1) Израчунати површину ограничену кривом $y^2 = 2x+1$ и правом $y = x-1$

$y^2 = 2x+1$

$2x = y^2 - 1$

$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{2}$

- пресек са y-осом

$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

$A_1(0,1)$, $A_2(0,-1)$

- пресек са x-осом (како је $b=0$ што ће бити и теме $T\left(-\frac{D}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$)

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad x = -\frac{1}{2} \qquad \underline{T\left(-\frac{1}{2}, 0\right)}$$

- пресек параболе и праве

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2x+1 \\ y = x-1 \end{array}\right\}$$

$(x-1)^2 = 2x+1$

$x^2 - 2x + \cancel{1} = 2x + \cancel{1}$

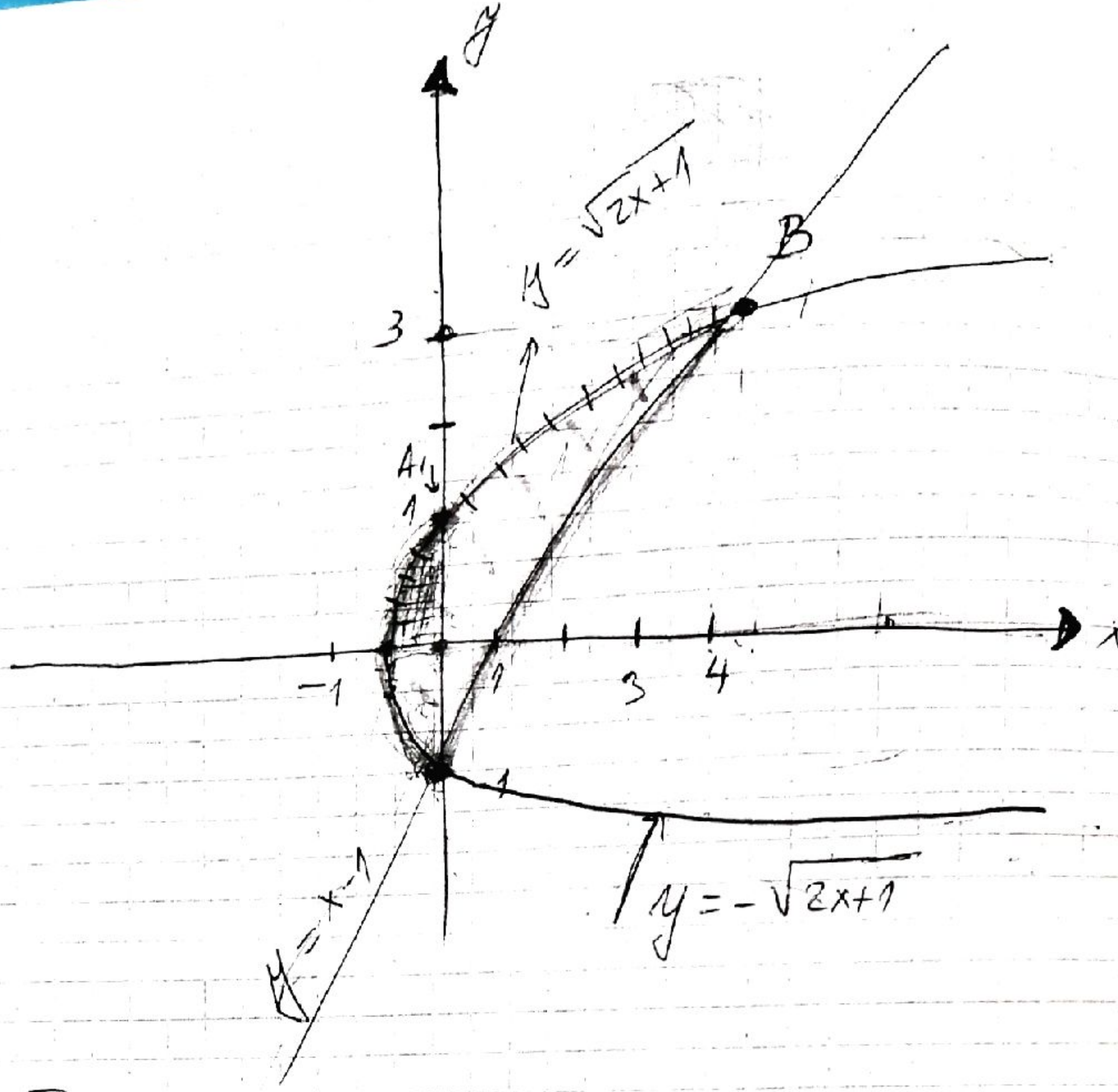
$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0 \lor x = 4$

$y = -1$ $\qquad$ $y = 3$

$A_2(0,-1)$ $\qquad$ $B(4,3)$



I начин

$x=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}$

$x=y+1$

$$P=\int_{-1}^{3} y+1-\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}\right)dy =$$

$$=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{2}y^2+y+\frac{3}{2}\right)dy$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{3}+\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{3}+\frac{3}{2}y\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left(3^3-(-1)^3\right)+\frac{1}{2}\left(3^2-(-1)^2\right)+\frac{3}{2}\left(3-(-1)\right)=\frac{16}{3}$$

II начин

$y^2 = 2x+1$

$y = \pm\sqrt{2x+1}$

$$P = 2\cdot\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx + \int_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\right)dx = \frac{16}{3}$$

$= \Big| \; 2x+1 = t$

$$\begin{array}{c|c} t & \\ \hline x & \end{array}$$

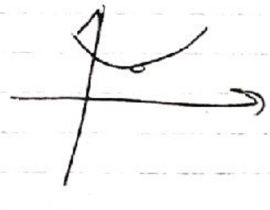
(5) У пресечним тачкама праве $x-y+1=0$ и параболе $y=x^2-4x+5$ повучене су тангенте на параболу. Израчунати површину ограничену параболом и тангентама.

1) $y = x^2-4x+5$

$a>0 \quad \cup$

$D = 16-20 = -4 < 0$

нема пресека са $0-x$ осом



пресек са $0-y$ осом

$\left.\begin{array}{l} y=x^2-4x+5 \\ x=0 \end{array}\right\} \; y=5 \quad A(0,5)$

теме

$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

$T\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-4}{4}\right)$

$T(2,1)$

• пресек параболе и праве

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2-4x+5 \\ y &= x+1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x^2-4x+5 = x+1 \\ &x^2-5x+4=0 \end{aligned}$$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 1$

