposredne anticipativne premije, koje stoje u odnosu 3 : 2, treba da uplati osoba stara 50 godina ako želi da primi dvije jednake anticipativne odložene, 10 godina, rente od 3.000 €? Kamatna stopa je 6%.

**Rješenje**:

Kako je $\mu_x=-\frac{l_x'}{l_x}$, imamo da je $-\frac{l_x'}{l_x}=\frac{x}{105^2-x^2}$ ,

pa kako je $l_x'=\frac{dlx}{dx}$ to je $\frac{dlx}{lx}=-\frac{xdx}{105^2-x^2}$.

Integracijom se dobija

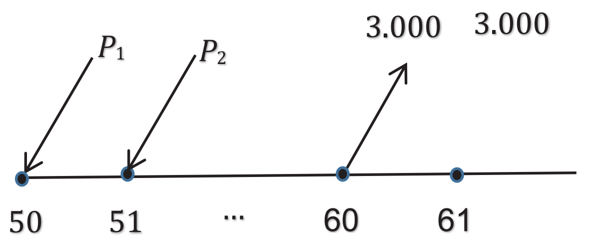
$\int\frac{dlx}{lx}=\int\frac{-xdx}{105^2-x^2}$, odakle je, nakon uvođenja smjene $t$ = $105^2$-$x^2$, $dt$ = $-2xdx$

$\ln l_x=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$, tj. $\ln l_x=\frac{1}{2}\ln t+\ln c=\ln\sqrt{t}+\ln c=\ln c\cdot\sqrt{t}\Rightarrow l_x=c\cdot\sqrt{t}$, odnosno, nakon vraćanja na promjenljivu $x$: $l_x=c\cdot\sqrt{105^2-x^2}$ .

Odredimo partikularno rješenje iz početnog uslova $l_0$ = 100.000.

Uvrštavanjem $x$ = 0 u gornju funkciju doživljenja dobija se $100.000=c\cdot\sqrt{105^2-0^2}$, pa je $c=\frac{100.000}{105}$. Tražena funkcija doživljenja glasi: $l_x=\frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2-x^2}$ ili napisana u drugom obliku $l_x=100.000\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{105^2}}$ .

Odredimo najdublju starost $w$ iz uslova $lx$ = 0. Iz $\frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2-x^2}=0$, slijedi $105^2-x^2=0$, a odavde je $x=\pm105$, tj. zadržavajući samo pozitivno rješenje $w$ = 105.
Pređimo na drugi dio zadatka.




Kako je $p = 6$, to je $q = 1{,}06$. Tablice smrtnosti ne mogu se koristiti po dva osnova: $p \neq 5$ i poznata je funkcija doživljenja.

Po uslovu zadatka premije se odnose 3 : 2, tj. $P_1 : P_2 = 3:2 \Rightarrow P_1 = 3P; P_2 = 2P$, za neko $P$.

Prema principu ekvivalencije, svođenjem novčanih tokova (očekivanih uplata $P_1$, $P_2$ i isplata $R = 3.000$) na $t = 0$ formira se sljedeća jednačina vrijednosti:

$$P_1 + \frac{P_2}{q}\cdot\frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{R}{q^{10}}\cdot\frac{l_{60}}{l_{50}} + \frac{R}{q^{11}}\cdot\frac{l_{61}}{l_{50}}.$$

Iz poznate funkcije doživljenja $l_x = \frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2 - x^2}$, dobijamo tražene vrijednosti:

$$l_{50} = \frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2 - 50^2} = 87.933{,}2454; \; l_{51} = \frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2 - 51^2} = 87.409{,}44;$$

$$l_{60} = \frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2 - 60^2} = 82.066{,}5846 \text{ i } l_{61} = \frac{100.000}{105}\cdot\sqrt{105^2 - 61^2} = 81.390{,}39.$$

Uvrštavanjem u jednačinu vrijednosti dobija se:

$$3P + \frac{2P}{q}\cdot\frac{87.409{,}4364}{87.933{,}2454} = \frac{3.000}{q^{10}}\cdot\frac{82.066{,}5846}{87.933{,}2454} + \frac{R}{q^{11}}\cdot\frac{81.390{,}3948}{87.933{,}2454},$$ odakle se lako dobija da je $P = 620{,}71$, pa je $P_1 = 3P = 1.862{,}13$ i $P_1 = 3P = 1.241{,}42$.

**3**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = 100.000\left(1 - \frac{x^2}{96^2}\right)$.

a) Naći vjerovatno trajanje života osobe stare 78 godina.

b) Odrediti vjerovatnoću da će od dvije osobe, stare 73 i 65 godina, barem jedna biti mrtva u naredne 2 godine, ako umiru nezavisno jedna od druge.

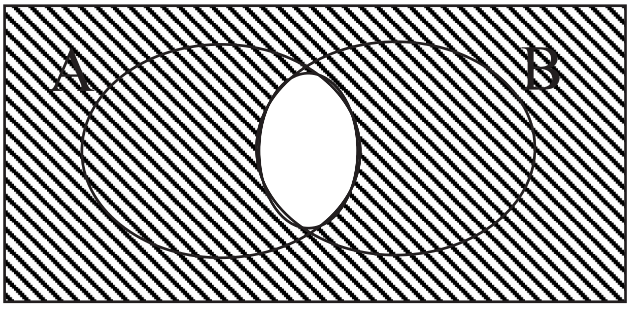
**Rješenje**:

a) Iz definicione relacije za $x = 78$ odredićemo $k$, tj. iz jednačine

$$100.000\left(1 - \frac{(x+k)^2}{96^2}\right) = \frac{100.000}{2}\left(1 - \frac{x^2}{96^2}\right),$$ nakon skraćivanja dobija se

$0,83088=\frac{(78+k)^2}{96^2}$ . Korjenovanjem i odbacivanjem negativnog rješenja dobijamo $k$ = 9,46, što predstavlja traženo vjerovatno trajanje života osobe stare 78 godina.

b)




Traženi događaj je istovjetan događaju – suprotan od obje žive, pa je tražena vjerovatnoća $p = 1 - p(A \cap B)$, gdje su A i B događaji da će date osobe biti žive nakon 2 godine. Ostavljamo čitaocu da račun završi samostalno i provjeri da li se rezultat poklapa s onim koji slijedi.

Neka su sada A i B događaji da data lica neće biti u životu nakon 2 godine.

Tada je $A \cup B$ traženi događaj, s vjerovatnoćom:

$$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{l_{73} - l_{75}}{l_{73}} + \frac{l_{65} - l_{67}}{l_{65}} - \frac{l_{73} - l_{75}}{l_{73}}\frac{l_{65} - l_{67}}{l_{65}}.$$

Kako je $\ell_x = 100.000\left(1-\frac{x^2}{96^2}\right)$, to je

$$\ell_{65} = 100.000\left(1-\frac{65^2}{96^2}\right) = 54.155,82\,;\ \ell_{67} = 100.000\left(1-\frac{67^2}{96^2}\right) = 51.291,23\,;$$

$$\ell_{73} = 100.000\left(1-\frac{73^2}{96^2}\right) = 42.176,65 \text{ i } \ell_{75} = 100.000\left(1-\frac{75^2}{96^2}\right) = 38.964,84\,.$$

pa se dobija:

$$p = \frac{42.176,65-38.964,84}{42.176,65} + \frac{54.155,82-51.291,23}{54.155,82} - \frac{42.176,65-38.964,84}{42.176,65}\cdot\frac{54.155,82-51.291,23}{54.155,82}$$

tj. $p$ = 0,1250 = 12,50%.

**4**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = 100.000\left(1-\frac{x^2}{99^2}\right)$.

a) Naći vjerovatno trajanje života osobe stare 67 godina.

b) Odrediti vjerovatnoću da od dvije osobe, stare 62 i 75 godina, nijedna neće biti mrtva u naredne 3 godine, ako umiru nezavisno jedna od druge.

**Rješenje**:

a) Za $x = 67$ $k$ određujemo iz definicione relacije $l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$:

$100.000\left(1-\frac{(67+k)^2}{99^2}\right)=\frac{100.000}{2}\left(1-\frac{67^2}{99^2}\right)$, pa se, nakon skraćivanja, dobija

$99^2-(67+k)^2=2.656$ tj. $(67+k)^2=7.145$. Nakon korjenovanja i odbacivanja negativnog rješenja dobija se $k = 17,53$.

b) Događaj „nijedna mrtva“, poklapa se s događajem „obje žive“ (nacrtati Venov dijagram).

Traži se vjerovatnoća:

$p=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{l_{65}}{l_{62}}\cdot\frac{l_{78}}{l_{75}}$, pa kako je $\ell_x=100.000\left(1-\frac{x^2}{99^2}\right)$, to je

$\ell_{62}=100.000\left(1-\frac{62^2}{99^2}\right)=60.779,51$; $\ell_{65}=100.000\left(1-\frac{65^2}{99^2}\right)=56.892,15$;

$\ell_{75}=100.000\left(1-\frac{75^2}{99^2}\right)=42.607,90$ i $\ell_{78}=100.000\left(1-\frac{78^2}{99^2}\right)=37.924,70$.

Odavde se, uvrštavanjem, dobija

$$p=P(A\cap B)=\frac{56.892,15}{60.779,51}\cdot\frac{37.924,70}{42.607,90}=0,8332=83,32\%.$$

**5**. a) Naći $\ell_x$ ako je $\mu_x=-\ln d$ i naći $\mu_x$ ako je $\ell_x=100.000\cdot d^x$, gdje je $d$ dati parametar.

b) Za datu funkciju doživljenja odrediti vjerovatno trajanje života osobe stare 62 godine.

**Rješenje**:

a) Nađimo funkciju doživljenja ako je dat intenzitet smrtnosti:

$l_x=ce^{-\int\mu_x dx}=ce^{-\int(-lnd)dx}=ce^{lnd\cdot\int dx}=ce^{xlnd}=ce^{lnd^x}=cd^x$.

Sada riješimo obrnuti zadatak. Kako je $\mu_x=-\frac{l_x'}{l_x}$ i $\ell_x'=100.000\cdot d^x\cdot\ln d$, to je

$\mu_x = -\frac{100.000 \cdot d^x \cdot \ln d}{100.000 \cdot d^x}$, tj. $\mu_x = -\ln d$, što je i trebalo dokazati.

b) $l_{x+k} = \frac{l_x}{2} \Rightarrow 100.000 \cdot d^{62+k} = \frac{100.000 \cdot d^{62}}{2} \Rightarrow 100.000 \cdot d^{62} \cdot d^k = \frac{100.000 \cdot d^{62}}{2}$

Nakon skraćivanja dobija se $d^k = \frac{1}{2}$. Primijetimo da $k$ ne zavisi od $x$, tj. uslov $x = 62$ nije bio od važnosti. Logaritmovanjem dobijene jednačine dobija se $\ln d^k = \ln\frac{1}{2}$, tj. $k \cdot \ln d = \ln 0,5$, pa je vjerovatno trajanje života $k = \frac{\ln 0,5}{\ln d}$.

**6**. Data je funkcija doživljenja $l_x = 9.025 - x^2$.

a) Izračunati najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 60 godina.

b) Kolike dvije anticipativne premije treba da uloži osoba stara 45 godina, prvu danas, a drugu kroz 5 godina, ako je prva duplo manja od druge, a da u slučaju doživljenja 70. godine dobije 70.000 €? Kamatna stopa je 7%.

**Rješenje**:

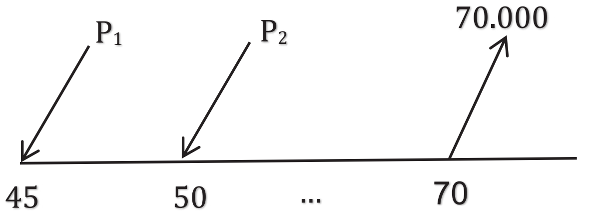
a) Nađimo prvo najdublju starost:

$l_x = 0 \Rightarrow 9.025 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9.025 \Rightarrow x = 95$ (odbacili smo negativno rješenje), pa je najdublja starost $w = 95$.

Nađimo sada vjerovatno trajanje života osobe stare 60 godina.

$l_{x+k} = \frac{l_x}{2} \Rightarrow 9.025 - (60+k)^2 = \frac{9.025 - 60^2}{2} \Rightarrow (60+k)^2 = 6.312,5$ pa je $60 + k = 79,45$ (opet smo odbacili negativno rješenje), odnosno $k = 19,45$.

b)




Kako je stopa 7%, to je $p = 7$, $q = 1,07$, pa je $P_1 + \frac{P_2}{q^5} \cdot \frac{l_{50}}{l_{45}} = \frac{K}{q^{25}} \cdot \frac{l_{70}}{l_{45}}$.

Kako je $P_2 = 2P_1$, $l_{45} = 7.000$, $l_{50} = 6.525$ i $l_{70} = 4.125$, pa je $P_1 \cdot 2{,}329209 = 7.600{,}28$, odnosno $P_1 = 5.717{,}89$ i $P_2 = 11.435{,}78$.

