Programiranje II, Konsultacije za prvi kolokvijum, Zadaci iz Matematička indukcija i Rekurentne formule

Postavke zadataka

1 Dokazti da je $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ za $n \geq 1$. 2 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 52 Neka je $t_1 = 1$ i $t_n = 3t_{n-1} + 2$ za $n \geq 2$. Naći tačno rješenje $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. 53 $t_1 = 8$, $t_n = 3t_{n-1} - 15$. 54 $t_1 = 2$, $t_n = t_{n-1} + n - 1$. 55 $t_1 = 3$, $t_n = t_{n-1} + 2n - 3$. 56 $t_1 = 1$, $t_n = 2t_{n-1} + n - 1$. 57 $t_1 = 5$, $t_n = 2t_{n-1} + 3n + 1$. 73 Naći opšte rješenje rekurentne relacije $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$. Rezultat $c_1 + c_2 3^n$. 79 Naći a_n iz rekurentne relacije i početnih uslova: $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 16$. Rezultat Opšte rješenje ima oblik $a_n = c_1 + c_2 3^n$. Iz početnih uslova imamo $c_1 + 3c_2 = 10$, $c_1 + 9c_2 = 16$, odakle je $c_1 = 7$, $c_2 = 1$. Prema tome, $a_n = 7 + 3^n$.

Iz teorije. Navodimo poznate činjenice iz teorije koje se koriste prilikom rješavanja zadataka:

1 Princip matematičke indukcije glasi: ako je p_1 istinit iskaz (baza indukcije) i ako važi $(\forall n)\ (p_n \Rightarrow p_{n+1})$ (indukcijski korak) onda je iskaz p_n istinit za svako $n \in N$.

52 *I* Opšte rješenje jednačine oblika $t_n = \lambda t_{n-1} + \alpha$, gdje je $\lambda \neq 1$, glasi $t_n = c\lambda^n + a$, s tim da treba odrediti a pomoću supstitucije u samu jednačinu. c – proizvoljna konstanta. $t_1 =$ dati broj – pomoću izbora c.

II Opšte rješenje jednačine oblika $t_n = t_{n-1} + \alpha$ glasi $t_n = c + an$, s tim da treba odrediti a pomoću supstitucije u samu jednačinu. c – proizvoljna konstanta. $t_1 =$ dati broj – pomoću izbora c.

III Opšte rješenje jednačine oblika $t_n = \lambda t_{n-1} + \alpha n + \beta$, gdje je $\lambda \neq 1$, glasi $t_n = c\lambda^n + an + b$, s tim da treba odrediti a i b pomoću supstitucije u samu jednačinu. c – proizvoljna konstanta. $t_1 =$ dati broj – pomoću izbora c.

IV Opšte rješenje jednačine oblika $t_n = t_{n-1} + \alpha n + \beta$ glasi $t_n = c + an^2 + bn$, s tim da treba odrediti a i b pomoću supstitucije u samu jednačinu. c – proizvoljna konstanta. $t_1 =$ dati broj – pomoću izbora c.

73 Neka su λ_1 i λ_2 rješenja jednačine $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (tzv. karakteristična jednačina). Razmotrimo rekurentnu relaciju $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ $(n \geq 1)$ po nepoznatoj $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Njeno opšte rješenje glasi: $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$ ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Kada su dati uslovi $a_1 =$ dati broj i $a_2 =$ dati broj onda se iz opšteg rješenja izdvaja partikularno rješenje – pomoću izbora c_1 i c_2.

Rješenja zadataka

1 Vidimo da baza indukcije p_1 glasi $1 = 1$ i da je istinita. Ostaje da se dokaže indukcijski korak. U tom smislu, uzmimo da važi indukcijska hipoteza (indukcijska pretpostavka) p_n, a želimo da dokažemo da važi indukcijski zaključak p_{n+1} – oslanjanjem na hipotezu. Tako:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2},$$

izraz ima predviđeni oblik, dokaz je završen.

(2) Baza indukcije $1^2 = 2 \cdot 3/6$ je istinita. Indukcijski korak:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$\frac{n+1}{6}\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big) = \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3),$$

slaže se. Dokaz je završen.

(52) postavka $t_1 = 1$, $t_n = 3t_{n-1} + 2$
izrada $t_n = c \cdot 3^n + a$
$c \cdot 3^n + a = 3(c \cdot 3^{n-1} + a) + 2$
$a = 3a + 2 \qquad a = -1$
$t_n = c \cdot 3^n - 1$ ovo je rješenje,
ako se posmatra samo jednačina,
ako se ne bi posmatrao uslov $t_1 = 1$
$t_1 = 3c - 1 = 1 \qquad c = \frac{2}{3}$
rezultat $t_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n - 1$
ili svejedno $t_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$
(izvršiti provjeru)

(53) rezultat $t_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n + \frac{15}{2}$

(52) (53) I, (54) (55) IV, (56) (57) III

(54) postavka $t_1 = 2$, $t_n = t_{n-1} + n - 1$
izrada $t_n = c + an^2 + bn$
$c+an^2+bn=c+a(n-1)^2+b(n-1)+n-1$
$an^2+bn=an^2-2an+a+bn-b+n-1$
$0 = -2an + a - b + n - 1$
$0 = (-2a+1)n + a - b - 1$
$\begin{cases} 0 = -2a+1 \\ 0 = a - b - 1 \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$
$t_n = c + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ ovo je rješenje,
ako se posmatra samo jednačina,
ako se ne bi posmatrao uslov $t_1 = 2$
$t_1 = c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 \qquad c = 2$
rezultat $t_n = 2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

(55) $t_n = 4 + n^2 - 2n$

(56) postavka $t_1 = 1$, $t_n = 2t_{n-1} + n - 1$
izrada $t_n = c \cdot 2^n + an + b$
$c\cdot 2^n+an+b=2(c\cdot 2^{n-1}+a(n-1)+b)+n-1$
$an + b = 2an - 2a + 2b + n - 1$
$an + b = (2a+1)n - 2a + 2b - 1$
$\begin{cases} a = 2a+1 \\ b = -2a + 2b - 1 \end{cases} \qquad a = -1,\ b = -1$
$t_n = c \cdot 2^n - n - 1$ ovo je rješenje,
ako se posmatra samo jednačina,
ako se ne bi posmatrao uslov $t_1 = 1$
$t_1 = 2c - 1 - 1 = 1 \qquad c = \frac{3}{2}$
rezultat $t_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - n - 1$

(57) $t_n = \frac{15}{2} \cdot 2^n - 3n - 7$

(73) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$
$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$
$a_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n$

(79) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0,\ a_1 = 10,\ a_2 = 16$
$a_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n$
$\begin{cases} a_1 = c_1 + 3c_2 = 10 \\ a_2 = c_1 + 9c_2 = 16 \end{cases} \qquad c_1 = 7,\ c_2 = 1$
$a_n = 7 + 3^n$