$y_1 = 5 \qquad y_2 = 2$

$B_1(4,5) \qquad B_2(1,2)$

• једначина тангенте у тачки $B_1(4,5)$

$t_1: \; y-5 = y'(4)\cdot(x-4)$

$y'(x) = 2x-4$

$y'(4) = 2\cdot 4-4 = 4$

$y-5 = 4(x-4)$

$t_1 \; \boxed{y = 4x-11}$

• једначина тан. у тачки $B_2(1,2)$

$y-2 = y'(1)\cdot(x-1)$

$y'(1) = 2\cdot 1-4 = -2$

$t_2: \; y-2 = -2(x-1)$

$\boxed{y = -2x+4}$

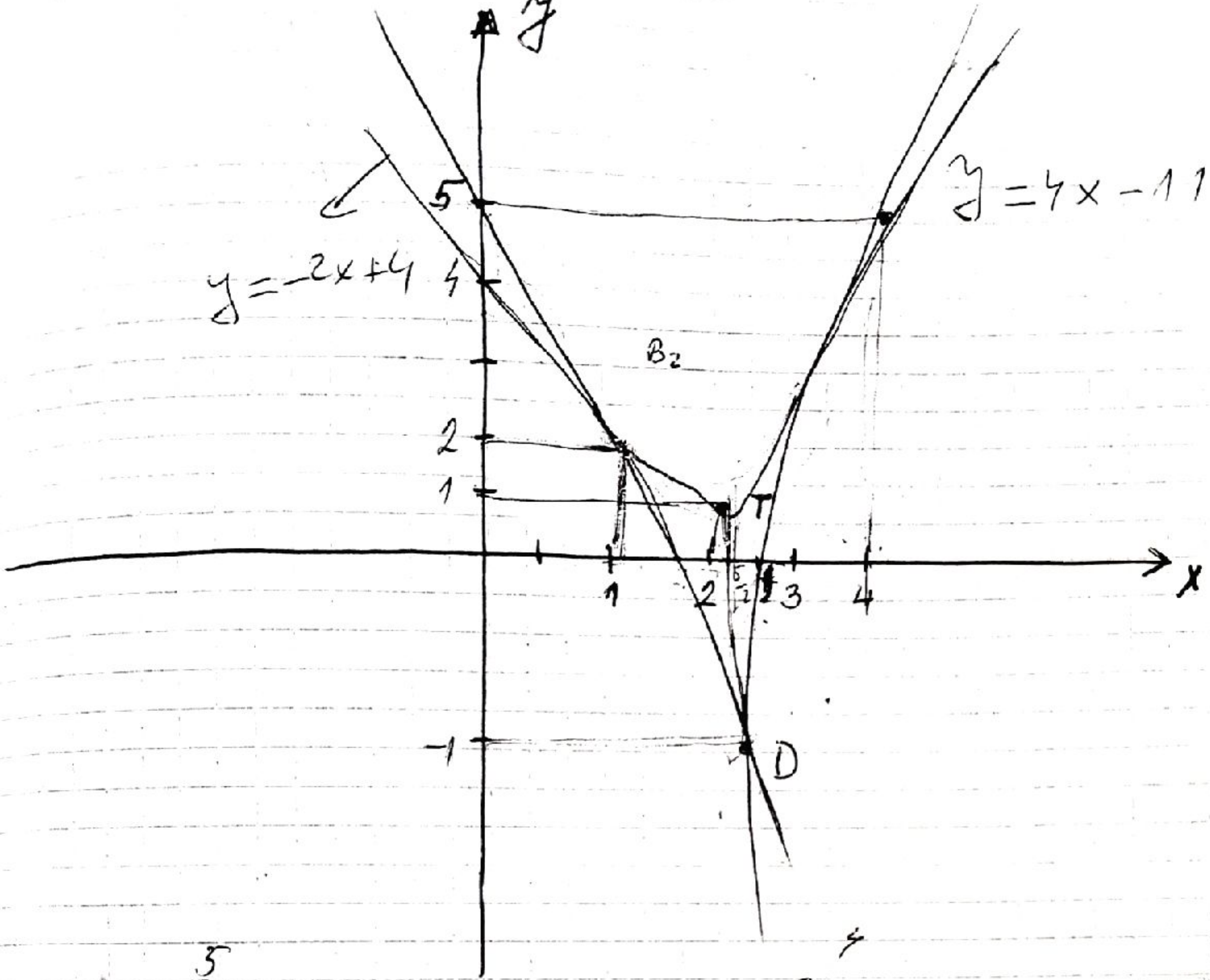
• пресек тангенти

$4x-11 = -2x+4$

$6x = 15$

$x = \frac{5}{2}, \; y = -1$

$D\left(\frac{5}{2}, -1\right)$



$$P=\int_{1}^{\frac{5}{2}}\left(x^2-4x+5-(-2x+4)\right)dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left((x^2-4x+5-(4x-11)\right)dx$$

$$=\frac{9}{4}$$

4) Израчунати површину ограничену графицима функције $y=2-|x|$ и $y=x^2$

R/ $y=2-|x|=\begin{cases}2-x, & x\geq 0\\ 2-(-x), & x<0\end{cases}$

$$y=2-|x|=\begin{cases}2-x, & x\geq 0\\ 2+x, & x<0\end{cases}$$

Пресек графика

$1^\circ \begin{cases} y = 2-x \\ y = x^2 \end{cases} \quad \wedge \quad x \geq 0$

$x^2 = 2-x$

$x^2+x-2=0$

$x_1/x_2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$x_1 = 1 \qquad \cancel{x_2 = -2}$

$y_1 = 1$

$A(1,1)$

$2^\circ \begin{cases} y = 2+x \\ y = x^2 \end{cases} \quad , \; x<0$

$x^2 = 2+x$

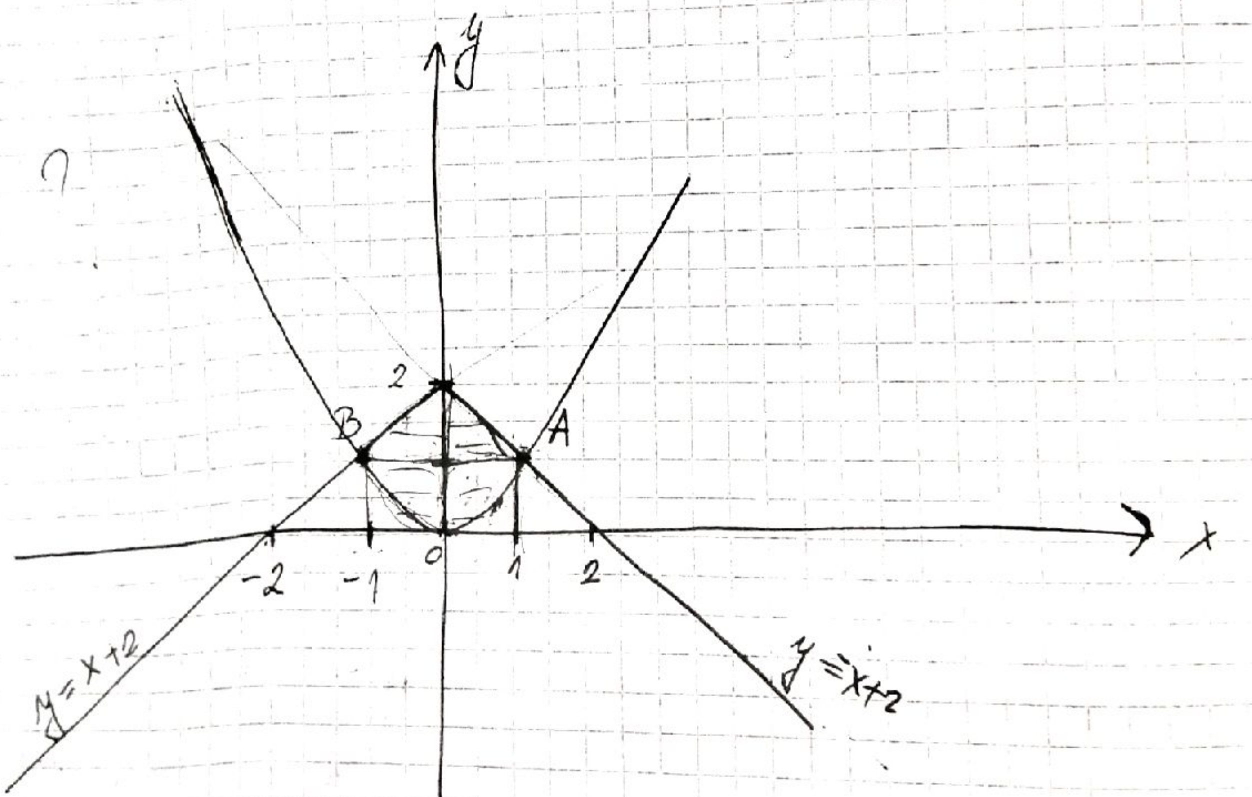
$x^2-x-2=0$

$x_1/x_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\cancel{x_1 = 2} \qquad x_2 = -1$