**7**. Data je funkcija doživljenja $l_x = 100.000\sqrt{1-\dfrac{(x+2)^2}{97^2}}$.

a) Izračunati najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 45 godine.

b) Kolike dvije anticipativne premije, koje stoje u odnosu 3 : 2, treba da uloži osoba stara 45 godina ako želi da u slučaju doživljenja 85. godine primi 25.000 €? Kamatna stopa je 6%.

**Rješenje**:

a) Nađimo prvo najdublju starost:

$l_x = 0 \Rightarrow 100.000\sqrt{1-\dfrac{(x+2)^2}{97^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-\dfrac{(x+2)^2}{97^2}} = 0 \Rightarrow 1-\dfrac{(x+2)^2}{97^2} = 0$. Dalje je $(x+2)^2 = 97^2$, odakle je (odbacujući negativno rješenje) $x+2 = 97$, tj. $x = 95$. Dakle, najdublja starost je $w = 95$.

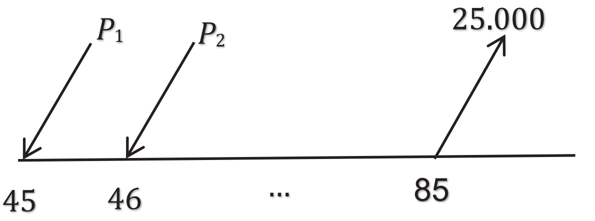
Nađimo sada vjerovatno trajanje života osobe stare 45 godina.

$l_{x+k} = \dfrac{l_x}{2} \Rightarrow 100.000\sqrt{1-\dfrac{(45+k+2)^2}{97^2}} = \dfrac{100.000\sqrt{1-\dfrac{(45+2)^2}{97^2}}}{2}$. Dalje je

$\sqrt{1-\dfrac{(47+k)^2}{97^2}} = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{47^2}{97^2}}}{2}$, odakle je $1-\dfrac{(47+k)^2}{97^2} = \dfrac{1-\dfrac{47^2}{97^2}}{4}$, a odavde $(47+k)^2 = 7.609$, pa je $47+k = 87{,}23$ (odbacujemo negativno rješenje), odnosno $k = 40{,}23$.

b) Prema principu ekvivalencije, svođenjem novčanih tokova (očekivanih uplata *P₁, P₂* i isplate 25.000 €) na *t* = 0 formira se sljedeća jednačina vrijednosti:

$P_1 + \dfrac{P_2}{q}\cdot\dfrac{l_{46}}{l_{45}} = \dfrac{25.000}{q^{40}}\cdot\dfrac{l_{85}}{l_{45}} \Rightarrow 3P + \dfrac{2P}{q}\cdot\dfrac{l_{46}}{l_{45}} = \dfrac{25.000}{q^{40}}\cdot\dfrac{l_{85}}{l_{45}}$.




Po uslovu zadatka je $p$ = 6, tj. $q$ = 1,06. Premije su u odnosu 3 : 2, tj. $P_1 : P_2 = 3:2$, odnosno $P_1 = 3P; P_2 = 2P,$ za neko $P$. Dalje, iz funkcije doživljenja je $l_{45} = 87.477,1$; $l_{46} = 86.898,1$ i $l_{85} = 44.221,9$, pa se uvrštavanjem u jednačinu vrijednosti dobija

$3P + \frac{2P}{q} \cdot \frac{86.898,1}{87.477,1} = \frac{25.000}{q^{40}} \cdot \frac{44.221,9}{87.477,1}$, a odavde $P \cdot 4,8743 = 1.228,71$, tj.

$P = 252,08.$

Konačno, $P_1 = 756,24$ i $P_2 = 504,16$.

**8**. Data je funkcija doživljenja $y = c\sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{103^2}}$.

a) Naći najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 56 godina.

b) Kolike dvije premije, koje stoje u odnosu 3 : 5, treba da uplati osoba stara 56 godina da bi osigurala 70.000 € za slučaj doživljenja 75. godine? Kamatna stopa je 7%.

**Rješenje**:

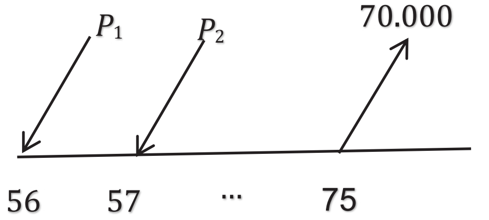
a) Odredimo najdublju starost *w*, a zatim i vjerovatno trajanje života lica starog $x$ = 56 godina.

Iz $\ell_x = 0$ imamo: $c\sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{103^2}} = 0$ tj. $1 - \frac{(x+2)^2}{103^2} = 0$. Odbacujući negativno rješenje, dobija se: $x + 2 = 103$, pa je $x = 101 = w$.

Iz $l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$ imamo da je $c\sqrt{1 - \frac{(x+k+2)^2}{103^2}} = \frac{c \cdot \sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{103^2}}}{2}$, pa se poslije skraćivanja, kvadriranja i zadržavanja pozitivnog rješenja dobija $58 + k = 93,8$. Odavde je $k = 35,8$ vjerovatno trajanje života lica starog 56 godina.

b) Odredimo sada iznos tražene premije. Po uslovu zadatka premije se odnose 3 : 5, tj.

$P_1 : P_2 = 3:5 \Rightarrow P_1 = 3P; P_2 = 5P$, za neko *P*.




Kako je $p = 7$, tj. $q = 1{,}07$ to se, diskontovanjem, dobija sljedeća jednačina vrijednosti:

$$P_1 + \frac{P_2}{q} \cdot \frac{l_{57}}{l_{56}} = \frac{K}{q^{19}} \cdot \frac{l_{75}}{l_{56}}.$$

Iz poznate funkcije doživljenja $\ell_x = c\sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{103^2}}$ dobijamo tražene vrijednosti:

$$l_{56} = c\sqrt{1 - \frac{(56+2)^2}{103^2}} = 0{,}826384 \cdot c; \; l_{57} = c\sqrt{1 - \frac{(57+2)^2}{103^2}} = 0{,}819684 \cdot c \text{ i}$$

$$l_{75} = c\sqrt{1 - \frac{(75+2)^2}{103^2}} = 0{,}66418 \cdot c.$$

Uvrštavanjem u jednačinu vrijednosti dobija se linearna jednačina po nepoznatom koeficijentu proporcionalnosti *P*:

$3P + \frac{5P}{1{,}07} \frac{0{,}819684 \cdot c}{0{,}826384 \cdot c} = \frac{70.000}{1{,}07^{19}} \cdot \frac{0{,}66418 \cdot c}{0{,}826384 \cdot c}$, pa je $7{,}635 \cdot P = 15.556{,}44$, odakle se dobija da je $P = 2.037{,}52$. Sada su traženi iznosi premija

$$P_1 = 3P = 6.112{,}55; P_2 = 5P = 10.187{,}58.$$

Primijetimo da je zadatak bilo moguće riješiti iako nije bio poznat početni uslov $l_0$ (tj. *c* je nepoznato), jer dolazi do skraćivanja nepoznatog parametra *c*.

**9**. Odrediti srednje trajanje života lica starog 50 godina, kao i vjerovatnoću da ta osoba doživi 75. godinu, a onda umre u toku naredne, ako je $\ell_x = 100.000 - \frac{x^2}{0{,}1}$. Skicirati funkciju doživljenja, pa na grafiku prikazati $l_{50}$.

**Rješenje**:

Najdublju starost određujemo iz jednačine $l_x = 100000 - \frac{x^2}{0{,}1} = 0$, odakle je $w = 100$, pa je i $w - x = 50$, što je gornja granica integracije.

Odredimo srednje trajanje života:

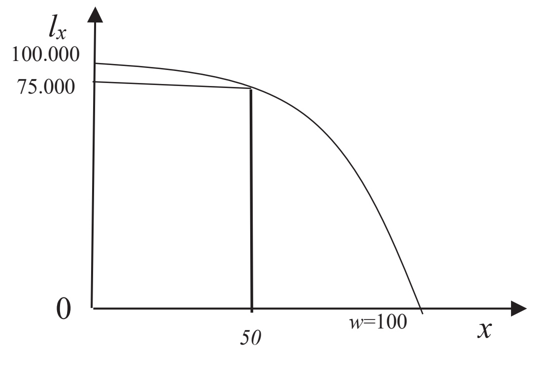
$$ET=\int_0^{50}\frac{l_{50+t}}{l_{50}}dt=\int_0^{50}\frac{100000-\frac{(50+t)^2}{0,1}}{100000-\frac{50^2}{0,1}}dt=\int_0^{50}\frac{7500-100t-t^2}{7500}dt=\int_0^{50}\left(1-\frac{t}{75}-\frac{t^2}{7500}\right)dt$$

tj. $ET=t\Big|_0^{50}-\frac{1}{75}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{50}-\frac{1}{7500}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{50}$, pa je ET = 27,78.

Dalje je $p=\frac{l_{75}}{l_{50}}\cdot\frac{l_{75}-l_{76}}{l_{75}}=\frac{l_{75}-l_{76}}{l_{50}}=\frac{100.000-\frac{75^2}{0,1}-100.000+\frac{76^2}{0,1}}{100.000-\frac{50^2}{0,1}}=\frac{1.510}{75.000}=0,0201,$

pa tražena vjerovatnoća iznosi 0,0201, odnosno 2,01%.

Kako je data funkcija doživljenja kvadratna s negativnim predznakom uz $x^2$, grafik je parabola s maksimumom. Nalazi se u prvom kvadrantu, a $l_0=100.000$, $w$ = 100 i $l_{50}=75.000$, pa je skica njenog grafika:




**10**. Naći razliku srednjeg i vjerovatnog trajanja života lica starog 40 godina ako je funkcija doživljenja $l_x=100.000-12x^2$.

**Rješenje:**

Da bismo odredili srednje trajanje života $ET=\frac{1}{l_x}\cdot\int_o^{w-x}l_{x+t}\,dt$, potrebno je naći najdublju starost $w$. Iz $l_x=0$, dobija se $x^2=8.333,333$, tj. $w$ = 91,29.

Sada je $ET=\frac{1}{l_{40}}\cdot\int_o^{91,29-40}l_{40+t}\,dt=\frac{1}{100.000-12\cdot 40^2}\cdot\int_o^{51,29}\left(100.000-12\cdot(40+t)^2\right)dt$

Dalje je $ET=\frac{1}{80.800}\cdot\left(100.000\int_o^{51,29}dt-12\int_o^{51,29}\left(1.600+80t+t^2\right)dt\right)=$

$$\frac{1}{80800}\cdot\left(100000\,t\Big|_0^{51,29}-12\cdot1600\cdot t\Big|_0^{51,29}-12\cdot80\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{51,29}-12\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{51,29}\right),$$

pa se, nakon računa, dobija $ET = 28{,}98$.

Odredimo vjerovatno trajanje života istog lica rješavajući jednačinu $l_{40+k}=\frac{l_{40}}{2}$.

$100.000-12\cdot(40+k)^2=\frac{100.000-12\cdot40^2}{2}$, odakle je $(40+k)^2=4966{,}67$, tj. $k = 30{,}47$.

Tražena razlika $ET - k$ iznosi $-1{,}49$.

**11**. Naći zbir srednjeg i vjerovatnog trajanja života lica starog 50 godina ako je funkcija doživljenja $l_x=100.000-11x^2$.

**Rješenje**:

Da bismo odredili srednje trajanje života $ET=\frac{1}{l_x}\cdot\int_o^{w-x} l_{x+t}\,dt$, potrebno je naći najdublju starost $w$. Iz $l_x=0$, dobija se $100.000-11x^2=0$, pa je $w = 95{,}346$.

Sada je $ET=\frac{l}{l_{50}}\int_0^{w-50} l_{50+t}dt=\frac{1}{100.000-11\cdot50^2}\int_0^{45,346}(100.000-11\cdot(50+t)^2)dt$

$$=\frac{1}{100.000-11\cdot50^2}\int_0^{45,346}\left(100.000-11\cdot(50+t)^2\right)dt=$$

$$\frac{1}{72.500}\left(100.000t\Big|_0^{45,346}-11\frac{(50+t)^3}{3}\Big|_0^{45,346}\right)=25{,}03.$$

Odredimo vjerovatno trajanje života $k$ iz relacije $l_{50+k}=\frac{l_{50}}{2}$. Odavde je

$100.000-11\cdot\left(50+k\right)^2=\frac{100.000-50^2\cdot11}{2}$, tj. $-11\cdot\left(50+k\right)^2=-63.750$, pa se nakon korjenovanja i odbacivanja negativnog rješenja dobija $k = 26{,}13$.

Traženi zbir $ET + k$ iznosi 51,16.

**12**. Data je funkcija doživljenja $l_x=100.000\sqrt{1-\frac{(x+2)^2}{98^2}}$.

a) Naći intenzitet smrtnosti osobe stare 45 godina.

b) Kolike dvije neposredne anticipativne premije, koje stoje u odnosu 3 : 4, treba da uplati osoba stara 45 godina da bi osigurala 65.000 € za slučaj doživljenja 65. godine? Kamatna stopa je 6%.

**Rješenje**:

a) Po definiciji intenziteta smrtnosti treba naći $\mu_x = -\frac{l_x'}{l_x}$.

