MEDICINSKA STATISTIKA SA INFORMATIKOM

Vjerovatnoća

Uvod

- Teorija vjerovatnoće je matematička osnova statistike
  - Bavi se izučavanjem matematičkih modela stvarnih pojava
  - U statistici se metodom uzimanja uzorka uspostavlja veza između stvarnih i matematičkih modela
- Eksperimetni
  - Deterministički eksperiment
  - Statistički eksperiment
    - Može se ponavljati proizvoljan broj puta
    - Poznati su svi mogući ishodi
    - Ishod nije unaprijed poznat

Statistički eksperiment, definicije

- Svaki mogući ishod statističkog eksperimenta naziva se elementarni događaj
- Skup svih elementarnih događaja obilježava se sa Ω
- Podskup skupa Ω naziva se događaj, događaj se realizovao ako je registrovan jedan od elementarnih događaja koji mu pripadaju
  - Siguran događaj, nemoguć događaj

Primjeri

- Odrediti Ω u eksperimentu bacanja novčića
- Odrediti Ω u eksperimentu bacanja kocke
  - Odrediti događaj A – pojavila su se dva ista broja
  - Događaj B – pale su dvije šestice
  - Događaj C – zbir brojeva je 7
- Kocka se baca dva puta. Odrediti Ω
- Meta se gađa sve do prvog pogotka, a registruje se broj gađanja. Odrediti Ω

Operacije sa događajima

- Realizovao se ili A ili B – A U B
- Realizovali se istovremeno A i B – AB
- Realizovao se događaj A ali ne i B, A \ B
- Nije se realizovao događaj A, A^c
- Pojava događaja A implicira pojavu B, A podskup B
- Uzajamna isključivost događaja

Aksiome teorije vjerovatnoće

- Neka je dat skup Ω. Funkcija P definisana na podskupovima skupa Ω za koju važi

  A1. $P(\Omega) = 1$

  A2. $0 \leq P(A) \leq 1$

  A3. ako su događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ uzajamno isključivi onda važi

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = \sum P(A_i)$$

  naziva se vjerovatnoća na skupu Ω. Broj P(A) naziva se vjerovatnoća događaja A

Metode računanja vjerovatnoće

- Jednako vjerovatni ishodi, neka skup Ω ima n elementarnih događaja koji su jednako vjerovatni, neka skup A sadrži m elementarnih događaja, tada je $P(A)=m/n$
- Statističko određivanje vjerovatnoće, ponavljanje eksperimenta veliki broj puta, granična vrijednost količnika m/n uzima se za vjerovatnoću događaja A

Metode računanja vjerovatnoće (2)

- Geometrijska vjerovatnoća, $P(A) = mes(A)/mes(\Omega)$, gdje je mes mjera (dužina, površina ili zapremina) oblasti A, odnosno Ω
- Zadatak. Tržni centar je otvoren od 8 do 20 sati. Kupac ulazi u trenutku X, a izlazi u trenutku Y. Izračunati da kupac ostaje u centru manje od 2 sata. Rješenje 11/36

Slučajan izbor

- Neka je dat skup S iz koga se bira k elemenata. Kažemo da je izbor slučajan ako svaki podskup od k elemenata ima istu vjerovatnoću da bude izabran
  - Slučajan uzorak je dobijen slučajnim izborom iz populacije

Osobine vjerovatnoće

- Ako su A i B isključivi događaji, tada je $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
- Ako je A podskup B, $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Primjeri

- Bacaju se dvije pravilne numerisane kocke. Neka je A događaj da je zbir palih brojeva neparan, B je događaj da je pala bar jedna jedinica. Odrediti P(AB) i P(AUB). Rješenje 1/6, 17/36.

Kombinatorika

- Pravilo zbira, ako se predmet jedne vrste može izabrati na n1 načina, predmet druge vrste na n2 načina, …, predmet k-te vrste na nk načina, onda se jedan predmet (bez obzira na vrstu) može izabrati na n1 + n2 + … +nk načina
- Pravilo proizvoda, ako se predmet jedne vrste može izabrati na n1 načina, predmet druge vrste na n2 načina, …, predmet k-te vrste na nk načina, onda se k predmeta, jedan za drugim može izabrati na n1*n2*...*nk načina

Primjeri

- U kutiji su 3 crvene, 4 bijele i 6 zelenih kuglica. Kuglice se međusobno razlikuju. Na koliko načina možemo izabrati jednu kuglicu.
- Prvo se baca numerisana kocka, a onda novčić. Naći broj mogućih ishoda.
- Bacaju se tri novčića. Naći vjerovatnoću da se dobiju dva pisma i jedna glava.