$y_2 = 1$

$B(-1,1)$



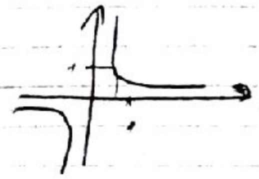
$P = 2 \cdot \int_0^1 (-x+2-x^2)\,dx$ или

$P = 2\int_{-1}^{0} (x+2-x^2)\,dx$ или

$$P=\int_{-1}^{0}(x+2-x^2)\,dx+\int_{0}^{1}(-x+2-x^2)\,dx$$

③ Израчунати површину фигуре ограничену криве $y=\frac{1}{x}$, њеном тангентом у тачки $(1,1)$ и правом $x=3$

$$y=\frac{1}{x}$$



j-на тангенте у тачки $M(1,1)$ на криву $y=\frac{1}{x}$

$$y-1=y'(1)\cdot(x-1)$$

$$y'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

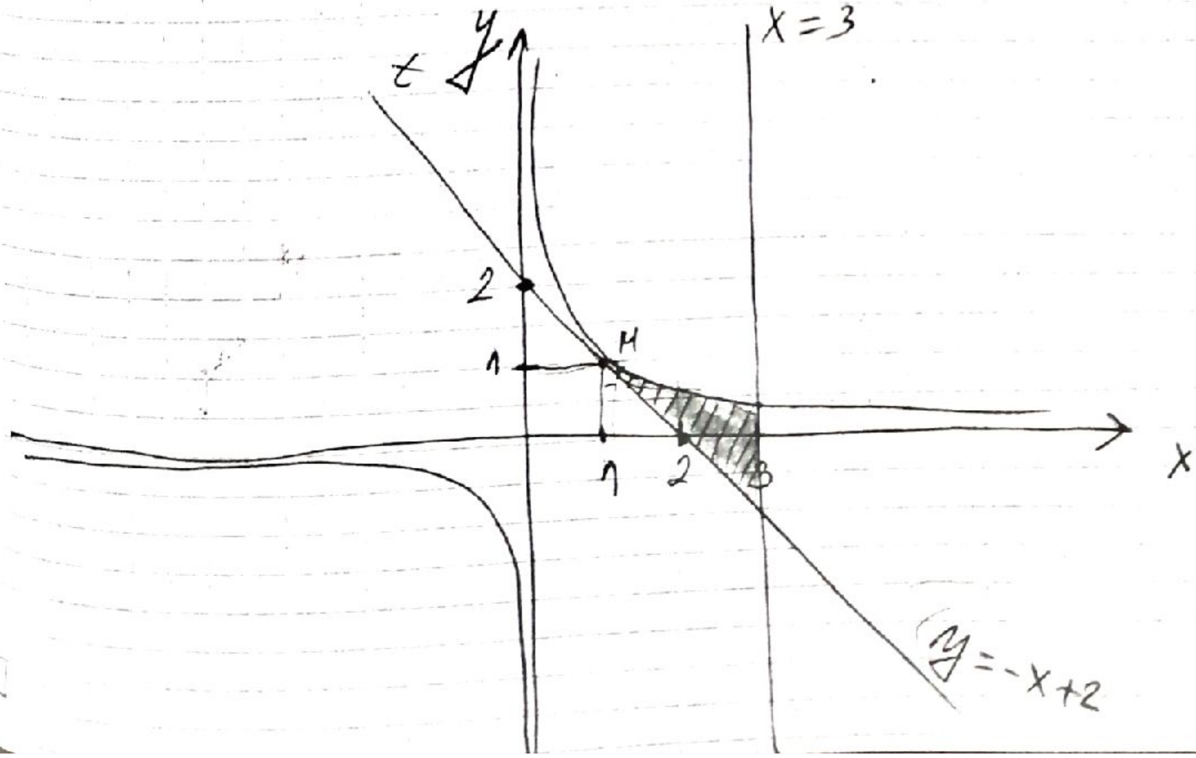
$$y'(1)=-1$$

$$t:\ y-1=-1(x-1)$$

$$t:\ y=-x+2$$

Пресек криве и праве $x=3$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x=3 \end{cases} \qquad y=\frac{1}{3} \qquad A\left(3,\frac{1}{3}\right)$$



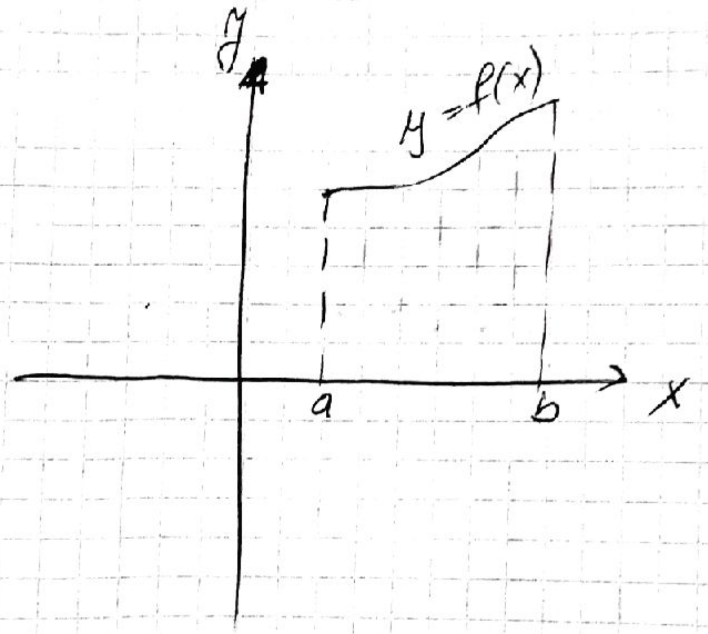
$$P = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - (-x+2) \right) dx$$

$$= \ln|x| \Big|_1^3 + \frac{x^2}{2} - 2x \Big|_1^3 =$$

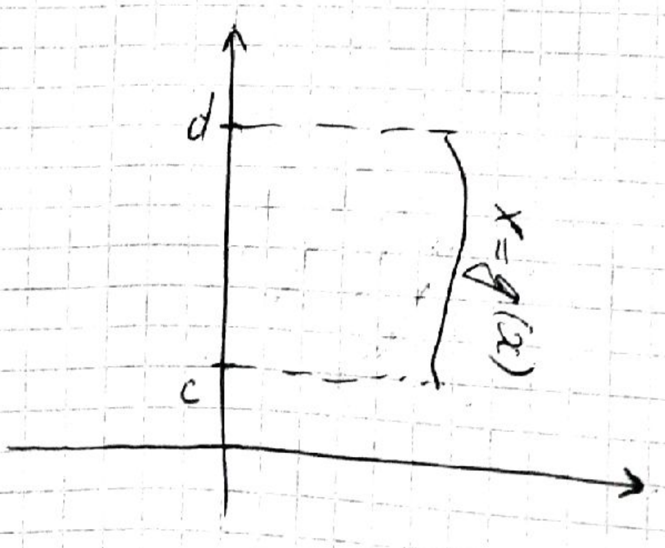
$$= \ln 3 - \ln 1 + \frac{1}{2}(9-1) - 2(3-1) =$$