Kako je $l_x' = 100.000 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{(x+2)^2}{98^2}}} \cdot \frac{-2(x+2)}{98^2} = -\frac{100.000}{98^2} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{1-\frac{(x+2)^2}{98^2}}}$, odnosno

$l_x' = -\frac{100.000}{98} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{98^2-(x+2)^2}}$. Otuda je

$$\mu_x = -\frac{-\frac{100.000}{98} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{98^2-(x+2)^2}}}{100.000\sqrt{1-\frac{(x+2)^2}{98^2}}} = \frac{\frac{1}{98} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{98^2-(x+2)^2}}}{\frac{1}{98} \cdot \sqrt{98^2-(x+2)^2}} = \frac{x+2}{98^2-(x+2)^2}.$$

Za $x = 45$ $\mu_x = 0,00635$, tj. intenzitet smrtnosti iznosi 0,635%, odnosno 6,35‰.

b) Po uslovu zadatka premije su u odnosu 3 : 4, tj. $P_1 : P_2 = 3:4 \Rightarrow P_1 = 3P; P_2 = 4P$, za neko $P$.

Svođenjem novčanih tokova na $t = 0$ dobija se jednačina vrijednosti:

$$3P + \frac{4P}{q} \cdot \frac{l_{46}}{l_{45}} = \frac{65.000}{q^{20}} \cdot \frac{l_{65}}{l_{45}}.$$

Uvrštavanjem podataka $l_{45} = 87.749,2$, $l_{46} = 87.183,7$ i $l_{65} = 72.978,8$, lako se dobijaju $P$, $P_1$ i $P_2$. Račun prepuštamo čitaocima.

**13**. Data je funkcija intenziteta smrtnosti $\mu_x = \frac{x}{107^2 - x^2}$.

a) Ako je $\ell_0 = 100.000$, odrediti funkciju $\ell_x$, kao i najdublju starost.

b) Odrediti srednje trajanje života osobe stare 50 godina.

c) Kolike dvije neposredne anticipativne jednake premije treba da uplati osoba stara 55 godina ako želi da primi dvije jednake anticipativne odložene (25 godina) rente od 1.000 €? Kamatna stopa je 6%.

**Rješenje**:

a) Iz $\mu_x = -\frac{l_x'}{l_x}$ rješavanjem diferencijalne jednačine s razdvojenim promjenljivim: $-\frac{l_x'}{l_x} = \frac{x}{107^2 - x^2}$ redom imamo:

$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = \frac{x}{107^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dl_x}{l_x} = -\frac{x}{107^2 - x^2}dx$, pa je $\int \frac{dl_x}{l_x} = -\int \frac{xdx}{107^2 - x^2}$.

Uvođenjem smjene: $107^2 - x^2 = t$ imamo $-2xdx = dt$, tj. $-xdx = dt\frac{1}{2}$, pa je

$\ln l_x = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + \ln c = \ln\sqrt{t} + \ln c = \ln c\sqrt{t}$, a odavde je $l_x = c\sqrt{t}$, odnosno $l_x = c\sqrt{107^2 - x^2}$.

Odredimo iz opšteg traženo partikularno rješenje.

Iz početnog uslova $l_0 = 100.000$ imamo da je $x = 0$ tj. $100.000 = c\sqrt{107^2 - 0^2}$, odnosno $c = \frac{100.000}{107}$, pa funkcija doživljenja glasi:

$$l_x = \frac{100.000}{107}\cdot\sqrt{107^2 - x^2} = 100.000\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{107^2}} = 100.000\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{x}{107}\right)^2}.$$

Izjednačavajući je sa 0 lako se dobija najdublja starost $w$: $x = w = 107$.

b) Da bismo odredili srednje trajanje života $ET = \frac{1}{l_x}\cdot\int_o^{w-x} l_{x+t}\,dt$, potrebna je ranije izračunata najdublja starost, koja u ovom slučaju iznosi $w = 107$.

Sada je:

$ET = \frac{1}{l_{50}}\cdot\int_o^{107-50} l_{50+t}\,dt$, pa se nakon računa dobija $ET = 28{,}98$.

c) Ako je $p = 6$, tada je $q = 1{,}06$, pa ne možemo koristiti tablice smrtnosti, čak i da je diskontna stopa 5%, zbog zadate funkcije doživljenja.

Iz jednačine vrijednosti $P + \frac{P}{q}\cdot\frac{l_{56}}{l_{55}} = \frac{R}{q^{25}}\cdot\frac{l_{80}}{l_{55}} + \frac{R}{q^{26}}\cdot\frac{l_{81}}{l_{55}}$ i $l_x = 100.000\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{107^2}}$ dobija se:

$l_{55} = 100.000\cdot\sqrt{1 - \frac{55^2}{107^2}} = 85.777{,}898$; $l_{56} = 100.000\cdot\sqrt{1 - \frac{56^2}{107^2}} = 85.210{,}892$;

$l_{80} = 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{80^2}{107^2}} = 66.407,771$ i $l_{81} = 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{80^2}{107^2}} = 65.304,404$ , pa je:

1,9933P = 328,129, tj. premija iznosi $P$ = 164,62 €.

**14**. Za dvije osobe od 27 i 35 godina odrediti vjerovatnoću da će za 20 godina: a) obje osobe biti žive, b) obje biti mrtve, c) bar jedna od njih biti živa, d) bar jedna od njih biti mrtva i e) samo jedna biti živa. Pretpostavlja se da te osobe umiru nezavisno jedna od druge.

**Rješenje**:

a) Iz poznatih vjerovatnoća da će pojedine osobe doživjeti narednih 20 godina (A je događaj da će prva osoba doživjeti narednih 20 godina; B je događaj da će druga osoba doživjeti narednih 20 godina):

$P(A) = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{47}}{l_{27}} = 0,9258$ i $P(B) = \frac{l_{55}}{l_{35}} = 0,8817$,

zbog nezavisnosti događaja A i B lako se određuje vjerovatnoća da će obje osobe biti žive u narednih 20 godina (vjerovatnoća presjeka):

$p(A \cap B) = p(A)p(B) = 0,9258 \cdot 0,8817 = 0,8163 = 81,63\%$.

b) Vjerovatnoće da date osobe neće doživjeti narednih 20 godina su (C je događaj da prva osoba neće doživjeti narednih 20 godina; D je događaj da druga osoba neće doživjeti narednih 20 godina – C i D su događaji suprotni događajima pod a):

$p(C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{47}}{l_{27}} = 0,0742$ i

$p(D) = 1 - \frac{l_{55}}{l_{35}} = 1 - p(B) = 0,1183$, pa je tražena vjerovatnoća presjeka tih događaja jednaka $p(C \cap D) = p(C)p(D) = 0,0088 = 0,88\%$.

Čitaocu ostavljamo da do ovog rezultata dođe i na drugi način: vjerovatnoća da će obje osobe biti mrtve u narednih 20 godina poklapa se s vjerovatnoćom suprotnog događaja dogođaju „da će bar jedna biti živa" – unije događaja da će osobe biti žive, što se lako provjerava preko Venovih dijagrama (riječ je o tzv. DeMorganovom obrascu). To je, u stvari, $1 - p$, gdje je $p$ vjerovatnoća koja će se dobiti pod c).

c) Traži se vjerovatnoća unije događaja (definisanih i izračunatih pod a) da će pojedine osobe doživjeti narednih 20 godina, pa je

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B) = 0,9912 = 99,12\%$.

Primijetimo da je zbir vjerovatnoća pod b) i c) jednak 1.

d) Zadatak se može uraditi na dva načina. Prvi, uočavanjem da je tražena vjerovatnoća jednaka vjerovatnoći suprotnog događaja događaju da su obje žive: 1 – vjerovatnoća pod a). Drugi je da se preko vjerovatnoća suprotnih događaja, 1 − 0,9258 = 0,07416 i 1 − 0,8817 = 0,1183, izračuna vjerovatnoća njihove unije:
0,07416 + 0,1183 − 0,074163 · 0,1183 = 0,1837 = 18,37%.

e) Treba odrediti vjerovatnoću tzv. simetrične razlike, da će biti živa samo prva ili da će biti živa samo druga osoba, koja je jednaka vrijednosti unije minus vrijednost presjeka:

$$p(A\Delta B) = p(A) + p(B) - 2p(A)p(B) = 0{,}1749 = 17{,}49\%.$$

Primijetimo da smo iskoristili svojstvo nezavisnosti događaja. Ova vjerovatnoća, da će tačno jedna osoba biti živa u narednih 20 godina, istovjetna je vjerovatnoći da će tačno jedna osoba biti mrtva nakon tog perioda, pa se zadatak mogao uraditi i na taj način.

**15**. Posmatranjem se došlo do ovih podataka:

| Godine | Broj posmatranih osoba | Broj umrlih u posmatranoj godini |
|---|---|---|
| 18 | 5.000 | 10 |
| 19 | 10.000 | 22 |
| 20 | 15.000 | 36 |
| 21 | 10.000 | 27 |
| 22 | 20.000 | 60 |

Na osnovu ovih podataka sastaviti tablice smrtnosti od 18. do 22. godine, ako je $l_{18}$ = 100.000. Kamatna stopa je 5%. Komutativne brojeve $N_x$ i $M_x$ nije potrebno računati zbog velikog broja sabiraka. Umjesto toga, napisati formule za njihovo izračunavanje.

**Rješenje**:

Kako se raspodjela na uzorku proglašava važećom na čitavoj populaciji, broj umrlih na 100.000 u prvoj posmatranoj godini je $100.000 \cdot \frac{10}{5.000} = 200$, pa sada iz

$d_x = l_x - l_{x+1}$ dobijamo $l_{19} = l_{18} - d_{18}$. Dalje je: $D_{18} = \frac{l_{18}}{q^{18}} = 41.552{,}06$, $C_{18} = \frac{d_{18}}{q^{19}}$,

$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{w-1}$, $M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{w-1}$.

| $x$ | $l_x$ | $d_x$ | $D_x$ | $N_x$ | $C_x$ | $M_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 100.000 | 200 | 41552,06 | | 39573,3 | |
| 19 | 99.800 | 220 | 39494,24 | | 37613,5 | |
| 20 | 99.580 | 240 | 37530,6 | | 35743,4 | |
| 21 | 99.340 | 270 | 35657,3 | | 33959,3 | |
| 22 | 99.070 | 300 | 33867,06 | | 32254,3 | |

**16**. Kolikih 10 jednakih, neposrednih, anticipativnih premija treba da uplati osoba stara 50 godina da bi primala neposrednu anticipativnu doživotnu rentu, takvu da su prvih 10 po 1.000 €, narednih 10 po 2.000 €, a ostale po 1.500 €?

**Rješenje**:

Jednačina vrijednosti za $t = 0$ glasi:

$$P \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} = 1.000 \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} + 2.000 \cdot \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{50}} + 1.500 \cdot \frac{N_{70}}{D_{50}}$$ , pa je

$$P \cdot \frac{87.508,08 - 37.333,81}{6.463,89} =$$

$$1.000 \cdot \frac{87.508,08 - 37.333,81}{6.463,89} + 2.000 \cdot \frac{37.333,81 - 11.877,28}{6.463,89} + 1.500 \cdot \frac{11.877,28}{6.463,89}.$$

Iz $P \cdot 7,76224 = 7.762,24 + 7.876,54 + 2.756,22 = 18.395$ imamo da je $P = 2.369,81$.

**17**. Osoba stara 40 godina osigurala je 100.000 € mješovitim osiguranjem sa 2 isplate i 20-godišnjim trajanjem. Kolikih 10 neposrednih anticipativnih premija treba da uplati ako su prvih 5 međusobno jednake, drugih 5 međusobno jednake, a prve u odnosu na druge stoje u odnosu 2 : 3?

**Rješenje**:

Jednačina vrijednosti za $t = 0$ glasi:

$$P_1 \cdot \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} + P_2 \cdot \frac{N_{45} - N_{50}}{D_{40}} = 100.000 \cdot \left( \frac{D_{60}}{D_{40}} + \frac{M_{40}}{D_{40}} \right)$$, pa kako je $P_1 : P_2 = 2:3$, to je

$P_1 = 2P$ i $P_2 = 3P$ odnosno $2P \cdot \dfrac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} + 3P \cdot \dfrac{N_{45} - N_{50}}{D_{40}} = 100.000 \cdot \dfrac{D_{60} + M_{40}}{D_{40}}$ tj.

$$P\left( 2\frac{176.052,30 - 125.825,40}{11.139,36} + 3\frac{125.825,40 - 87.508,08}{11.139,36} \right) = 100.000 \cdot \frac{3.488,75 + 2.755,75}{11.139,36}$$

Odavde je $P \cdot 19,33733 = 56.057,98$, odnosno $P = 2.898,95$, pa je $P_1 = 5.797,90$ i $P_2 = 8.696,86$.

**18**. Osoba stara 45 godina uplatila je 10 premija takvih da su prvih 5 po 3.000 €, a preostale po 2.000 €. Ako želi da prima doživotnu odloženu (10 godina) ličnu rentu, takvu da su prvih 15 međusobno jednake, narednih 10 ne prima ništa, a onda do kraja života prima novu rentu za 15% manju od prvih, odrediti visinu novih renti. Kamatna stopa je 5%.

