

Programiranje I, Zadaci – Tjuringove mašine

Postavke zadataka

3. $n = 3k$ zaustavlja se (MZ), $n = 3k + 1$ ili $n = 3k + 2$ vječno radi

4. $m = n$ MZ, $m \neq n$ vječno

7. $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots \Rightarrow$

$]a_0 \underbrace{a_0 a_1 \dots a_0 a_1}_n a_0 \dots$

8. $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots \Rightarrow$

$]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0 \dots$

9. $f = \text{sign } x$, računa funkciju (druga oznaka za $\text{sign } x$ je $\text{sgn } x$)

10. $f = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, računa funkciju

11. $f = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, računa funkciju

12. $f = x \dot{-} y$, računa funkciju (druga oznaka za $x \dot{-} y$ je $\max\{x - y, 0\}$)

13. $f = x \div 1$, normalno računa funkciju

14. $f = 1 - \text{sign } x$, normalno računa funkciju

15. $f = 2x$, normalno računa funkciju

16. $f = x + y$, normalno računa funkciju

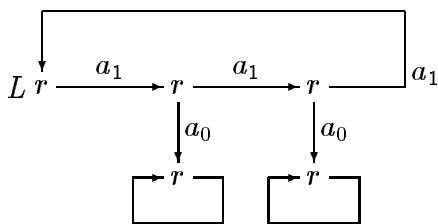
17. $f = x^2$, računa funkciju

18. $f = \min(x, y)$, računa funkciju

Rješenja zadataka

③ $n = 3k$ zaustavlja se (MZ), $n = 3k + 1$ ili $n = 3k + 2$ vječno radi

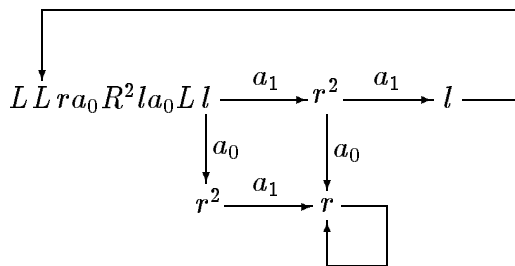
početna pozicija $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots$



④ $m = n$ MZ, $m \neq n$ vječno

$]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots$

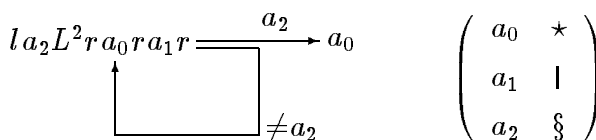
ponavlja se: izbriši prvo slovo prve riječi i izbriši zadnje slovo druge riječi



⑦ $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots \Rightarrow$

$]a_0 \underbrace{a_0 a_1 \dots a_0 a_1}_n a_0 \dots$

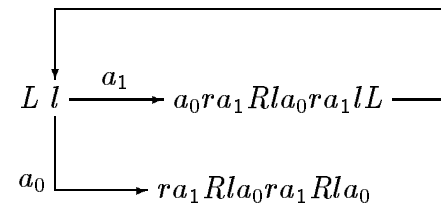
staviti a_2 kao marker na mjestu zadnjeg slova druge riječi



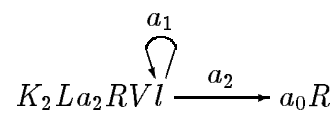
⑧ $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots \Rightarrow$

$]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0 \dots$

ponavlja se: prva riječ se skraćuje, druga riječ se pomijera ulijevo, trećoj riječi se dodaje jedno slovo

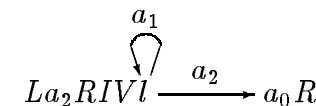


Drugo rješenje bi bilo:



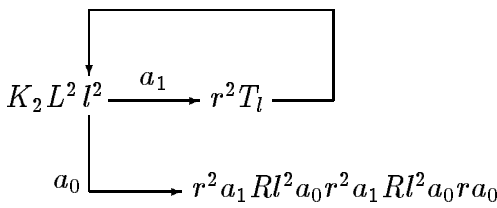
(V kada je $t = 2$)

treće rješenje bi bilo:



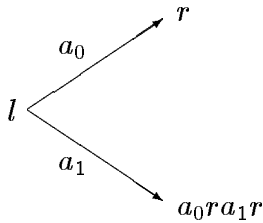
(I – mašina u azbuci A_2 , V – ulazna azbuka mašine je A_2)