$$= \ln 3 - 0 = \ln 3$$

Дужина лука



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx$$



$$l = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2(y)} \cdot dy$$

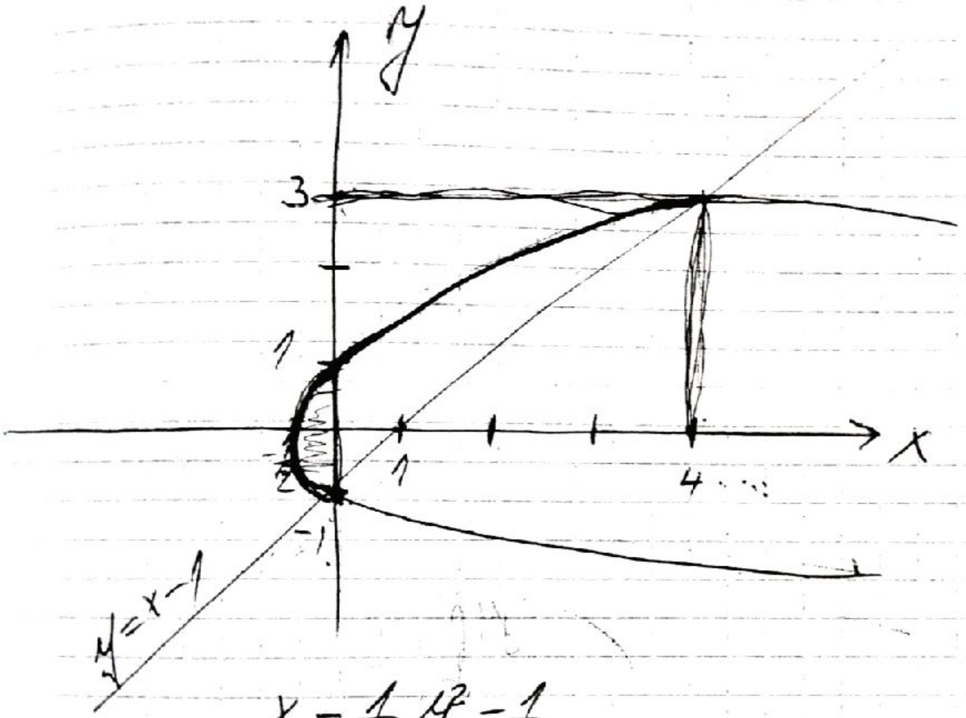
$x = f(t)$

$y = g(t)$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} \cdot dt$$

параметарски облик криве

Наћи дужину лука који на параболи $y^2 = 2x+1$ одсеца права $x - y = 1$.



$$x = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}$$

?

$$l = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + x'^2(y)} \cdot dy$$

$$x'(y) = y$$

$$l = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+y^2}\, dy = \quad \begin{array}{l} u = \sqrt{1+y^2} \\ du = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, dy \\ dv = dy \Rightarrow v = y \end{array}$$

$$y \cdot \sqrt{1+y^2} \Big|_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}}\, dy =$$

$$3\sqrt{10}-(-1)\cdot\sqrt{2}-\int_{-1}^{3}\frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$$

$$3\sqrt{10}+\sqrt{2}-\underbrace{\int_{-1}^{3}\sqrt{1+y^2}\,dy}_{l}+\int_{-1}^{3}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$l=3\sqrt{10}+\sqrt{2}-l+\int_{-1}^{3}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}\to \text{Ојлер}$$

$$2l=3\sqrt{10}+\sqrt{2}+\ln|y+\sqrt{1+y^2}|\Big|_{-1}^{3}$$

$$l=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}(\ln 3\sqrt{10}-\ln(\sqrt{2}-1))$$

$$l=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}$$

② Наћи дужину лука криве

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$$ између пресечних тачака са координатним осама

- пресек са Oy-осом

$x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{t^6}{6}=0 \Leftrightarrow t=0$$

- пресек са Ox-осом

$$y=0$$

$$2-\frac{t^4}{4}=0$$

$$-\frac{t^4}{4}=-2 \qquad t^4=8$$

$$t=\sqrt[4]{8}$$

$$l=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\cdot dt$$

$|t^3|$, на инт. $[0,4]$

$$l=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}\;dt$$

$$l=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^6(t^4+1)}\;dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\cdot\sqrt{t^4+1}\,dt$$

$t^4+1=z$

$t^3dt=\frac{1}{4}dz$

t	0	$\sqrt[4]{8}$
z	1	9

$$=\frac{1}{4}\int_1^9\sqrt{z}\cdot dz=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{z^3}\,\Big|_1^9=$$

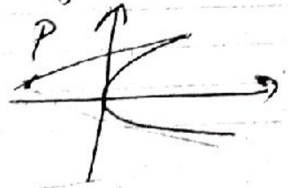
$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3}\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$

8. Из тачке $P(-2,1)$ ван параболе $y^2=4x$, повучене су тангенте на њу:

а) наћи једначине тих тангенти

б) израчунати дужину лука од темена параболе до оне тачке додира са тангентом која има већу апсцису

Р// $y^2=4x$



а) Нека је $y=kx+n$, тангента у тачки $P(-2,1)$ на параболу $y^2=4x$

$P\in t \Rightarrow 1=-2k+n$

Нађимо пресек параболе и тангенте

$$\left.\begin{array}{l}y^2=4x\\ y=kx+n\end{array}\right\}\qquad \begin{array}{l}(kx+n)^2=4x\\ k^2x^2+2kxn+n^2=4x\end{array}$$

$\underbrace{k^2}_{a}x^2+\underbrace{(2kn-4)}_{b}\cdot x+\underbrace{n^2}_{c}=0$

параболa и тангента имају једну додирну тачку па квадратна једначина мора имати једно рјешење, тј. $D=0$

$(2kn-4)^2-4k^2n^2=0$

$(kn-2)^2-k^2n^2=0$

$-4kn+4=0$

$-4kn+4=0$

$kn=1$

$-2k+n=1 \quad \big\} \cdot (-k)$

$kn=1$

$-2k+n=1$

$2k^2=-k+1$

$2k^2+k-1=0$

$k_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}$

$k_1=\dfrac{1}{2} \qquad k_2=-1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