Permutacije bez ponavljanja

- Sastavljaju se uređene n-torke iz skupa od n elemenata. Svaka ovakva n-torka naziva se permutacija od n elemenata bez ponavljanja. Njihov broj je $n! = n * (n-1) * \ldots 2 * 1$
- U redu stoji sedmoro ljudi, među njima su Marko i Janko. Ljudi su slučajno napunili red. Naći vjerovatnoću da Marko i Janko stoje jedan pored drugog. Rješenje 2/7

Varijacije bez ponavljanja

- Iz skupa od n elemenata sastavljaju se uređene k-torke, njihov broj je n! / (n – k)!
- Zadatak. Kolika je vjerovatnoća da kandidatkinja iz Crne Gore bude među tri najljepše žene u izboru među 30 učesnica, ako svaka učesnica ima jednaku vjerovatnoću da bude izabrana. Rješenje 0.1

Kombinacije bez ponavljanja

- Svaki podskup od k elemenata skupa od n elemenata naziva se kombinacijom k-te klase od n elemenata, njihov broj je C_n^k
- Kolika je vjerovatnoća dobitka na LOTOu 7 od 39?

Permutacije sa ponavljanjem

- Posmatra se skup od n elemenata od kojih je m1 jedne vrste, m2 druge vrste, …, mk je k-te vrste. Svaka uređena n-torka ovog skupa naziva se permutacija sa ponavljanjem od n elemenata, njihov broj je n! / m1! * m2! * ...mk!
- Zadatak. Na koliko načina možemo na polici poređati pet crvenih, tri plave i tri bijele knjige?
- U nekoj poslastičarnici se mogu kupiti četiri vrste kolača. Na koliko načina je moguće kupiti 7 kolača?

Kombinacije sa ponavljanjem

- Od n vrsta nekih objekata formira se skup od k elemenata, broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata je C_{n+k-1}^{k}
- Ako neko ne voli jednu određenu vrstu kolača, kolika je vjerovatnoća da će biti zadovoljan kupovinom iz prethodnog zadatka? Rješenje 36/120

Varijacije sa ponavljanjem

- Iz skupa od n elemenata sastavljamo uređene k-torke, ali tako da se elementi mogu ponavljati, varijacije k-te klase sa ponavljanjem, njihov broj je n^k
- Kolika je vjerovatnoća da u društvu od n osoba postoje bar dvije rođene istog dana u godini? Naći najmanje n tako da ova vjerovatnoća bude ½. Rješenje n = 23.

Uslovna vjerovatnoća

- Uslovna vjerovatnoća događaja A, pod uslovom da se desio događaj B, gdje je P(B)>0, definiše se P(A|B)=P(AB)/P(B)
- Događaji A i B su nezavisni ako je P(AB) = P(A)*P(B)
- Ako su A i B nezavisni tada su nezavisni A i B^c, A^c i B, A^c i B^c
- Kolika je vjerovatnoća da se pojavio broj 2 na numerisanoj kocki, ako se zna da je pao paran broj? Rješenje 1/3

Primjeri

- U kutiji su 3 bijele i 4 crne kuglice. Iz kutije se slučajno izvlače dvije kuglice bez vraćanja. Odrediti vjerovatnoću da su obje bijele. Rješenje 1/7
- Bacaju se dvije kocke. Neka je A događaj – nepran broj na prvoj kocki, B – paran broj na drugoj kocki, a C – na prvoj kocki je broj veći od 3. Ispitati nezavisnost događaja A, B, C

Formula totalne vjerovatnoće

- Događaji H1, H2, …, Hn čine potpun sistem događaja ako su međusobno isključivi i ako je H1 U H2 U … U Hn = Ω
- Ako događaji H1, …, Hn čine potpuni sistem događaja i ako je A neki događaj, tada je

  P(A) = P(H1)P(A|H1)+P(H2)P(A|H2)+...+P(Hn)P(A|Hn)

Bajesova formula

- Ako događaji H1, …, Hn čine potpuni sistem događaja i ako je A neki događaj, tada je za svako i=1, 2, …, n

  $P(H_i|A)=P(AH_i)/P(A)=$

  $P(H_i)P(A|H_i)/P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+...+P(H_n)P(A|H_n)$

Primjeri

- Prodavnica se snabdijeva robom iz tri fabrike. Radi kontrole slučajno se bira fabrika i iz njene pošiljke jedno pakovanje. Vjerovatnoće da je pakovanje neispravno za prvu fabriku je 0.1, za drugu je 0.12, a za treću 0.2. Odrediti vjerovatnoću da je izabrano pakovanje neispravno. Rješenje 0.14
- Ako je izabran neispravan proizvod, kolika je vjerovatnoća da je on iz prve, druge ili treće fabrike?