četvrto rješenje bi bilo (radi samo ako je $m \geq 2$ i $n \geq 2$):



(9) $f = \text{sign } x$, računa funkciju
radnja $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots \Rightarrow] \sim a_0 f a_0$

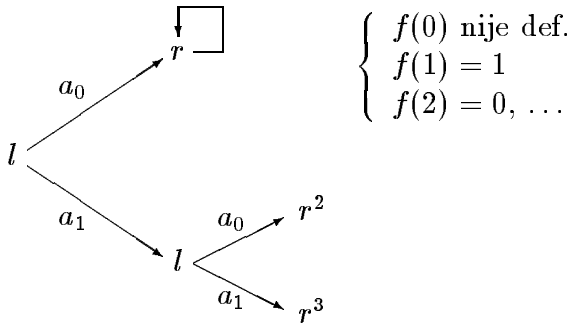
$f = \square$ ako je $n = 0$
 $f = a_1$ ako je $n > 0$



moguće poč. poz.				
u sl. $x=0$ ($x=\square$)				
a_0	a_0	\dots		
↑				
u sl. $x=1$ ($x=a_1$)				
a_0	a_1	a_0	\dots	
↑				
u sl. $x=2$ ($x=a_1 a_1$)				
a_0	a_1	a_1	a_0	\dots
↑				
itd.				

(10) $f = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, računa funkciju

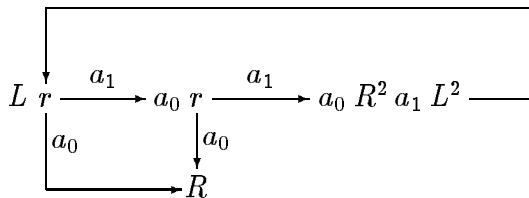
$]a_0 a_0 \dots$ vječno
 $]a_0 a_1 a_0 \dots \Rightarrow] \sim a_0 a_1 a_0$
 $n \geq 2]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots \Rightarrow] \sim a_0 a_0$



$\begin{cases} f(0) \text{ nije def.} \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 0, \dots \end{cases}$

(11) $f = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, računa funkciju

$]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{2m} a_0 \dots \Rightarrow] \sim a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0$
 $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{2m+1} a_0 \dots \Rightarrow] \sim a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_m a_0$

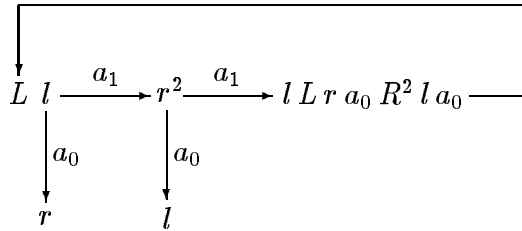


(12) $f = x \div y$, računa funkciju

$f(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{ako je } x \geq y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

$]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_x a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_y a_0 \dots \Rightarrow] \sim a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_f a_0$

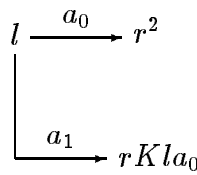
Oduzeti prvo slovo x i zadnje slovo y . Dok se x ne potroši ($f = 0$) ili dok se y ne potroši ($f =$ preostali dio riječi x).



(13) $f = x \div 1$, normalno računa funkciju

$f = \square$ ako je $x = \square$
 $f = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-1}$ ako je $x = \underbrace{a_1 \dots a_1}_n$

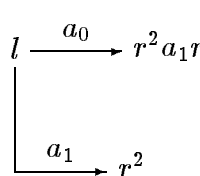
$]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_x a_0 \dots \Rightarrow]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_x a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_f a_0 \dots$



npr. početna pozicija						
a_0	a_1	a_1	a_0	\dots		
↑						
završna pozicija						
a_0	a_1	a_1	a_0	a_1	a_0	\dots
↑						

(14) $f = 1 - \text{sign } x$, normalno računa funkciju

$f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0, \dots$
ako je $x = \square$ onda je $f = a_1$, ako je $x = a_1$
ili $x = a_1 a_1$ ili $x = a_1 a_1 a_1$ ili \dots onda je $f = \square$
 $]a_0 x a_0 \dots \Rightarrow]a_0 x a_0 f a_0 \dots$



npr. početna pozicija					
a_0	a_1	a_1	a_0	\dots	
↑					
završna pozicija					
a_0	a_1	a_1	a_0	a_0	\dots
↑					