**Rješenje**:

Kod zadataka iz neto premija potrebno je odgovoriti na dva pitanja:

O kojoj polisi je riječ?

Kako se plaćaju premije?

U ovom zadatku u pitanju je odložena (10 godina) promjenljiva doživotna lična renta ($R_2 = R_1 - 15\%R_1 = 0,85R_1$). Premije se plaćaju godišnje (neposredne su privremene za 10 godina). Znači, ne određujemo mizu, već jednokratni sadašnji iznos očekivanih uplata svodimo na pripadajući godišnji iznos.

Koristeći princip ekvivalencije, problem svodimo na poznati, a promjenljivu na konstantnu ličnu rentu (dijelom $R_1$, pa $R_2$).

Jednačina vrijednosti za $t = 0$ glasi:

$3.000 \cdot \frac{N_{45} - N_{50}}{D_{45}} + 2.000 \cdot \frac{N_{50} - N_{55}}{D_{45}} = R_1 \cdot \frac{N_{55} - N_{70}}{D_{45}} + R_2 \cdot \frac{N_{80}}{D_{45}}$. Zamjenjujući vrijednosti iz tablica i $R_2 = 0,85R_1$ dobija se

$3.000 \cdot 4,4934 \ + \ 2.000 \cdot 3,38615 \ = \ R_1 \left(5,48297 + 0,85 \cdot 0,24237\right)$, odakle je

$R_1 = 3.559,95$ i $R_2 = 0,85R_1 = 3.025,96$.

**19**. a) Koliku premiju treba da plaća 28-godišnjak u razdoblju od 32 godine ako bi želio da osigura anticipativnu rentu, koju bi počeo primati od navršene 60. godine života i primao bi je narednih 20 godina? Godišnja renta iznosi 2.500 €.

b) Koliko bi iznosila jednokratna premija (miza) za istu vrstu osiguranja?

**Rješenje**:

a) Za $x = 28$, riječ je o osiguranju odložene (32 godine) privremene (20 godina) lične rente od 2.500 €, godišnjim premijama, koje se plaćaju neposredno privremeno za 32 godine.

Izjednačavajući sadašnju vrijednost očekivanih uplata $P$ i sadašnju vrijednost očekivanih isplata ($R$ = 2.500 €) formiramo jednačinu vrijednosti:

$P \cdot \frac{N_{28} - N_{60}}{D_{28}} = R \cdot \frac{N_{60} - N_{80}}{D_{28}} \Rightarrow 15,8378P = 2.500 \cdot 1,695$, odakle je $P = 267,56$,

tj. godišnja neto premija iznosi 267,56 €.

b) Pošto je sada u pitanju jednokratna premija A=M, jednačina vrijednosti glasi:

$$M = R \cdot \frac{N_{60} - N_{80}}{D_{28}} \Rightarrow M = 2.500 \cdot 1,695 = 4237,50$$ , pa je miza 4.237,50 €.

**20**. Naći mizu koju treba da uplati osoba stara 50 godina da bi osigurala doživotnu godišnju rentu od 10.000 €, ako isplate počinju 20 godina poslije izvršene uplate.

**Rješenje**:

Riječ je o osiguranju odložene (20 godina) doživotne lične rente, pa se, nakon uvrštavanja komutativnih brojeva iz tablica smrtnosti, dobija

$$M = R \cdot \frac{N_{70}}{D_{50}} = 10.000 \cdot \frac{11.877,28}{6.463,889} = 18.374,82.$$

**21**. Ako lice staro 45 godina uloži 50.000 €, naći koliku će mu doživotnu anticipativnu godišnju rentu plaćati osiguravajuće društvo počev od dana uplate. Koliko bi iznosile rente u slučaju da je prva za 50% veća od ostalih?

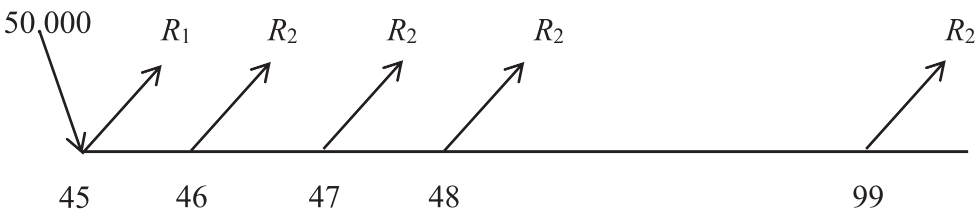
**Rješenje**:

Riječ je o osiguranju neposredne doživotne lične rente, pa je

$M = R \cdot \frac{N_{45}}{D_{45}}$. Odavde je $50.000 = R \cdot \frac{N_{45}}{D_{45}}$, tj. $R = 50.000 \cdot \frac{D_{45}}{N_{45}}$. Nakon uvrštavanja komutativnih brojeva iz tablica smrtnosti dobija se da je

$$R = 50.000 \cdot \frac{8527,427}{125825,4} = 3.388,595.$$

Za drugi dio zadatka postupak je sljedeći:




Jednačina vrijednosti za $t = 0$ glasi:

$$50.000 = R_1 + R_2 \cdot \frac{D_{46}}{D_{45}} + R_2 \cdot \frac{D_{47}}{D_{45}} + \ldots + R_2 \cdot \frac{D_{99}}{D_{45}}$$ , a odavde

$50.000 = R_1 + R_2 \cdot \frac{D_{46} + D_{47} + ... + D_{99}}{D_{45}} = R_1 + R_2 \cdot \frac{N_{46}}{D_{45}}$. Kako je prva veća za 50% od ostalih, to je $50.000 = 1,5 \cdot R_2 + R_2 \cdot \frac{N_{46}}{D_{45}}$, tj. $50.000 = R_2 \cdot \left(1,5 + \frac{117297,9}{8527,427}\right)$, pa se nakon računanja dobija $R_2 = 3.277,53$ i $R_1 = 1,5 \cdot R_2 = 4.916,30$.

**22**. Izračunati visinu mize koju bi osoba stara 45 godina platila ako želi da osigura kapital od 20.000 € po mješovitom osiguranju s jednom isplatom i trajanjem od 20 godina. Kamatna stopa iznosi 5% *p*. a. d.

**Rješenje**:

Jednokratna premija za osiguranu sumu od 20.000 € iznosi:

$$M = 20.000 \cdot \left( \frac{D_{65} + M_{45} - M_{65}}{D_{45}} \right).$$

Nakon uvrštavanja komutativnih brojeva iz tablica smrtnosti i računa dobija se da je $M = 8.420,89$€.

**23**. Izračunati visinu godišnje anticipativne premije koju bi osoba stara 45 godina plaćala neposredno privremeno 15 godina da bi osigurala odloženu (10 godina) doživotnu ličnu rentu, tako da su prvih 15 renti po 2.000 €, zatim 5 godina ne prima ništa, a preostale rente (do kraja života) su po 1.500 €. Kamatna stopa iznosi 5% *p*. a. d.

**Rješenje**:

Jednačina vrijednosti (sadašnja vrijednost uplata i isplata) glasi:

$P \cdot \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = 2.000 \cdot \frac{N_{55} - N_{70}}{D_{45}} + 1.500 \cdot \frac{N_{75}}{D_{45}}$. Kako nije bilo renti 5 godina, od 70. do 75. godine, to je u prethodnoj formuli „rupa" od 5 godina.

Sređivanjem se dobija $P = \frac{2.000 \cdot (N_{55} - N_{70}) + 1.500 \cdot N_{75}}{N_{45} - N_{60}}$.

Nakon uvrštavanja komutativnih brojeva iz tablica smrtnosti i računa, dobija se da je

$$P = \frac{2.000 \cdot (58.632,93 - 11.877,28) + 1.500 \cdot 5.526,67}{125.825,40 - 37.333,81} = 1.150,41.$$

**24**. a) Osoba stara 50 godina zaključila je s osiguravajućom kompanijom ugovor da joj se isplatiti određeni iznos, ako doživi 70. godinu, a njegovim nasljednicima isti iznos kad umre, pa ma kada to bilo. Kolika je visina osigurane sume ako je osiguranik dužan da doživotno plaća neto godišnju premiju u visini od 3.000 €?

b) Ako ista osoba želi da se nasljedniku osigurana suma isplati pod uslovom da on umre prije isteka 20 godina, odrediti njenu visinu, uz ostalo isto kao pod a).

c) Koja od tih isplata je i koliko procenata veća i zašto? O kojim polisama je riječ?

**Rješenje**:

a) Očigledno se radi o mješovitom osiguranju s moguće dvije isplate, doživotnim godišnjim premijama, pa važi:

$$3.000\cdot\frac{N_{50}}{D_{50}}=K\cdot\left(\frac{D_{70}}{D_{50}}+\frac{M_{50}}{D_{50}}\right)\Rightarrow K=3.000\cdot\frac{N_{50}}{D_{70}+M_{50}}\text{, pa je } K=68.233{,}20.$$

b) Ovdje je riječ o mješovitom osiguranju s jednom isplatom, neposrednim doživotnim godišnjim premijama, pa je:

$$3.000\cdot\frac{N_{50}}{D_{50}}=K\cdot\left(\frac{D_{70}}{D_{50}}+\frac{M_{50}-M_{70}}{D_{50}}\right)\Rightarrow K=3.000\cdot\frac{N_{50}}{D_{70}+M_{50}-M_{70}}\text{, odnosno}$$

$K = 91.698{,}77$.

c) Veća je isplata pod b) (za mješovito osiguranje kapitala s jednom isplatom), jer, uz istu uplatu, rizik isplate za osiguravača je veći pod a) (za mješovito osiguranje kapitala s moguće dvije isplate). Dakle, u dijelu pod a), zbog većeg rizika, osigurana suma je manja uz iste premije.

Tražena procentna stopa je $p=\dfrac{100\cdot(91.698{,}77\ -\ 68.233{,}2)}{68.233{,}2}=34{,}39$ .

Dakle, drugi iznos je za 34,39% veći od prvog.

**25**. Početkom svake godine 40-godišnjak ulaže u banku, u trajanju od 15 godina, iznos od 8.000 €.

a) Kolikim će iznosom raspolagati u banci 20 godina nakon prvog uloga, ako banka odobrava 5% dekurzivnih složenih kamata?

b) Koliki bi mu iznos u slučaju doživljenja 60. godine isplatilo osiguravajuće društvo, uz kamatnu stopu od 5%, ako bi početkom svake godine uplaćivao neto premiju iste visine (8.000 €) za 15 godina? Uporediti rezultate pod a) i b) i interpretirati.

**Rješenje**:

a) Primjenom principa ekvivalencije, za $q = 1{,}05$, dobija se jednačina vrijednosti za $t = 0$:

$$8.000+\frac{8.000}{q}+\frac{8.000}{q^2}+\ldots+\frac{8.000}{q^{14}}=\frac{K}{q^{20}}\Rightarrow\frac{8.000}{q^{14}}\cdot\left(q^{14}+q^{13}+\ldots+1\right)=\frac{K}{q^{20}},\text{ tj.}$$

$\frac{8.000}{q^{14}}\cdot\frac{q^{15}-1}{q-1}=\frac{K}{q^{20}}$, odakle je $K=231.338,71$, pa je iznos kojim će raspolagati u banci 20 godina nakon prvog uloga 231.338,71 €.

Do istog iznosa moglo se doći primjenom metode prolongacije: gotovih formula iz računa anticipativnih periodičnih uloga (15 godina) i složenog interesnog računa (narednih 5 godina, kao što je prethodno rečeno).

b) Ovdje nije riječ o poslu s bankom, već o poslu s osiguravajućim društvom. U pitanju je osiguranje kapitala za slučaj doživljenja, godišnjim premijama. Jednačina vrijednosti glasi:

$$8.000\cdot\frac{N_{40}-N_{55}}{D_{40}}=K\cdot\frac{D_{60}}{D_{40}},\text{ pa je }8.000\cdot\frac{176.052,3-58.632,93}{11.139,36}=K\cdot\frac{3.488,749}{11.139,36},$$

odakle je $K$ = 269.252,66, tj. iznos (osigurana suma) koji bi osiguravajuće društvo isplatilo u slučaju doživljenja 60. godine je 269.252,66 €.

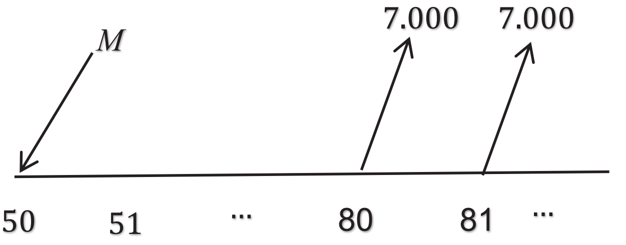
Iznos kojim će 40-godišnjak raspolagati 20 godina nakon prvog uloga je 231.338,71 €, što je manje u odnosu na iznos koji bi osiguravajuće društvo isplatilo u slučaju doživljenja 60. godine (269.252,66 €), ali treba imati u vidu da isplata osigurane sume nije bezuslovna: lice mora doživjeti ugovoreni period. Znači, za osiguravajuće društvo rizik isplate je manji nego za banku, pa je i osigurana suma nešto veća nego što je akumulirani iznos na bankovnom računu. Uz to, da je lice imalo više od 40 godina, uz iste uplate, kod osiguranja isplata (osigurana suma) bi rasla, jer je rizik smrtnosti veći, tj. rizik doživljenja manji (stopa smrtnosti raste). Drugim riječima, rizik za osiguravača je manji, jer je polisa za slučaj doživljenja, pa osigurana suma raste. Samim tim rizik isplate za osiguravajuće društvo se smanjuje (povećava se vjerovatnoća da do isplate i ne dođe). Preporučujemo čitaocu da uradi isti zadatak za lice staro 50 godina i provjeri prethodne navode. Starosno doba ne igra ulogu kod prvog dijela zadatka, jer je isplata od strane banke zagarantovana.