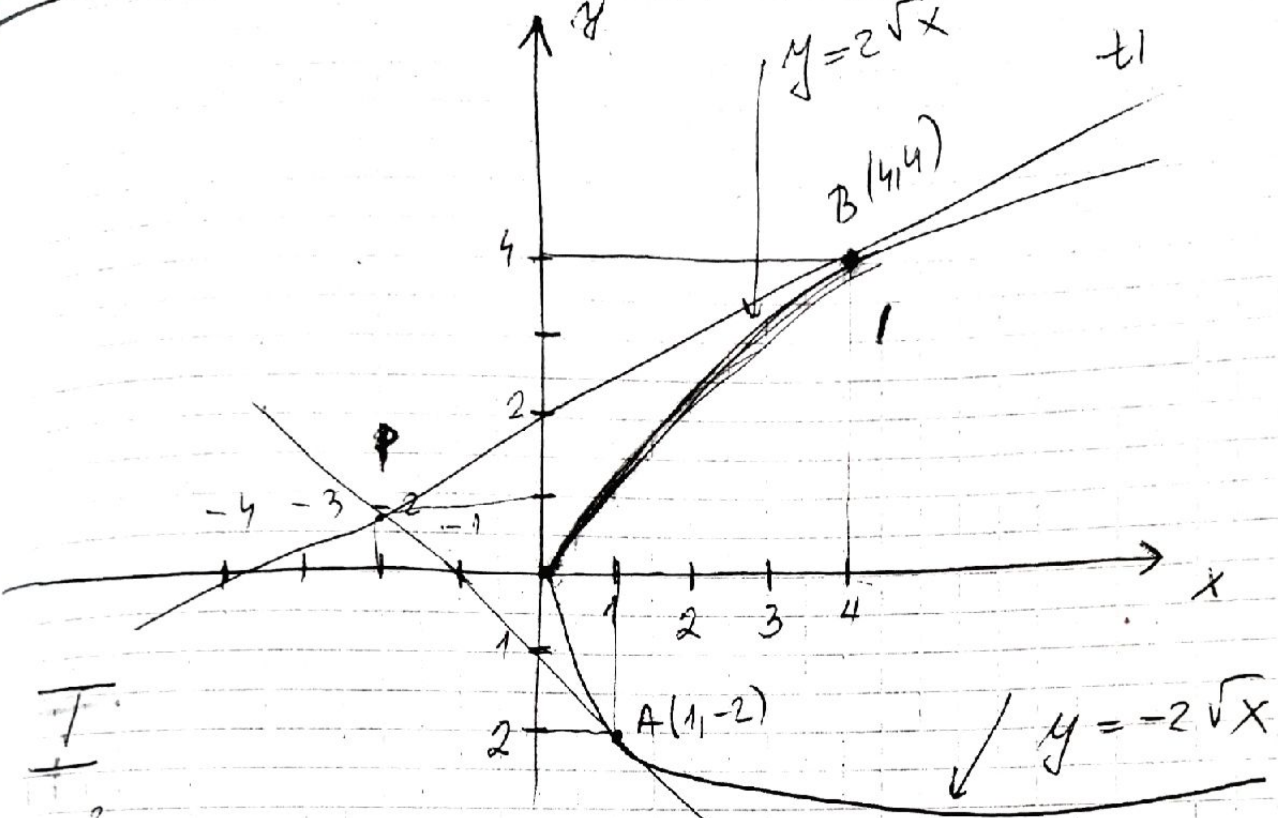
$n_1=2 \qquad n_2=-1$

$t_1: y=\frac{1}{2}x+2 \qquad t_2: y=-x-1$

нађимо тачке додира тангенте и параболе

$\left.\begin{matrix} y^2=4x \\ y=\frac{1}{2}x+2 \end{matrix}\right\} \quad B(4,4)$ (коефицјент правца тачке први извод има вриједност $\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} y^2=4x \\ y=-x-1 \end{matrix}\right\} \quad A(1,-2)$



I

$y^2=4x \Rightarrow y=\pm\sqrt{4x}$

$y=\pm 2\sqrt{x}$

$y=2\sqrt{x}$

$l=\int_0^4 \sqrt{1+y'^2(x)}\cdot dx$

$\frac{1}{2\sqrt{4x}}$

$y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{4x}}$

$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$

II

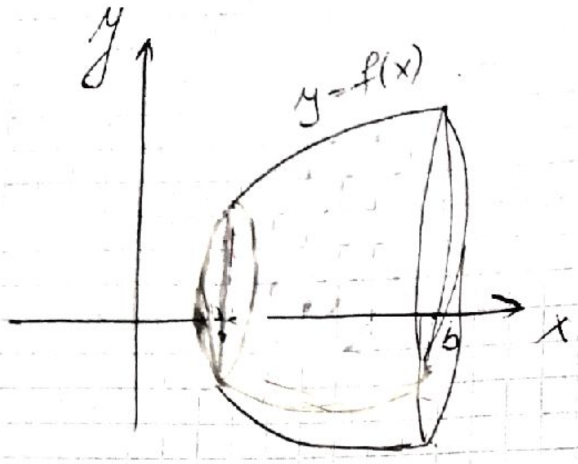
$l=\int_0^4\sqrt{1+x'^2(y)}\cdot dy$, $(x)(y)=\frac{1}{4}y^2$

$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}\cdot dy=\int_0^4\sqrt{\frac{4+y^2}{4}}\,dy$?

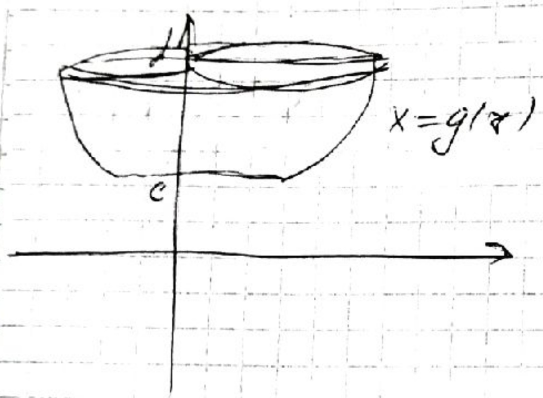
$y=2z$

$=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+y^2}\,dy=$ парзусіна

Запремина тијела



$$V=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx$$



$$V=\pi\cdot\int_c^d g^2(y)\cdot dy$$

$$V_y=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot f(x)\cdot dx,\quad y=f(x)$$

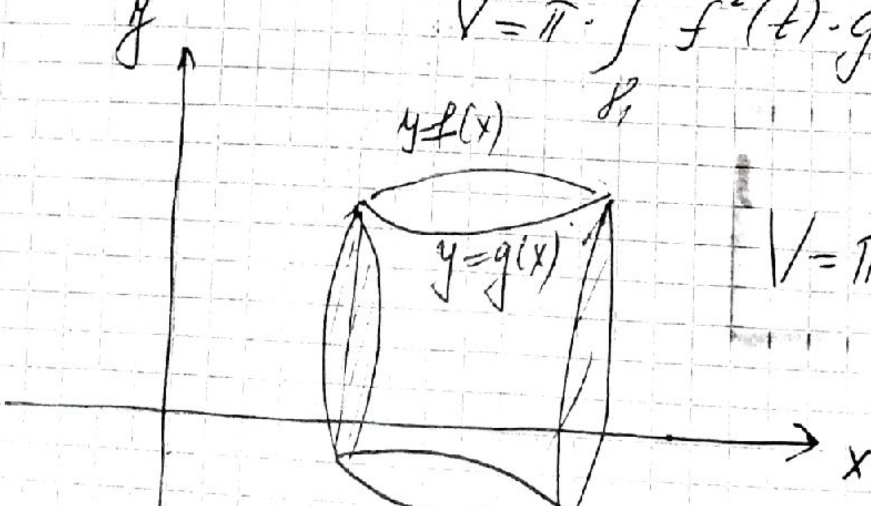
$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

ротација око O_x-осе

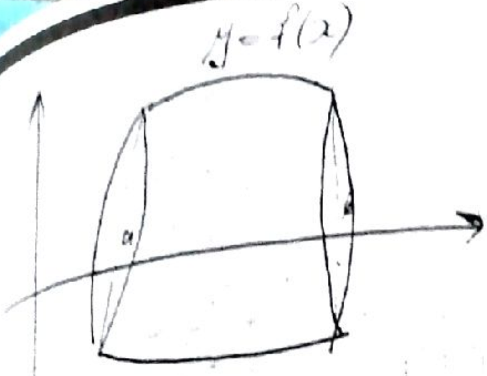
$$V=\pi\cdot\int_\alpha^\beta g^2(t)\cdot f'(t)\cdot dt$$

ротација око O_y-осе

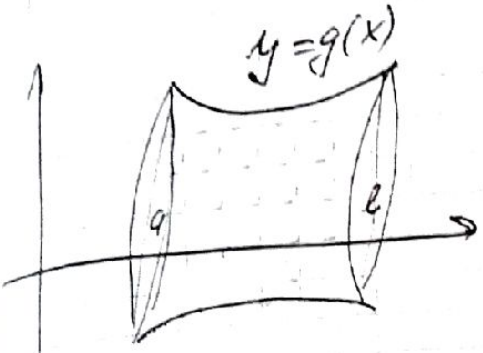
$$V=\pi\cdot\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\cdot g'(t)\cdot dt$$

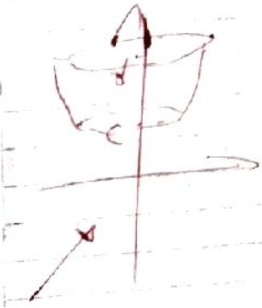


$$V=\pi\cdot\int_a^b \left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$$



$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$





$$V=\pi\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$V=\pi\int_c^d\left(x_1^2(y)-x_2^2(y)\right)dy$$

око Oy

4) Наћи запремину тијела које настаје ротацијом фигуре ограничене кривом $y=2x-x^2$ и правом $y=0$ око

