

Statistički testovi

Uvod

- Hipoteza – tvrđenje o osobinama populacije
 - veličini parametra ili o obliku funkcije raspodjele osnovnog skupa
- Njena tačnost se ispituje pomoću podataka dobijenih iz slučajnog uzorka. Na temelju tih podataka se donosi odluka o tome da li se hipoteza prihvata, odnosno odbacuje.
 - Odluka se donosi na osnovu statističkog testa

Primjer 1

- Inspektor iz Agencije za zaštitu životne sredine želi odrediti da li je srednja vrijednost određenog zagadivača u okvirima dozvoljenim pravilnikom. Ako je 3 g/l gornja granica, inspektor će pokušati da na osnovu uzorka utvrdi da da li je $\mu > 3$.
- Recimo da je na osnovu uzorka konstruisan 99%-tni interval povjerenja
- Ukoliko cijeli interval leži iznad 3, s priličnom sigurnošću možemo zaključiti da je zakon prekršen
- Kakav je zaključak ako je dobijeni interval oblika (2.9, 3.9)?

Primjer 1

- Gornji primjer nam daje uvid u problematiku kojom ćemo se baviti.
- U njemu nalazimo određenu tvrdnju - hipotezu koju provjeravamo.
 - Možemo li je formulirati?
- Kompleksnost teorije - treba znati pod kojim uslovima hipotezu prihvatamo, a kad je odbacujemo
 - Statistički test
- Kao kod svakog statističkog zaključivanja pri tom su moguće greške, jer se zaključci temelje na nepotpunom skupu podataka (uzorku). Pri tome nas zanima:
 - koliko su te greške velike?
 - kako izabrati test pa da one budu što manje?

Postavljanje hipoteza

- Pri testiranju postavljamo dvije hipoteze
 - nultu (H_0),
 - alternativnu (H_1).
- Njihov sadržaj određujemo sami, tako da je sadržaj alternativne u suprotnosti sa sadržajem nulte hipoteze.
- Ako se podsjetimo prethodnog primjera, hipoteze možemo definisati na sljedeći način:
 - $H_0: \mu \leq 3$,
 - $H_1: \mu > 3$.
- Međutim, uobičajeno je da se nulta hipoteza zapisuje pomoću znaka jednakosti (a ne nejednakosti)
 - $H_0: \mu = 3$,
 - H_1 ostaje nepromijenjena.
- Argumenti koji će nas uvjeriti da moramo odbaciti nultu hipotezu H_0 u korist alternativne, znače i odbacivanje hipoteze $\mu \leq 3$

Postavljanje hipoteza (2)

- Na primjer, ako smo zbog velike vrijednosti aritmetičke sredine uzorka x_{avg} zaključili da je $\mu > 3$, odnosno odbacili hipotezu $\mu = 3$, onda bi na osnovu istog argumenta pogotovo odbacili hipotezu $\mu = 2$ ili $\mu =$ pri čemu je bilo koji broj manji od 3.
- Ovakav zapis nulte hipoteze (pomoću jednakosti) s druge strane olakšava matematički račun i procjenu vjerojatnoće greške prilikom zaključivanja.

Testiranje

- Odluku koju od hipoteza trebamo prihvatiti kao istinitu donosimo na osnovu uzorka.
- Svakom uzorku pridružujemo slučajnu varijablu T na kojoj se zasniva test. Varijabla T uzima vrijednosti iz nekog velikog skupa R (\mathbb{R} ili \mathbb{R}^n), kojeg dijelimo na dva disjunktna podskupa A i B .
- Testiranje zatim provodimo na sljedeći način:
 - u slučaju $T \in A$ prihvatamo hipotezu H_0 kao istinitu, a u suprotnom ($T \in B$) odbacujemo H_0 i prihvatamo H_1 .
 - Skup A nazivamo područjem prihvatanja, dok je B područje odbijanja hipoteze H_0 .
- U prethodnom primjeru
 - test smo mogli zasnovati na varijabli x_{avg}
 - područje prihvatanja $A = [0; 3]$, a B kao $(3, \infty)$.
- Pri opisanom načinu testiranja postoji mogućnost dviju vrsta grešaka. Kojih?