**26**. a) Naći mizu koju treba da uplati 50-godišnjak da bi osigurao doživotnu godišnju rentu od 7.000 €, ako isplate počinju 30 godina poslije izvršene uplate (uz 5% godišnje).

b) Isto tako, odrediti koju svotu ta osoba treba da uloži u banku da bi imala pravo na godišnje isplate od 7.000 € (početkom godine) koje se počinju isplaćivati poslije 30 godina, u trajanju od 20 godina, uz 5% *p*. a. d? Uporediti iznose iz a) i b), pa dati komentar.

**Rješenje**:

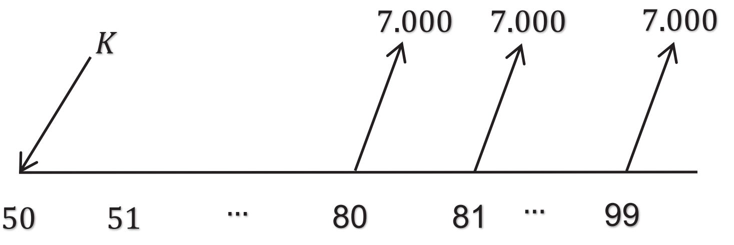
a)




Miza iznosi:

$$M = R \cdot \frac{N_{80}}{D_{50}} = R \cdot \frac{2.066,810}{6.463,889} = 0,31974713R, \text{ pa je } M = 0,31974713 \cdot 7.000 = 2.238,23 .$$

b)




Prema principu ekvivalencije, svođenjem novčanih tokova na $t$ = 0 (uz $p$ = 5, tj. $q$ = 1,05) dobija se jednačina vrijednosti:

$$K = \frac{7.000}{q^{30}} + \frac{7.000}{q^{31}} + \ldots + \frac{7.000}{q^{49}} \Rightarrow K = \frac{7.000}{q^{49}} \cdot \left(q^{19} + q^{18} + \ldots + 1\right) = \frac{7.000}{q^{49}} \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1}, \text{ pa je}$$

$$K = 640,9473932 \cdot 33,0659541 = 21.193,54 .$$

Dakle, u banku treba uložiti 21.193,54 €, što je značajno veći iznos od 2.238,23 € koji bi trebalo uložiti kod osiguranja (zbog velikog broja godina).
Kod osiguranja postoji visok rizik da osoba neće doživjeti 80. ili neku od narednih godina, pa je zbog toga miza manja. Kod bankarskih isplata ona je bezuslovna, tj. ne zavisi od doživljenja, pa je zbog toga i iznos uplate veći.

**27**. a) Naći mizu koju treba da uplati 40-godišnja osoba da bi osigurala doživotnu godišnju rentu od 2.000 €, ako isplate počinju 20 godina poslije izvršene uplate (uz 5% kamate godišnje).

b) Odrediti, isto tako, koju svotu treba da uloži u banku ta osoba da bi imala pravo na godišnje isplate od 2.000 € (početkom godine), koje se počinju isplaćivati poslije 20 godina u razdoblju od 30 godina, uz 5% kamate godišnje dekurzivno.

c) Koja je od njih veća i za koliko procenata?

**Rješenje**:

a) Kod rentnih osiguranja, uplata je jednaka zbiru očekivanih diskontovanih isplata (u osiguravajuće-tehničkom smislu):

$M = R\cdot\frac{N_{60}}{D_{40}} = R\cdot\frac{37.333,81}{11.139,36} = 3,35152R = 3,35152\cdot 2.000 = 6.703,04$, pa miza iznosi 6.703,04 €.

b) I u klasičnim finansijama uplata je jednaka diskontovanoj isplati (za $p = 5$, q = 1,05), ali nemamo vjerovatnoća doživljenja:

$$K = \frac{2.000}{q^{20}} + \frac{2.000}{q^{21}} + \ldots + \frac{2.000}{q^{49}} \Rightarrow K = \frac{2.000}{q^{49}}\cdot\left(q^{29} + q^{28} + \ldots + 1\right) = \frac{3.000}{q^{49}}\cdot\frac{q^{30}-1}{q-1},$$

odakle je $K = 183,1278\cdot 66,4388 = 12.166,79$, pa uplata u banku iznosi 12.166,79 €. Očigledno je $M < K$.

c) Odredimo za koliko je to u procentima.

Iz $\frac{12.166,79 - 6.703,04}{6.703,04}\cdot 100 = 81,5$, dobija se da je uplata u banku za 81,5% veća od jednokratne premije osiguravajućoj kompaniji.

**28**. Lice staro 50 godina želi da osigura odloženu rentu 20 godina, koju će primati narednih 10 godina, anticipativno. Koliko će iznositi polugodišnja premija ako godišnja renta iznosi 5.000 €?

**Rješenje**:

Do premija u ratama ćemo doći na osnovu godišnjih premija:

$P\cdot\frac{N_{50}-N_{70}}{D_{50}} = 5.000\cdot\frac{N_{70}-N_{80}}{D_{50}}$, odakle je $P = \frac{5.000\cdot\left(N_{70}-N_{80}\right)}{N_{50}-N_{70}}$, pa je godišnja premija jednaka $P = 648,58$ €.

Primjenom koeficijenta – korektivnog faktora za polugodišnje plaćanje (k = 2) od 1,02 (vidjeti u udžbeniku), polugodišnja premija iznosi $P_1 \approx \frac{1}{2}\cdot P\cdot 1,02 = 330,77$ €.

**29**. Lice staro 40 godina želi da osigura odloženu doživotnu anticipativnu rentu od 10.000 € godišnje premijama. Rentu počinje primati od navršene 67. godine. Koliki je iznos:

a) godišnje premije, koja se plaća za sve vrijeme odloženosti?

b) u slučaju odloženosti od 10 godina?

c) mjesečne premije koju osiguranik treba da plaća za vrijeme odloženosti od 27 godina, a koliki za vrijeme od 10 godina?

**Rješenje**:

a) Kako nije riječ o mizi, već su u pitanju godišnje neposredne privremene premije za odloženu doživotnu ličnu premiju, to važi:

$P \cdot \frac{N_{40} - N_{67}}{D_{40}} = 10.000 \cdot \frac{N_{67}}{D_{40}} \Rightarrow P \cdot \frac{176.052,3 - 17.500,12}{11.139,36} = 10.000 \cdot \frac{17.500,12}{11.139,36}$, pa je

$P = 1.103,75$, što znači da tražena premija iznosi 1.103,75 €.

b) Sada je:

$P_1 \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} = 10.000 \cdot \frac{N_{50}}{D_{40}} \Rightarrow P_1 \cdot \frac{176.052,3 - 87.508,08}{11.139,36} = 10.000 \cdot \frac{87.508,08}{11.139,36}$, pa je

$P_1 = 9.883,94$, što znači da tražena premija, u ovom slučaju, iznosi 9.883,94 €.

c) Ako je godišnja premija *P*, tada je mjesečna premija $P^{(12)}$ približno jednaka $P^{(12)} \approx \frac{1}{12} \cdot P \cdot 1,04$, gdje je 1,04 je korektivni faktor za k = 12 (vidjeti udžbenik).

Sada korišćenjem rezultata a) i b) dobijamo redom:

$P^{(12)} \approx \frac{1}{12} \cdot 1.103,75 \cdot 1,04 = 95,66$ € i $P_1^{(12)} \approx \frac{1}{12} \cdot 9.883,94 \cdot 1,04 = 856,61$ €.

**30**. Osoba stara 45 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate, tako da u slučaju doživljenja 60. godine dobije kapital, a njegovi nasljednici istu osiguranu sumu kad god da umre i plaća bruto premiju 700 € za 15 godina. Akvizicioni troškovi su jednokratno 1,9%, upravni troškovi su godišnje 7‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 2,1% od bruto premije. Odrediti visinu osiguranog kapitala. Kolika je neto premija?

**Rješenje**:

Dati su podaci: PB = 700; n = 15; $x_1 = 1,9\% = 0,019$; $e = 7‰ = 0,007$; $z = 2,1‰ = 0,021$.

Nađimo vezu između neto premije i kapitala.

Svođenjem novčanih tokova na *t* = 0 dobija se jednačina vrijednosti:

$PN \cdot \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = K \cdot \left( \frac{D_{60}}{D_{45}} + \frac{M_{45}}{D_{45}} \right)$, pa se nakon uvrštavanja vrijednosti iz tablica i računanja dobija $PN \cdot 10,377 = 0,70646K$, tj. $PN = 0,06808K$.

Primijetimo da je, na osnovu proporcije, $PN = K \cdot PN_1$, gdje je $PN_1$ neto premija za jediničnu osiguranu sumu, a *PN* stvarna neto premija (za kapital *K*). Isto važi i za bruto premiju: $PB = K \cdot PB_1$. Iz uslova zadatka je *PB* = 700 €, a $PN_1 = 0,06808K$, pa je $PN = 0,06808K$, kao i gore.

Svedimo jednokratne akvizicione troškove na odgovarajući godišnji iznos:

Kako je $d \cdot \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = 0,019$, to je $d = \frac{0,019}{10,377} = 0,00183$.

Iz date bruto premije odredimo osigurani kapital *K*.

Važi:

$PB = \frac{PN_1 + d + e}{1 - z} \cdot K$, tj. $700 = \frac{0,06808 + 0,00183 + 0,007}{1 - 0,021} K = \frac{0,07691}{0,979} K = 0,07855K$

tj. *K* = 8.910,41, odakle je $PN = 0,06808K = 606,625$, pa neto premija iznosi 606,625 €.

**31**. Osoba stara 55 godina osigurala je odloženu (10 godina) privremenu (10 godina) ličnu rentu.

a) Kolikih 10 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih neto premija treba da uplati ako je renta 5.000 €?

b) Koliko iznosi renta, kao i neto premija, ako je osoba 10 godina plaćala bruto premiju od 1.000 €, akvizicioni troškovi su jednokratno 1,9%, upravni troškovi su godišnje 4,9‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,7% od bruto premije?

**Rješenje**:

a) Izjednačavajući sadašnju očekivanu vrijednost uplata i isplata važi:

$P \cdot \frac{N_{55} - N_{65}}{D_{55}} = R \cdot \frac{N_{65} - N_{75}}{D_{55}}$. Uvrštavanjem rente i vrijednosti iz tablica:

$P \cdot \frac{58.632,93 - 22.130,65}{4.813,048} = 5.000 \cdot \frac{22.130,65 - 5.526,666}{4.813,048}$, odakle je

$P \cdot 7,584025 = 5.000 \cdot 3,44979$, pa godišnja premija iznosi $P = 2.274,38$ €.

Dakle, osoba stara 55 godina treba da uplati 10 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih neto premija u iznosu od 2.274,38 € ako je renta 5.000 €.

b) Treba naći rentu i neto premiju. Dati su podaci: $n$ = 10, PB = 1.000, $x_1$ = 1,9% = 0,019, $e$ = 4,9‰ = 0,0049 (već su godišnji!), $z$ = 1,7% = 0,017.

Godišnji iznos akvizicionih troškova je $d = \frac{x_1}{a_{55,10}} = \frac{0,019}{7,584025} = 0,0025$.

Iz jednačine vrijednosti date pod a) dobijeno je $PN \cdot 7,584025 = R \cdot 3,44979$, odakle je $PN = 0,45488R$, tj. $PN_1$ = 0,45488, jer neto premija za rentu $R$ iznosi $PN = R \cdot PN_1$.

Korišćenjem formule za bruto premiju $PB = \frac{PN_1 + d + e}{1 - z} R$, gdje je $PB$ stvarna bruto premija, a $PN_1$ neto premija za jedinicu, redom imamo:

$1.000 = \frac{0,45488 + 0,0025 + 0,0049}{1 - 0,017} R = \frac{0,46228R}{0,983} = 0,47027R$, pa je $R$ = 2.126,42 €, a neto premija $PN$ = 0,45488R = 967,26 €.

**32**. Osoba stara 50 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate i 20-godišnjim trajanjem.

a) Kolikih 20 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 90.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 20 godina plaćala bruto premiju od 2.000 €, akvizicioni troškovi su jednokratno 1,7%, upravni troškovi su godišnje 7,5‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,9% od bruto premije?