а) O_x-осе

б) O_y-осе

а) $y=-x^2+2x$

$a=-1$ ∩

пресек са O_x-осом

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$

$x=0 \lor x=+2$

$A_1(0,0) \quad A_2(-2,0)$

Пресек са O_y-осом

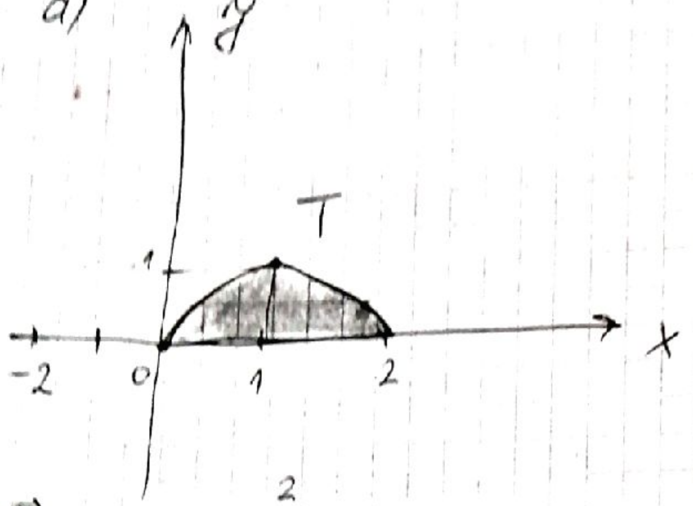
Теме

$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

$T\left(-\frac{2}{-2}, -\frac{4}{-4}\right)$

$T(1,1)$

a)

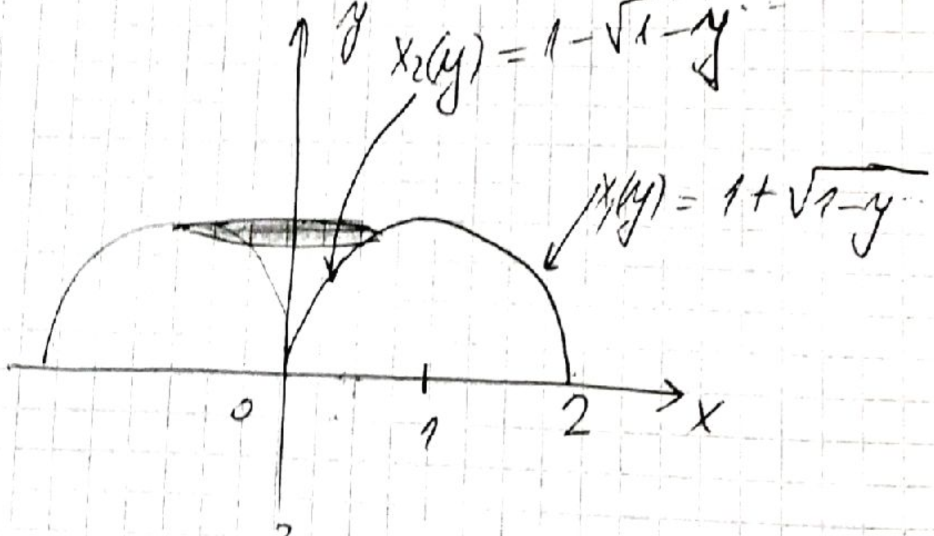


б)

$$V = \pi\int_0^2 (-x^2+2x)^2 dx$$

$$= -\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^2 - \pi x^3\Big|_0^2 + \frac{4\pi}{3}\cdot x^3\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\cdot\pi$$

б)



$-x^2+2x-y=0$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y}}{-2}$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-y}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1-y}}{-2}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(x_1^2(y) - x_2^2(y)\right) dy =$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 \left(\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right) dy =$$

$$\pi \cdot \int_0^1 \left(1 + 2\sqrt{1-y} + 1 - y\right) - \left(1 - 2\sqrt{1-y} + 1 - y^2\right)\right) dy$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{1-y}\, dy = \quad \sqrt{1-y} = t$$

$$dy = dt$$

$$t =$$

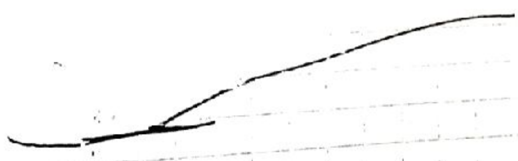
y	0	1
t	1	0

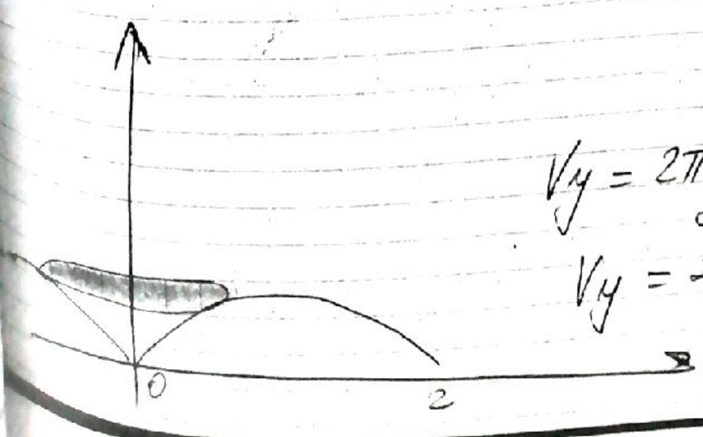
$$= 4\pi \cdot \int_1^0 \sqrt{t} \cdot dt =$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{t} \cdot dt =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,\Big|_0^1$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$





$$V_y = 2\pi \int_0^2 x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$V_y = 2\pi \cdot \int_0^2 x \cdot (-x^2 + 2x) \cdot dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} x^4 \Big|_0^2 + \frac{4\pi}{3} x^3 \Big|_0^2$$

$$= -8\pi + \frac{32}{3}\pi = \frac{8\pi}{3}$$

У тачки $P(3, y_0)$ параболе $y^2 = 2(x-1)$ повучене тангенте. Израчунати запремину тијела које настаје ротацијом око Ox-осе фигуре ограничене тангентом, параболом и Ox-осом

$y^2 = 2(x-1)$

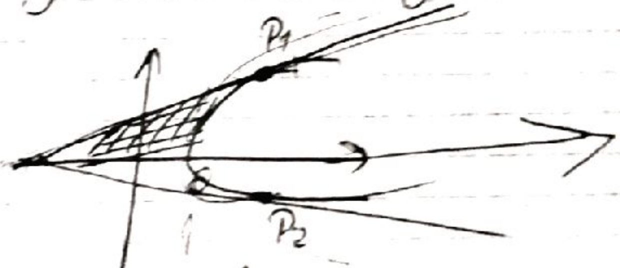
$x = \frac{1}{2}y^2 + 1$

пресјек са Oy-осом

$x = \frac{1}{2}y^2 + 1$ нема пресјека

пресјек са Ox-осом (како је $b=0$ шо је и T)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad x = 1 \quad T(1,0)$$