(15) $f = 2x$, normalno računa funkciju

ako je $x = \underbrace{a_1 \dots a_1}_n$ onda je $f = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{2n}$

radnja $]a_0 x a_0 \dots \Rightarrow]a_0 x a_0 f a_0 \dots$

posebno, ako je $x = 0$ (ako je $x = \square$) tada treba $]a_0 a_0 \dots \Rightarrow]a_0 a_0 a_0 \dots$

Početna pozicija: $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots$

među-pozicija: $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots$

među-pozicija: $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \dots$

završna pozicija: $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{2n} a_0 \dots$

Rješenje (dijagram mašine):

$$K^2 l \xrightarrow{a_1} L a_1 R l a_0$$

(16) $f = x + y$, normalno računa funkciju ako je $x = \underbrace{a_1 a_1 a_1 a_1}_4$ i $y = \underbrace{a_1 \dots a_1}_7$ onda je

$f = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{11}$ i slično

$]a_0 x a_0 y a_0 \dots \Rightarrow]a_0 x a_0 y a_0 f a_0 \dots$

$$K_2^2 l \xrightarrow{a_1} L a_1 R l a_0$$

Plan: prekopirati x , prekopirati y , spojiti dvije kopije. Posebno obratiti pažnju na slučaj kada je $y = 0$ (kada je $y = \square$).

(17) $f = x^2$, računa funkciju Ako je $x = \underbrace{a_1 \dots a_1}_7$ onda je $f = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{49}$ i

slično

$]a_0 x a_0 \dots \Rightarrow]\sim a_0 f a_0$

Rješenje bi bilo KP (treba dijagram mašine P).

(18) $f = \min(x, y)$, računa funkciju

$]a_0 x a_0 y a_0 \dots \Rightarrow]\sim a_0 f a_0$

Plan rješenja. U pojedinom koraku, prva riječ x skraćuje se za jedno slovo (oduzima se njeno prvo slovo) i druga riječ y isto se za jedno slovo skraćuje (isto prvo slovo). Koraci se ponavljaju. Iz ponavljanja se izlazi kada se prva riječ potroši (tada je rezultat f – prva riječ, kakva je ona bila na početku rada programa) ili kada se potroši druga riječ (tada druga riječ predstavlja rezultat).

Početna pozicija: $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_x a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_y a_0 \dots$

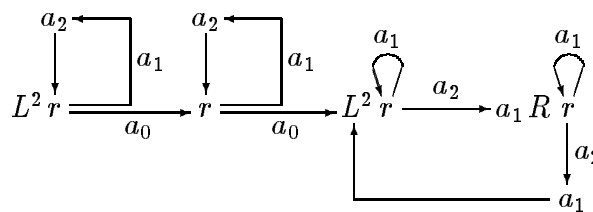
među-pozicija: $]a_0 \underbrace{a_2 \dots a_2}_x a_0 \underbrace{a_2 \dots a_2}_y a_0 \dots$

među-pozicija koja se ponavlja više puta: $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_k \underbrace{a_2 \dots a_2}_{x-k} a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_k \underbrace{a_2 \dots a_2}_{y-k} a_0 \dots$

{ do $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_k \underbrace{a_1 \dots a_1}_k \underbrace{a_2 \dots a_2}_{y-k} a_0 \dots$
ili $]a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{k+1} \underbrace{a_2 \dots a_2}_{x-k-1} \underbrace{a_1 \dots a_1}_k a_0 \dots$

rezultat je (završna pozicija je) $\sim a_0 \underbrace{a_1 \dots a_1}_k a_0$

Rješenje (dijagram mašine):



Npr. u slučaju početne poz.

a_0	a_1	a_1	a_0	a_1	a_1	a_1	a_0	\dots
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	---------

dobiće se kao završna pozicija

\sim	a_0	a_1	a_1	a_0	\sim
--------	-------	-------	-------	-------	--------

Znamo da "mašina je saopštila riječ w " ili svejedno "rezultat rada mašine je riječ w " znači da završna pozicija mašine glasi $] \sim a_0 w a_0$, gdje $w \in \Omega(A_t)$.