Vrste grešaka

- Nulta hipoteza može biti ispravna ili ne; a mi je možemo prihvatiti ili odbaciti.
 - Moguće su četiri situacije prilikom testiranja hipoteza

H0	Istinita	Lažna
Prihvatamo	Ispravno	Greška 2. vrste
Odbacujemo	Greška 1. vrste	Ispravno

- Greške se javljaju u pola situacija.
 - možemo odbaciti H0 kad je ta hipoteza ustvari istinita (greška prve vrste), ili
 - možemo prihvatiti lažnu nultu hipotezu (greška druge vrste).
- Njihovo prisistvo ne možemo izbjeći, zadatak je da vjerovatnoća njihovog pojavljivanja bude što manja.

Vjerovatnoće grešaka

- Vjerovatnoću greške prve vrste označavamo sa α i nazivamo prag značajnosti

$$\alpha = P\{T \in B|H_0\}$$

- Vjerovatnoću greške druge vrste označavamo sa β

$$\beta = P\{T \in A|H_1\}$$

- Među uvedenim vjerovatnoćama postoji intuitivno lako naslutiva relacija:
 - smanjenje jedne dovodi do povećanja druge.
- Jedini način da se smanje obje vjerovatnoće je povećati veličinu uzorka.

Jačina testa

- Osim vjerovatnoća α i β mogućih grešaka prilikom testiranja, uvodi se još i pojam jačine ili snage testa.
- Jačina testa se definiše kao vjerovatnoća odbacivanja nulte hipoteze kad je ona zaista neispravna:

$$P\{T \in B|H_1\}$$

- Kako skupovi A i B sadrže sve moguće vrijednosti varijable T, zaključujemo da je jačina testa $1 - \beta$
- Vjerovatnoća greške prve vrste, se obično unaprijed zadaje (1%, 5%, ...).
- Uz dato α želimo da je jačina bude što veća.
 - To se postiže odgovarajućim odabirom skupova A i B.

Primjer 2

- Novčić X pokazuje grb sa vjerovatnoćom $p = 1/2$, dok novčić Y nije pravilan, pa pokazuje grb sa vjerovatnoćom $p = 2/3$. Uzmimo jedan novčić i bacimo ga tri puta. Broj grbova u ta tri bacanja je slučajna varijabla T pomoću koje treba odrediti da li je bacan novčić X ili Y.
- Drugim riječima, T je slučajna varijabla sa kojom testiramo hipoteze
 - $H_0 : p = 1/2$
 - $H_1 : p = 2/3$
- Neka je $\alpha = 12.5\%$

Rješenje

$$T \sim B(3, p)$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$(p = \frac{2}{3})$$

t	0	1	2	3
p(t)	1/8	3/8	3/8	1/8

t	0	1	2	3
p(t)	1/27	6/27	12/27	8/27

$$B = \{T = 0\} \quad \text{ili} \quad B' = \{T = 3\}$$

Vidimo da je drugi način za izbor B bolji jer smanjuje vjerovatnoću greške druge vrste

$$\alpha = P\{T \in B|H_0\} = P\{T \in B'|H_0\} = \frac{1}{8}$$

$$\beta = P\{T \in A|H_1\} = P\{T \in \{1, 2, 3\}|H_1\} = \frac{6 + 12 + 8}{27} = \frac{26}{27},$$

$$\beta' = P\{T \in A'|H_1\} = P\{T \in \{0, 1, 2\}|H_1\} = \frac{1 + 6 + 12}{27} = \frac{19}{27}$$

Primjer 3

Primjer 1. U kutiji se nalazi 10 kuglica i znamo da je kutija napunjena po jednoj od dvije strategije:

A) Sa 9 kuglica na kojima je broj 1 i jednom kuglicom na kojoj je broj 2.

B) Sa 9 kuglica na kojima je broj 2 i jednom kuglicom na kojoj je broj 1.

Dozvoljeno nam je da iz kutije izvučemo 4 kuglice po modelu sa vraćanjem. Na osnovu izvučenih kuglica tj. brojeva na njima, treba da se odlučimo za jednu od dvije hipoteze (pretpostavke, mogućnosti):

1⁰ Kutija je napunjena po strategiji A – govorićemo o hipotezi H_A .

2⁰ Kutija je napunjena po strategiji B – govorićemo o hipotezi H_B .