$P(3, y_0)$ припада параболи па важи

$y_0^2 = 2(3-1)$

$y_0^2 = 4$

$\boxed{y_0 = \pm 2}$

$P_1(3,2)$ $P_2(3,-2)$

ј-на тангенте у тачки $P_1(3,2)$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - 2 = y'(3)(x - 2)$$

$$y^2 = 2(x-1)$$

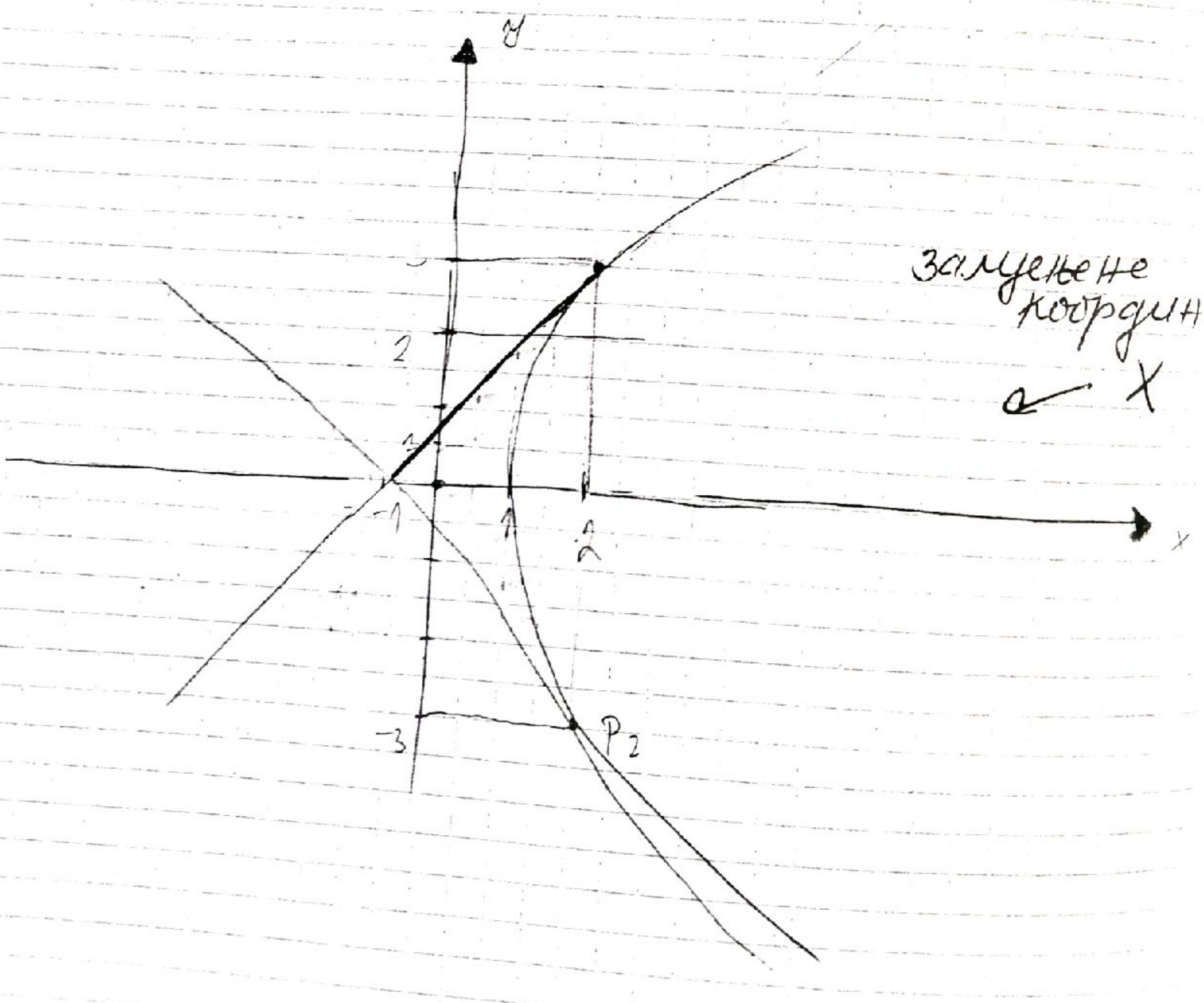
$$2yy' = 2$$

$$y' = \frac{1}{y}$$

$$y'(3) = \frac{1}{2}$$

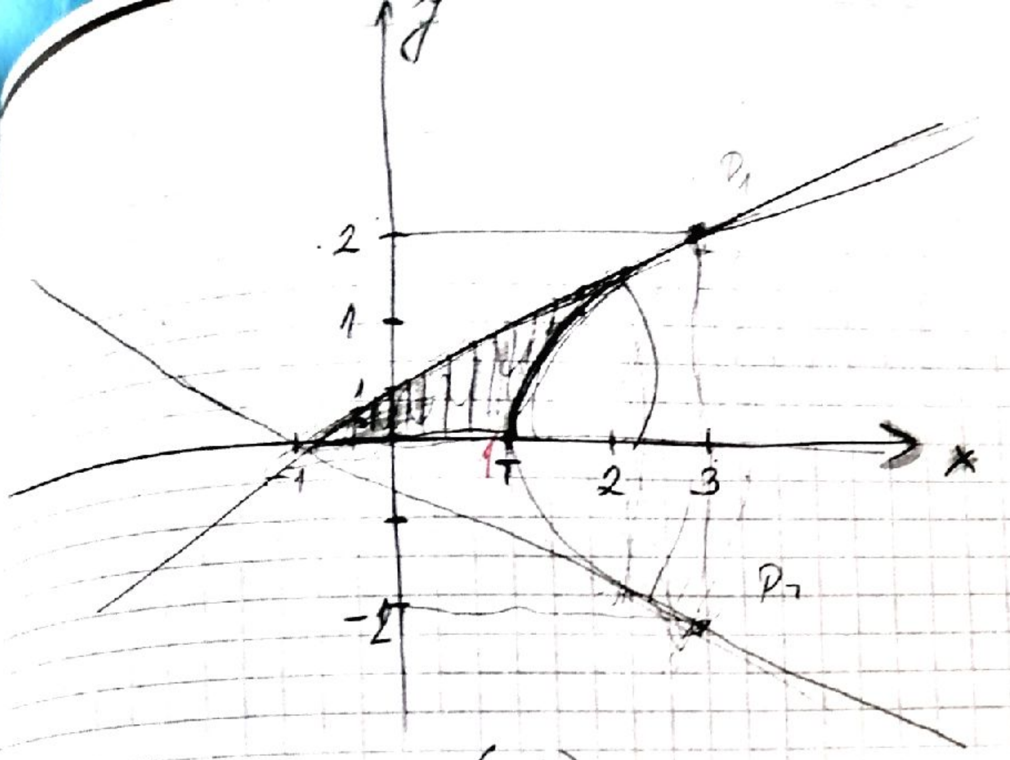
$$t_1 : y - 2 = \frac{1}{2}(x-3)$$

$$t_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



замењене координате

$a \leftarrow x$



(*)

$V = V_1 - V_2$

$V_1 = \pi \cdot \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{12} x^3 \Big|_{-1}^{3} + \frac{\pi}{4} x^2 \Big|_{-1}^{3} + \frac{\pi}{4} x \Big|_{-1}^{3} = !$

$V_2 = \pi \cdot \int_{1}^{3} 2(x-1)\, dx = \pi \cdot x^2 \Big|_{1}^{3} - 2\pi x \Big|_{1}^{3}$

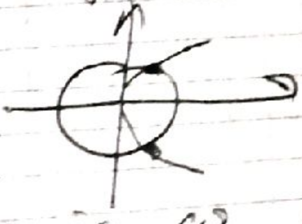
$V_2 = 4\pi$

наш

$\boxed{V = \frac{16\pi}{3} - 4\pi = \frac{4\pi}{3}}$

2. Израчунати запремину тијела које настају ротацијом фигуре ограничене кривом $x^2+y^2=16$ и параболом $y^2=6x$ око

а) Ox-осе



б) Oy-осе

R: а) $x^2+y^2=16$ ј-на круга са центром у тачки $O(0,0)$ и полупр. 16

[illegible]

$x^2+y^2=16$

$y^2=6x \quad (x \geq 0)$!