**Rješenje**:

a) Jednačina vrijednosti (sadašnja vrijednost očekivanih priliva jednaka je sadašnjoj vrijednosti očekivanih odliva) glasi:

$P \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{50}} = K \left( \frac{M_{50}}{D_{50}} + \frac{D_{70}}{D_{50}} \right)$, pa se nakon skraćivanja i računa dobija da treba uplatiti 20 jednakih anticipativnih godišnjih premija $P = 4.578,44$ €.

b) Slično kao pod a), imamo:

$PN \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{50}} = K \left( \frac{M_{50}}{D_{50}} + \frac{D_{70}}{D_{50}} \right)$, odakle je $PN = PN_1 \cdot K = 0,050871549K$.

Godišnji dio $d$ akvizicionih troškova $x_1$, koji odgovara kapitalu $K$ = 1 iznosi:

$d \cdot \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{50}} = \frac{1,7}{100}$, tj. $d = 0,001452928$. Upravni troškovi $y$ već su dati na godišnjem nivou, pa je: $e = 0,0075$. Inkaso troškovi su $z = \frac{1,9}{100} = 0,019$.

Kako je bruto premija $PB = 2.000$, to imamo:

$PB = \frac{PN_1 + d + e}{1 - z} \cdot K$, pa se uvrštavanjem ranije dobijenih vrijednosti dobija:

$2.000 = \frac{0,050871549 + 0,001452928 + 0,0075}{1 - 0,019} \cdot K$, tj. $1.962 = 0,05982447K$, odakle je $K = 32.795,94$ i $PN = 1.668,38 (= PN_1 \cdot K)$. Dakle, osigurana suma iznosi 32.795,94 €, a neto premija 1.668,38 €.

**Napomena:** Uraditi zadatak pod b) ako je data neto premija od 2.000 €. Tada bi prvo, iz $PN_1$ i $PN = 2.000$, odredili $K$, a zatim i $PB$ iz relacije $PB = PB_1 \cdot K$.

**33**. Odrediti srednje trajanje života lica starog 40 godina, kao i vjerovatnoću da ta osoba doživi 65. godinu, a onda da umre u toku naredne, ako je $\ell_x = 100.000\sqrt{1 - \frac{x}{102}}$. Skicirati funkciju doživljenja, pa na grafiku prikazati $l_{27}$.

**34**. Dat je intenzitet smrtnosti $\mu_x = \frac{2x}{105^2 - x^2}$. Ako je $\ell_0 = 100.000$, odrediti funkciju doživljenja $\ell_x$, kao i najdublju starost. Kolike dvije neposredne anticipativne jednake premije treba da uplati osoba stara 60 godina ako želi da primi dvije jednake anticipativne odložene (10 godina) rente od 3.000 €? Kamatna stopa je 6%.

**35**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = 100.000\sqrt{1 - \frac{x^2}{99^2}}$.

a) Naći vjerovatno trajanje života osobe stare 67 godina.

b) Kolike dvije premije, koje stoje u odnosu 2 : 3, treba da uplati osoba stara 52 godine da bi osigurala 80.000 € za slučaj doživljenja 73. godine? Kamatna stopa je 4%.

**36**. Ako je funkcija doživljenja $\ell_x = 100.000 \cdot 0,95^x$, kolika je vjerovatnoća da će lice staro 65 godina biti mrtvo za 5 godina? Ukoliko se to lice osigura za slučaj doživljenja 80. godine na 100.000 €, kolike dvije jednake neposredne godišnje anticipativne premije treba da uplati? Kamatna stopa je 5%. Odrediti vjerovatno trajanje života osobe stare x godina.

**37**. Data je funkcija intenziteta smrtnosti $\mu_x = \dfrac{x}{107^2 - x^2}$. Ako je $\ell_0 = 100.000$, odrediti funkciju $\ell_x$, kao i najdublju starost. Kolike dvije neposredne anticipativne premije, koje stoje u odnosu 3 : 2, treba da uplati osoba stara 50 godina ako želi da primi dvije jednake anticipativne odložene (10 godina) rente od 3.000 €? Kamatna stopa je 7%. Ako su premije jednake, odrediti i tada njihov iznos.

**38**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = \dfrac{100.000}{\ln 107}\ln(107 - x)$.

a) Naći vjerovatnoću da od dvije osobe stare 45 i 60 godina nijedna neće biti mrtva nakon 10 godina, ako umiru nezavisno jedna od druge.

b) Naći najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 43 godine.

**39**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = \dfrac{100.000}{\ln 104}\ln(104 - x)$.

a) Naći vjerovatnoću da će od dvije osobe stare 55 i 60 godina tačno jedna biti živa nakon 10 godina, ako umiru nezavisno jedna od druge.

b) Naći najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 43 godine.

**40**. Data je funkcija doživljenja $\ell_x = \dfrac{100.000}{\ln 105}\ln(105 - x)$.

a) Naći vjerovatnoću da će od dvije osobe stare 40 i 50 godina tačno jedna biti mrtva nakon 10 godina, ako umiru nezavisno jedna od druge.

b) Naći najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 45 godina.

**41**. a) Ako je $\ell_x = 100.000$ i $\mu_x = -\ln b$, dokazati da je $\ell_x = 100.000 \cdot b^x$ ($b$ je dati parametar). Važi i obrnuto. Dokazati.

b) Za datu funkciju doživljenja odrediti vjerovatnoću da osoba od 59 godina ne doživi narednu godinu.

**42**. Odrediti srednje trajanje života lica starog 45 godina i vjerovatnoću da ta osoba doživi 70 godina, ako je $\ell_x = \dfrac{50.000}{53} \cdot (106 - x)$. Skicirati grafik funkcije doživljenja.

**43**. a) Izvesti formulu za funkciju doživljenja ako je dat intenzitet smrtnosti.

b) Ako je $\ell_0 = 100.000$ i $\mu_x = 2 + 3e^{4x}$, naći $\ell_x$.

**44**. Data je funkcija doživljenja $l_x = 100.000\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{98^2}}$.

a) Naći vjerovatnoću da od dvije osobe stare 45 i 50 godina tačno jedna bude mrtva za 20 godina.

b) Kolike dvije neposredne anticipativne premije treba da uplati osoba stara 55 godine da bi osigurala odloženu (20 godina), privremenu (2 godine) ličnu rentu od 10.000 €, ako je prva premija 15% manja od druge? Kamatna stopa je 3%.

**45**. Data je funkcija doživljenja $l_x = 100.000\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{97^2}}$.

a) Naći vjerovatnoću da od dvije osobe stare 55 i 60 godina nijedna ne bude mrtva za 20 godina.

b) Kolike dvije neposredne anticipativne premije treba da uplati osoba stara 45 godine da bi osigurala odloženu (15 godina), privremenu (2 godine) ličnu rentu od 10.000 €, ako je prva premija 20% veća od druge? Kamatna stopa je 4%.

**46**. Data je funkcija doživljenja $l_x = 100.000\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{97^2}}$.

a) Naći intenzitet smrtnosti osobe stare 55 godina.

b) Kolike dvije neposredne anticipativne premije koje stoje u odnosu 4 : 5 treba da uplati osoba stara 55 godine da bi osigurala 55.000 € za slučaj doživljenja 75. godine? Kamatna stopa je 6%.

**47**. Data je funkcija doživljenja $l_x = \dfrac{50.000}{51}\left(102^2 - x^2\right)$.

a) Odrediti vjerovatno trajanje života osobe stare 47 godina, kao i najdublju starost. Skicirati grafik funkcije doživljenja.

b) Odrediti srednje trajanje života osobe stare 44 godine.

**48**. Dat je intenzitet smrtnosti $\mu_x = \dfrac{x-1}{102^2 - x^2}$.

a) Naći najdublju starost i vjerovatno trajanje života osobe stare 54 godine.

b) Kolike dvije premije koje stoje u odnosu 3 : 5 treba da uplati osoba stara 52 godine da bi osigurala 60.000 € za slučaj doživljenja 75. godine? Kamatna stopa je 6%.

**49**. Data je funkcija intenziteta smrtnosti $\mu_x = \dfrac{1}{105-x}$. Ako je $\ell_0 = 100.000$, odrediti funkciju $\ell_x$, kao i najdublju starost. Kolike dvije neposredne anticipativne jednake premije treba da uplati osoba stara 50 godina ako želi da primi dvije jednake anticipativne odložene (10 godina) rente od 2.000 €? Kamatna stopa je 6%.

**50**. Osoba stara 46 godina osigurala je odloženu (10 godina) doživotnu ličnu rentu.

a) Kolikih 10 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih neto premija treba da uplati ako je renta 4.000 €?

b) Koliko iznosi renta, kao i neto premija, ako je osoba 10 godina plaćala bruto premiju od 2.000 €, akvizicioni troškovi su jednokratno 1,7%, upravni troškovi su godišnje 5,9‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,2% od bruto premije?

**51**. Osoba stara 48 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate i 18-godišnjim trajanjem.

a) Kolikih 18 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 78.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 18 godina plaćala bruto premiju od 1.800 €, akvizicioni troškovi su godišnje 1,6%, upravni troškovi su jednokratno 8‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 2% od bruto premije?

**52**. Osoba stara 53 godine osigurala je kapital mješovitim osiguranjem s jednom isplatom i 17-godišnjim trajanjem.

a) Kolikih 17 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 40.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 17 godina plaćala bruto premiju od 1.000 €, akvizicioni troškovi su godišnje 1,5%, upravni troškovi su jednokratno 7‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,4% od bruto premije?

**53**. Osoba stara 55 godine osigurala je kapital mješovitim osiguranjem s jednom isplatom i 20-godišnjim trajanjem.

a) Kolikih 20 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 55.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 20 godina plaćala bruto premiju od 800 €, akvizicioni troškovi su jednokratno 1,8%, upravni troškovi su godišnje 6,7‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,3% od bruto premije?

**54**. Početkom svake godine 41-godišnjak plaća neto premiju od 1.000 € u trajanju od 15 godina.

a) Koliko iznosi kapital koji želi da osigura po mješovitom osiguranju s jednom isplatom i trajanjem od 15 godina, uz kamatnu stopu od 5%?

b) Za isti model, koliko iznosi odgovarajuća bruto premija ako je osoba 15 godina plaćala neto premiju od 1.000 €, akvizicioni troškovi su godišnje 1,2%, upravni troškovi su jednokratno 7‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,3% od bruto premije?

**55**. Osoba stara 50 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate i 10-godišnjim trajanjem.

a) Kolikih 10 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 50.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 10 godina plaćala bruto premiju od 3.000 €, akvizicioni troškovi su jednokratno 1,7%, upravni troškovi su godišnje 3,5‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,6% od bruto premije?

**56**. Osoba stara 40 godina osigurala se za slučaj doživljenja 75. godine. Akvizicioni troškovi su 26‰ od osigurane sume, upravni troškovi su 36‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 0,24% bruto premije. Odrediti i izraziti je u promilima:

a) visinu jednokratne bruto premije za jedinicu osigurane sume,

b) godišnju privremenu (15 godina) bruto premiju za jedinicu osigurane sume.

**57**. Osoba stara 50 godina osigurala se doživotno za slučaj smrti. Akvizicioni troškovi su 2% od osigurane sume, upravni troškovi su 29‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 2,8‰ bruto premije. Odrediti i izraziti je u promilima:

a) visinu jednokratne bruto premije za jedinicu osigurane sume,

b) godišnju privremenu (17 godina) bruto premiju za jedinicu osigurane sume.

**58**. Osoba stara 48 godina osigurala je odloženu (10 godina) doživotnu ličnu rentu.

a) Kolikih 10 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih neto premija treba da uplati ako je renta 3.000 €?

b) Koliko iznosi renta, kao i neto premija, ako je osoba 10 godina plaćala bruto premiju od 1.800 €, akvizicioni troškovi su godišnje 1,2%, upravni troškovi su jednokratno 4,2‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,3% od bruto premije?

**59**. Osoba stara 50 godina osigurala je kapital za slučaj smrti, neposredno doživotno.

a) Kolikih 10 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih neto premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 50.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 10 godina plaćala bruto premiju od 2.000 €, akvizicioni troškovi su jednokratno 1,3%, upravni troškovi su godišnje 2,8‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 1,8% od bruto premije?

**60**. Osoba stara 62 godina osigurala je kapital za slučaj smrti, neposredno doživotno.

a) Kolikih 13 jednakih neposrednih anticipativnih godišnjih neto premija treba da uplati ako osigurani kapital iznosi 40.000 €?

b) Koliko iznosi osigurani kapital, kao i neto premija, ako je osoba 13 godina plaćala bruto premiju od 1.000 €, akvizicioni troškovi su godišnje 1,4%, upravni troškovi su jednokratno 3,1‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 2,3% od bruto premije?

**61**. Osoba stara 45 godina uplatila je 10 premija takvih da su prvih 5 po 3.000 €, a preostale po 2.000 €. Želi da prima doživotnu odloženu (10 godina) ličnu rentu, takvu da su prvih 15 međusobno jednake, narednih 5 ne prima ništa, a onda do kraja života prima novu rentu za 15% manju od prvih (međusobno su jednake). Odrediti rente. Kamatna stopa je 5%.

**62**. Osoba stara 45 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate, tako da u slučaju doživljenja 60. godine dobije kapital, a njeni nasljednici istu sumu kad god da umre i plaća bruto premiju 600 € za 15 godina. Akvizicioni troškovi su jednokratno 1,8%, upravni troškovi su godišnje 8‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 2,1% od bruto premije. Odrediti visinu osiguranog kapitala. Kolika je neto premija?

**63**. Osoba stara 55 godina uplatila je 10 premija takvih da su prvih 5 po 2.000 €, a preostale po 3.000 €. Želi da prima doživotnu odloženu (10 godina) ličnu rentu, takvu da su prvih 10 međusobno jednake, narednih 5 ne prima ništa, a onda do kraja života prima novu rentu za 15% veću od prvih (međusobno su jednake). Odrediti rente. Kamatna stopa je 5%.

**64**. Osoba stara 50 godina uplatila je 10 premija takvih da su prvih 5 (međusobno su jednake) 20% veće od drugih 5 (međusobno su jednake). Želi da prima doživotnu odloženu (10 godina) ličnu rentu, takvu da su prvih 10 po 1.000 €, narednih 5 ne prima ništa, a onda do kraja života prima po 1.500 €. Odrediti rente. Kamatna stopa je 5%.

**65**. Osoba stara 40 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem s jednom isplatom i 20-godišnjim trajanjem i plaća bruto premiju 600 € za 20 godina. Akvizicioni troškovi su jednokratno 1,8%, upravni troškovi su godišnje 8‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi iznose 2,1% od bruto premije. Odrediti visinu osiguranog kapitala. Kolika je neto premija?

**66**. Osoba stara 40 godina uplatila je 20 premija takvih da su prvih 10 (međusobno su jednake) 20% manje od drugih 10 (međusobno su jednake). Želi da prima doživotnu odloženu (20 godina) ličnu rentu, takvu da su prvih 15 po 2.000 €, narednih 10 ne prima ništa, a onda do kraja života prima po 1.500 €. Odrediti premije. Kamatna stopa je 5%.

**67**. Početkom svake godine 35-godišnjak ulaže u banku, u trajanju od 20 godina, iznos od 10.000 €.

a) Kolikim će iznosom raspolagati u banci 25 godina nakon prvog uloga, ako banka odobrava 5% dekurzivnih složenih kamata?

b) Koliki bi mu iznos u slučaju doživljenja 60. godine isplatilo osiguravajuće društvo, uz kamatnu stopu od 5%, ako bi početkom svake godine uplaćivao neto premiju iste visine (10.000 €) za 20 godina? Uporediti rezultate pod a) i b) i interpretirati ih.

**68**. Osoba stara 50 godina želi da osigura 200.000 € za slučaj doživljenja 60 godina uz 6%.

a) Koju jednokratnu premiju treba da uplati?

b) Koju svotu treba da uloži u banku da bi poslije 10 godina uštedjela 200.000 € uz 6%?

c) Izraziti uplate, u oba slučaja, u procentima isplaćene svote.

**69**. Naći mizu koju treba da uplati 40-godišnjak da bi osigurao doživotnu godišnju rentu od 10.000 € ako isplate počinju 20 godina poslije izvršene uplate (uz 5% kamate godišnje). Isto tako, odrediti koju svotu ta osoba treba da uloži u banku da bi imala pravo na godišnje isplate (početkom godine) koje se počinju isplaćivati poslije 20 godina, u trajanju od 30 godina, uz 5% kamate godišnje dekurzivno. Uporediti iznose iz a) i b) pa dati komentar.

**70**. a) Izračunati visinu godišnje neto premije koju bi osoba stara 30 godina plaćala doživotno za doživotno osiguranje za slučaj smrti, ako bi htjela da osigura iznos od 100.000 € i ako bi se visina te godišnje premije nakon 20 godina smanjila na polovinu.

b) Kolika je odgovarajuća konstantna bruto premija ako su akvizicioni troškovi jednokratno 3%, a upravni godišnje 5‰ osigurane sume? Inkaso troškovi su 4% bruto premije.

**71**. a) Izračunati visinu godišnje neto premije koju bi osoba stara 40 godina plaćala doživotno za doživotno osiguranje za slučaj smrti, ako bi htjela da osigura iznos od 200.000€ i ako bi se visina te godišnje premije nakon 30 godina udvostručila.

b) Kolika je odgovarajuća konstantna bruto premija ako su akvizicioni troškovi jednokratno 2%, a upravni godišnje 4‰ osigurane sume? Inkaso troškovi su 3% bruto premije.

**72**. Osoba stara 50 godina osigurala je odloženu (10 godina) doživotnu ličnu rentu. Akvizicioni troškovi su jednokratno 24‰ od osigurane sume, upravni troškovi su godišnje 5‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 1,8% bruto premije. Odrediti godišnju privremenu (za 5 godina) neto premiju, ako je bruto premija 2.000 €.

**73**. Osoba stara 50 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem s jednom isplatom i 10-godišnjim trajanjem. Akvizicioni troškovi su godišnje 5‰, upravni troškovi su jednokratno 33‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 1,1% bruto premije. Odrediti godišnju privremenu (za 5 godina) bruto premiju, ako je neto premija 6.000 €.

**74**. Osoba stara 40 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem s 2 isplate i 15-godišnjim trajanjem. Akvizicioni troškovi su godišnje 6‰, upravni troškovi su jednokratno 33‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 1,1% bruto premije. Odrediti godišnju privremenu (za 10 godina) bruto premiju, ako je neto premija 5.000 €.

**75**. Osoba stara 45 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem s jednom isplatom i 12-godišnjim trajanjem. Akvizicioni troškovi su jednokratno 25‰ od osigurane sume, upravni troškovi su godišnje 4‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 1,5% bruto premije. Odrediti godišnju privremenu (za 7 godina) neto premiju, ako je bruto premija 4.000 €.

**76**. Osoba stara 55 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate i 10-godišnjim trajanjem. Akvizicioni troškovi su jednokratno 25‰ od osigurane sume, upravni troškovi su godišnje 5‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 1,5% bruto premije. Odrediti godišnju privremenu (za 5 godina) neto premiju, ako je bruto premija 5.000 €.

**77**. Osoba stara 42 godine želi da osigura iznos od 100.000 € za doživotno osiguranje za slučaj smrti.

a) Izračunati visinu godišnje neto premije koju bi plaćala doživotno, ako bi se visina te godišnje premije nakon 20 godina duplo povećala.

b) Kolika je odgovarajuća konstantna bruto premija, ako su akvizicioni troškovi jednokratno 2%, a upravni godišnje 3‰ osigurane sume? Inkaso troškovi su 4% bruto premije.

**78**. Osoba stara 38 godina želi da osigura iznos od 110.000 € za doživotno osiguranje za slučaj smrti.

a) Izračunati visinu godišnje neto premije, koju bi plaćala doživotno, ako bi se visina te godišnje premije nakon 30 godina smanjila na polovinu.

b) Kolika je odgovarajuća konstantna bruto premija, ako su akvizicioni troškovi jednokratno 4%, a upravni godišnje 5‰ osigurane sume? Inkaso troškovi su 3% bruto premije.

**79**. Osoba stara 50 godina osigurala je kapital mješovitim osiguranjem sa 2 isplate i 10-godišnjim trajanjem. Akvizicioni troškovi su 26‰ od osigurane sume, upravni troškovi su 36‰ od osigurane sume, dok inkaso troškovi iznose 0,24% bruto premije. Odrediti i izraziti u promilima:

a) visinu jednokratne bruto premije za jedinicu osigurane sume,

b) godišnju privremenu (10 godina) bruto premiju za jedinicu osigurane sume.

**80**. a) Ako lice staro 40 godina uplati 10.000 €, naći koju će mu doživotnu anticipativnu rentu plaćati osiguravajuća kompanija počev od dana uplate.

b) Izračunati i rentu u slučaju kada su prisutni dopunski režijski troškovi od 10% osigurane sume.

c) Koja je od njih veća i za koliko procenata?

**81**. a) Lice od 40 godina osiguralo je 10.000 € da mu se isplati ako doživi 50 godina. Naći jednokratnu premiju.

b) Osoba stara 50 godina želi da osigura 10.000 € za slučaj doživljenja 60 godina uz 4%. Koju premiju treba uplatiti? Koju svotu ova osoba treba da uloži u banku, da bi poslije 10 godina uštedjela 10.000 € uz 4%? Izraziti uplate u oba slučaja u procentima isplaćene svote.

**82**. a) Tridesetogodišnjak je osigurao 50.000 € da se isplati nasljednicima poslije njegove smrti, ako on umre poslije 10 godina od dana osiguranja. Naći jednokratnu premiju u ovom slučaju.

b) Koliko će se isplatiti novca nasljedniku osiguranog lica od 30 godina koje je dalo jednokratnu premiju od 7.343 €, pod uslovom da umre poslije 10 godina od dana osiguranja?

**83**. a) Lice od 50 godina osiguralo je 100.000 € po mješovitom osiguranju s jednom isplatom, sa 20-godišnjim trajanjem i godišnjim premijama, privremenim za 20 godina. Odrediti godišnju premiju kod ove vrste osiguranja.

b) Naći mizu ako umjesto godišnjeg plaćanja premija imamo jednokratnu premiju.

c) Na koji iznos bi bila osigurana ista osoba na utvrđeni rok (bez obzira na umiranje), ako bi uplatila mizu dobijenu pod b)? Ugovoreni rok je 20 godina. Kamatna stopa je 5%.

**84**. a) Lice staro 50 godina osiguralo je doživotnu neposrednu godišnju rentu od 100.000 €, tako da početkom svakih 6 mjeseci prima po 50.000 €. Odrediti jednokratnu premiju.

b) Lice od 37 godina uplatilo je mizu od 18.000 €. Kolika je polugodišnja rata neposredne dekurzivne kvartalne doživotne rente koju je ovom jednokratnom premijom osigurala ta osoba?

**85**. Osoba stara 30 godina želi da osigura 50.000 € za slučaj doživljenja 50 godina, uz 5% *p*. a. d.. Koju neto premiju treba da uplati? Koju svotu bi trebalo uložiti u banku da bi poslije 20 godina ova osoba uštedjela 50.000 € uz 5% godišnje dekurzivno? Izraziti uplate, u oba slučaja, u procentima isplaćene svote.

**86**. a) Doživotno za slučaj smrti osigurala se 30-godišnja osoba i odmah uplatila iznos od 5.000 €. Koliku bi godišnju neto premiju morala da plaća doživotno, počevši od naredne godine, ako bi željela da bude osigurana na iznos od 100.000 €?

b) Doživotno za slučaj smrti 40-godišnjak se osigurao odloženo (za 3 godine) i uplatio odmah 1.000 € i početkom naredne godine (ako je doživi) još 1.000 €. Koliku bi godišnju neto premiju morao da plaća doživotno, nakon 2 godine od momenta osiguranja, ako bi se htio osigurati na 40.000 €?

**87**. Odrediti visinu godišnje premije koju bi plaćao 20 godina (odnosno do ranije smrti) 26-godišnjak da bi osigurao, za slučaj doživljenja 50. godine, isplatu kapitala od 100.000 € i još, počev od 51. godine, doživotnu godišnju dekurzivnu rentu od 20.000 €.

**88**. a) Izračunati visinu godišnje premije koju bi osoba stara 30 godina plaćala doživotno, za doživotno osiguranje za slučaj smrti, ako bi htjela da osigura iznos od 100.000 € i ako bi se visina te godišnje premije nakon 20 godina smanjila na polovinu.

b) Uraditi isti zadatak ako ta osoba ne plaća premije doživotno već do svoje 70. godine, ako je doživi. Ostali elementi ostaju nepromijenjeni.

**89**. Osoba stara 50 godina osigurala se doživotno za slučaj smrti. Akvizicioni troškovi iznose 15‰, upravni 50‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi su 2% od bruto premije. Odrediti, pa izraziti u promilima:

a) jednokratnu bruto premiju za jedinicu osigurane sume i

b) godišnju (za 15 godina) bruto premiju za jedinicu osigurane sume.

**90**. Lice staro 50 godina osiguralo je kapital za slučaj doživljenja 72. godine. Akvizicioni troškovi su 20‰, upravni 40‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi su 2% od bruto premije. Odrediti, pa izraziti u promilima:

a) jednokratnu bruto premiju za jedinicu osigurane sume i

b) godišnju (za 20 godina) bruto premiju za ovu vrstu osiguranja, za jedinicu osigurane sume.

**91**. Lice staro 50 godina osiguralo je kapital za slučaj doživljenja 70. godine i plaća bruto premiju od 1000 € za 15 godina. Akvizicioni troškovi su jednokratno 1%, upravni troškovi su godišnje 4‰ osigurane sume, a inkaso troškovi su 2% od bruto premije. Koliki je kapital? Kolika je neto premija?

# LITERATURA


[1] Car, M., *Matematika za ekonomiste,* Narodne novine, Zagreb, 1973.

[2] Chan, Wai-Sum, Tse, Yiu-Kuen, *Financial Mathematics for Actuaries*, WSPC, 3rd Edition, 2022.

[3] Dabčević, A., Filipović, S., Sekulić, B., *Osnove matematike za ekonomiste*, Informator, Zagreb, 1971.

[4] Kašćelan, V., Novović, M., *Osiguranje i aktuarska matematika*, Ekonomski fakultet Podgorica, 2009.

[5] Kočović, J., Pavlović, M., *Uvod u finansijsku matematiku*, Ekonomski fakultet Beograd, 2010.

[6] Laković, B., Kašćelan, V., *Privredna i finansijska matematika*, II izdanje, Poslovna škola, Ekonomski fakultet Podgorica, 1997.

[7] McCutcheon, J. J., Scott, W. F., *An Introduction to the Mathematics of Finance,* Butterworth-Heinemann LTD, Scotland, 1986.

[8] Promislow, S. D., *Fundamentals of Actuarial Mathematics*, John Wiley & Sons, Ltd., 2015.

[9] Ralević, R. i grupa autora, *Matematika za ekonomiste,* Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[10] Фалин, А. Г., Фалин. Г. И., *Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев: Учебное пособие*. – Изд. 2-е, перераб. и доп.– М.: МАКС Пресс, 2019 – 359 с. ISBN 978-5-317-06167-8

# TABLICE SMRTNOSTI[2]

| x | lx | dx | Dx | Nx | Cx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | 11.230,00 | 100.000,00 | 1.706.232,60 | 10.695,24 | 18.750,64 |
| 1 | 88.770,00 | 1.992,00 | 84.542,86 | 1.606.232,60 | 1.806,80 | 8.055,40 |
| 2 | 86.778,00 | 865,00 | 78.710,20 | 1.521.689,80 | 747,29 | 6.248,60 |
| 3 | 85.913,00 | 462,00 | 74.214,88 | 1.442.979,60 | 380,09 | 5.501,38 |
| 4 | 85.451,00 | 293,00 | 70.300,75 | 1.368.764,70 | 229,57 | 5.121,29 |
| 5 | 85.158,00 | 203,00 | 66.723,52 | 1.298.463,90 | 151,42 | 4.891,72 |
| 6 | 84.955,00 | 152,00 | 63.394,73 | 1.231.740,40 | 108,02 | 4.740,23 |
| 7 | 84.803,00 | 133,00 | 60.267,91 | 1.168.345,70 | 90,00 | 4.632,21 |
| 8 | 84.670,00 | 119,00 | 57.307,99 | 1.108.077,80 | 76,71 | 4.542,21 |
| 9 | 84.551,00 | 107,00 | 54.502,33 | 1.050.769,80 | 65,69 | 4.465,50 |
| 10 | 84.444,00 | 98,00 | 51.841,29 | 996.267,50 | 57,30 | 4.399,81 |
| 11 | 84.346,00 | 90,00 | 49.315,36 | 944.426,20 | 50,12 | 4.342,51 |
| 12 | 84.256,00 | 89,00 | 46.916,89 | 895.110,80 | 47,20 | 4.292,40 |
| 13 | 84.167,00 | 121,00 | 44.635,56 | 848.193,90 | 61,11 | 4.245,20 |
| 14 | 84.046,00 | 105,00 | 42.448,94 | 803.588,40 | 50,51 | 4.184,09 |
| 15 | 83.941,00 | 116,00 | 40.377,06 | 761.109,40 | 53,14 | 4.133,58 |
| 16 | 83.825,00 | 128,00 | 38.401,20 | 720.732,40 | 55,85 | 4.080,44 |
| 17 | 83.697,00 | 141,00 | 36.516,72 | 682.331,20 | 58,59 | 4.024,59 |
| 18 | 83.556,00 | 154,00 | 34.719,24 | 645.814,40 | 60,94 | 3.966,00 |
| 19 | 83.402,00 | 165,00 | 33.005,00 | 611.095,20 | 62,19 | 3.905,06 |
| 20 | 83.237,00 | 178,00 | 31.371,15 | 578.090,20 | 63,89 | 3.842,87 |
| 21 | 83.059,00 | 190,00 | 29.813,39 | 546.719,00 | 64,95 | 3.778,98 |
| 22 | 82.869,00 | 203,00 | 28.328,76 | 516.905,70 | 66,09 | 3.714,03 |
| 23 | 82.666,00 | 216,00 | 26.913,68 | 488.576,90 | 66,97 | 3.647,94 |
| 24 | 82.450,00 | 223,00 | 25.565,10 | 461.663,20 | 65,85 | 3.580,97 |
| 25 | 82.227,00 | 223,00 | 24.281,86 | 436.098,10 | 63,72 | 3.515,11 |
| 26 | 82.004,00 | 222,00 | 23.062,86 | 411.816,30 | 59,46 | 3.452,40 |
| 27 | 81.782,00 | 222,00 | 21.905,17 | 388.753,40 | 56,63 | 3.392,93 |
| 28 | 81.560,00 | 226,00 | 20.805,44 | 366.848,20 | 54,91 | 3.336,30 |
| 29 | 81.334,00 | 229,00 | 19.759,80 | 346.042,80 | 52,99 | 3.281,40 |
| 30 | 81.105,00 | 230,00 | 18.765,87 | 326.283,00 | 50,68 | 3.228,41 |
| 31 | 80.875,00 | 231,00 | 17.821,57 | 307.517,10 | 48,48 | 3.177,73 |
| 32 | 80.644,00 | 237,00 | 16.924,45 | 289.695,50 | 47,37 | 3.129,25 |
| 33 | 80.407,00 | 249,00 | 16.071,15 | 272.771,10 | 47,40 | 3.081,88 |
| 34 | 80.158,00 | 266,00 | 15.258,48 | 256.699,90 | 48,22 | 3.034,48 |
| 35 | 79.892,00 | 283,00 | 14.483,64 | 241.441,50 | 48,86 | 2.986,26 |
| 36 | 79.609,00 | 291,00 | 13.745,08 | 226.957,80 | 47,85 | 2.937,40 |
| 37 | 79.318,00 | 293,00 | 13.042,71 | 313.212,80 | 45,89 | 2.889,55 |

[2] Baza: tablice smrtnosti, jugoslovenske – izravnate od 1953. godine, uz kamatnu stopu od 5%.

| x | lx | dx | Dx | Nx | Cx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 79.025 | 298 | 12.375,740 | 200.170,100 | 44,4461 | 2.843,660 |
| 39 | 78.727 | 306 | 11.741,970 | 187.794,300 | 43,4660 | 2.799,214 |
| 40 | 78.421 | 320 | 11.139,360 | 176.052,300 | 43,2901 | 2.755,748 |
| 41 | 78.101 | 323 | 10.565,630 | 164.913,000 | 41,6152 | 2.712,458 |
| 42 | 77.778 | 362 | 10.020,890 | 154.347,400 | 44,4190 | 2.670,842 |
| 43 | 77.416 | 386 | 9.499,284 | 144.326,500 | 45,1085 | 2.626,423 |
| 44 | 77.030 | 411 | 9.001,828 | 134.827,200 | 45,7429 | 2.581,315 |
| 45 | 76.619 | 440 | 8.527,427 | 125.825,400 | 46,6385 | 2.535,572 |
| 46 | 79.179 | 462 | 8.074,721 | 117.297,900 | 46,6385 | 2.488,934 |
| 47 | 75.717 | 493 | 7.643,571 | 109.223,200 | 47,3981 | 2.442,295 |
| 48 | 75.224 | 529 | 7.232,194 | 101.579,600 | 48,4373 | 2.394,897 |
| 49 | 74.695 | 571 | 6.839,366 | 94.347,440 | 49,7933 | 2.346,460 |
| 50 | 74.124 | 620 | 6.463,889 | 87.508,080 | 51,4917 | 2.296,666 |
| 51 | 73.504 | 675 | 6.104,593 | 81.044,190 | 53,3900 | 2.245,175 |
| 52 | 72.829 | 734 | 5.760,508 | 74.939,600 | 55,2921 | 2.191,785 |
| 53 | 72.095 | 795 | 5.430,906 | 69.179,090 | 57,0355 | 2.136,492 |
| 54 | 71.300 | 858 | 5.115,256 | 63.748,180 | 58,6241 | 2.079,457 |
| 55 | 70.442 | 920 | 4.813,048 | 58.632,930 | 59,8669 | 2.020,833 |
| 56 | 69.522 | 982 | 4.523,988 | 53.819,880 | 60,8585 | 1.960,966 |
| 57 | 68.540 | 1.049 | 4.247,702 | 49.295,890 | 61,9150 | 1.900,107 |
| 58 | 67.491 | 1.120 | 3.983,515 | 45.048,190 | 62,9578 | 1.838,192 |
| 59 | 66.371 | 1.204 | 3.730,867 | 41.064,670 | 64,4568 | 1.775,235 |
| 60 | 65.167 | 1.303 | 3.488,749 | 37.333,810 | 66,4350 | 1.710,778 |
| 61 | 63.864 | 1.417 | 3.256,183 | 33.845,060 | 68,8071 | 1.644,343 |
| 62 | 62.447 | 1.541 | 3.032,320 | 30.588,870 | 71,2651 | 1.575,536 |
| 63 | 60.906 | 1.664 | 2.816,659 | 27.556,550 | 73,2889 | 1.504,271 |
| 64 | 59.242 | 1.781 | 2.609,243 | 24.739,890 | 74,7067 | 1.430,982 |
| 65 | 57.461 | 1.884 | 2.410,287 | 22.130,650 | 75,2640 | 1.356,275 |
| 66 | 55.577 | 1.971 | 2.220,247 | 19.720,360 | 74,9901 | 1.281,011 |
| 67 | 53.606 | 2.054 | 2.039,531 | 17.500,120 | 74,4266 | 1.206,021 |
| 68 | 51.552 | 2.136 | 1.867,984 | 15.460,590 | 73,7123 | 1.131,594 |
| 69 | 49.416 | 2.231 | 1.705,320 | 13.592,600 | 73,3244 | 1.057,882 |
| 70 | 47.185 | 2.334 | 1.550,790 | 11.877,280 | 73,0568 | 984,558 |
| 71 | 44.851 | 2.433 | 1.403,886 | 10.336,490 | 72,5291 | 911,501 |
| 72 | 42.418 | 2.522 | 1.264,505 | 8.932,607 | 71,6022 | 838,972 |
| 73 | 39.896 | 2.589 | 1.132,689 | 7.668,102 | 70,0048 | 767,370 |
| 74 | 37.307 | 2.645 | 1.008,747 | 6.535,413 | 68,1127 | 697,366 |
| 75 | 34.662 | 2.685 | 892,599 | 5.526,666 | 65,8503 | 629,253 |
| 76 | 31.977,00 | 2.692,00 | 784,24 | 4.634,07 | 62,88 | 563,40 |
| 77 | 29.285,00 | 2.666,00 | 684,02 | 3.849,82 | 59,31 | 500,52 |
| 78 | 26.619,00 | 2.695,00 | 592,14 | 3.165,80 | 57,10 | 441,22 |
| 79 | 23.924,00 | 2.655,00 | 506,85 | 2.573,66 | 53,57 | 384,12 |

| *x* | *lx* | *dx* | *Dx* | *Nx* | *Cx* | *Mx* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 21.269,00 | 2.637,00 | 429,14 | 2.066,81 | 50,67 | 330,55 |
| 81 | 18.632,00 | 2.569,00 | 358,04 | 1.637,67 | 47,02 | 279,88 |
| 82 | 16.063,00 | 2.417,00 | 293,97 | 1.279,63 | 42,13 | 323,86 |
| 83 | 13.646,00 | 2.241,00 | 237,84 | 985,66 | 37,20 | 190,74 |
| 84 | 11.405,00 | 2.033,20 | 189,32 | 747,82 | 32,14 | 153,54 |
| 85 | 9.371,80 | 1.798,70 | 148,16 | 558,50 | 27,08 | 121,39 |
| 86 | 7.573,10 | 1.555,60 | 114,02 | 410,34 | 22,31 | 94,31 |
| 87 | 6.017,50 | 1.322,60 | 86,29 | 296,31 | 18,06 | 72,01 |
| 88 | 4.694,90 | 1.103,00 | 64,12 | 210,02 | 14,35 | 53,94 |
| 89 | 3.591,90 | 903,40 | 46,72 | 145,91 | 11,19 | 39,60 |
| 90 | 2.688,50 | 724,00 | 33,30 | 99,19 | 8,51 | 28,58 |
| 91 | 1.964,50 | 564,90 | 23,18 | 65,89 | 6,35 | 20,04 |
| 92 | 1.399,60 | 425,49 | 15,72 | 42,71 | 4,55 | 13,69 |
| 93 | 974,11 | 307,68 | 10,42 | 26,99 | 3,14 | 9,14 |
| 94 | 666,43 | 217,67 | 6,79 | 16,57 | 2,11 | 6,00 |
| 95 | 448,76 | 154,77 | 4,36 | 9,77 | 1,43 | 3,89 |
| 96 | 293,99 | 114,89 | 2,72 | 5,42 | 1,01 | 2,46 |
| 97 | 179,10 | 81,07 | 1,58 | 2,70 | 0,68 | 1,12 |
| 98 | 98,03 | 60,10 | 0,82 | 1,12 | 0,48 | 0,77 |
| 99 | 37,93 | 37,93 | 0,30 | 0,30 | 0,29 | 0,29 |
| 100 | 0 | | | | | |

ISBN 978-86-7664-256-4
9 788676 642564 >

**Vladimir Kašćelan i Saša Vujošević**

**FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA**
ZBIRKA ZADATAKA