$x^2+6x-16=0$

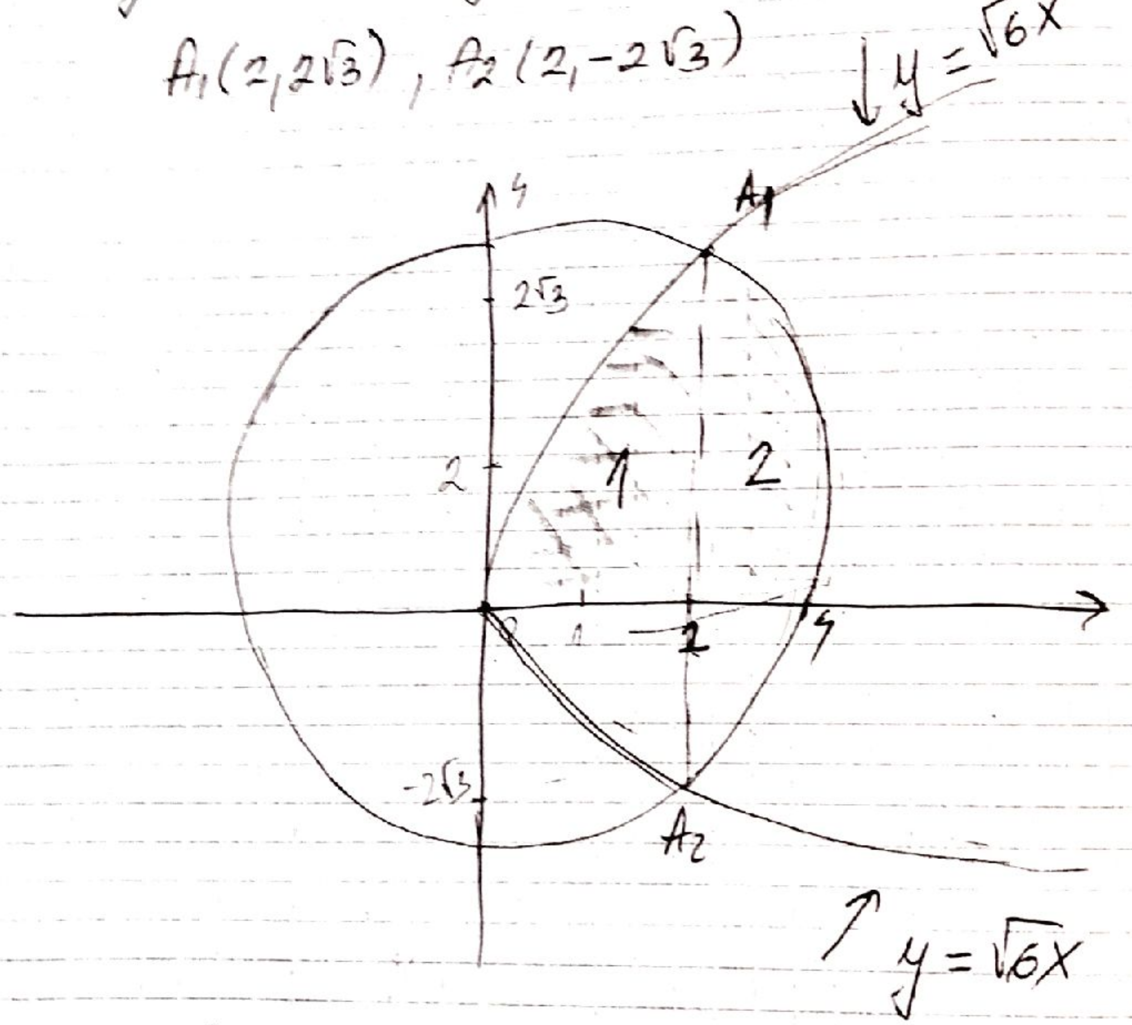
$x_1=2 \qquad x_2 \cancel{=-8}$

$y^2=6\cdot 2$

$y^2=12$

$y=\pm\sqrt{12} \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{3}$

$A_1(2, 2\sqrt{3}),\ A_2(2, -2\sqrt{3})$



$y^2=6x$

$y=\pm\sqrt{6x}$

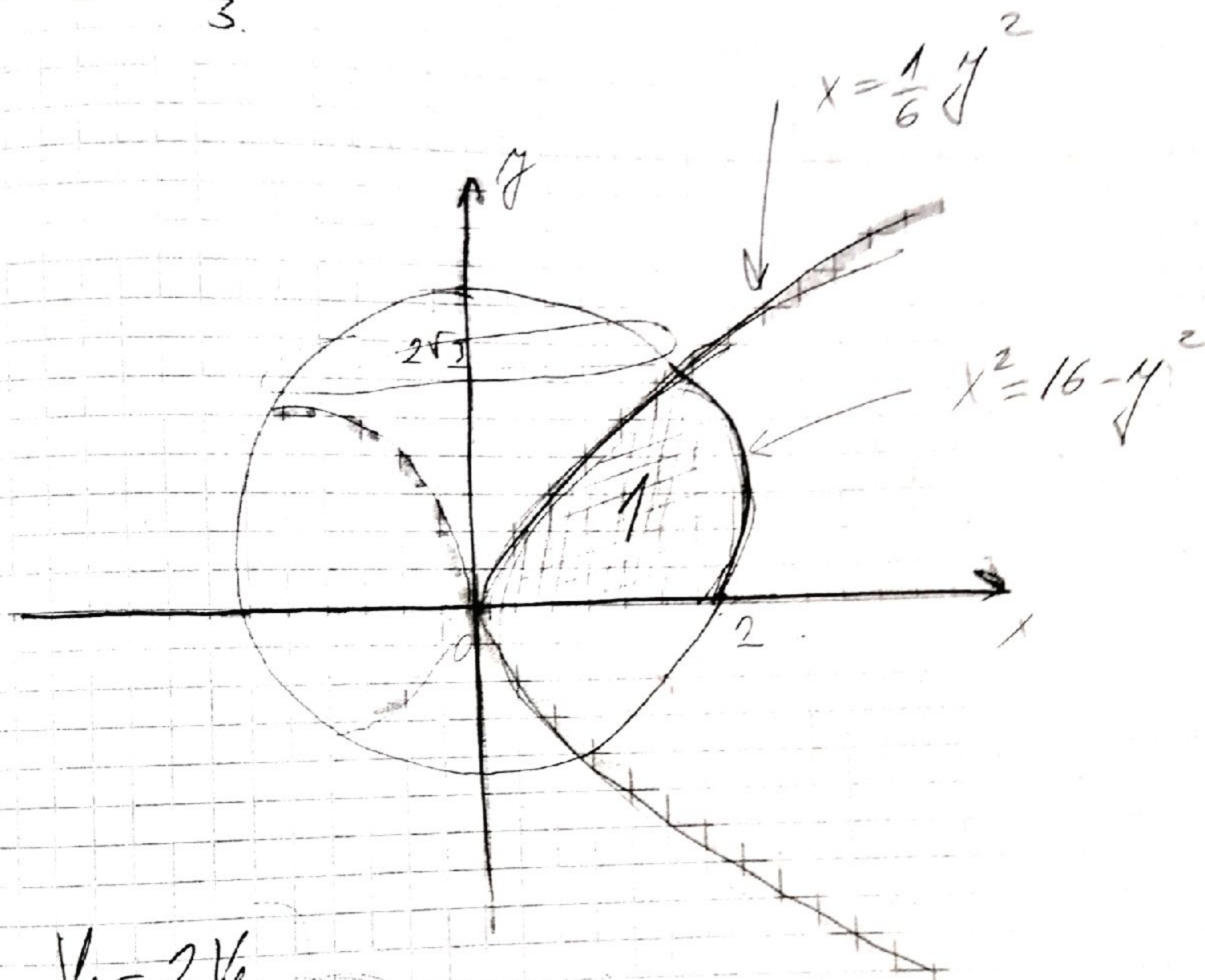
$V=V_1+V_2$

$V_1=\pi\cdot\int_0^2(\sqrt{6x})^2dx=3\pi x^2\Big|_0^2=12\pi$

$$V_2 = \pi \cdot \int_2^4 (16 - x^2)\,dx = 16\pi x \Big|_2^4 - \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_2^4 =$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{76}{3}\pi$$

б)



$$V_2 = 2V_1$$

$$V_1 = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} \Big(\underbrace{16 - y^2}_{x_1^2(y)} - \underbrace{\frac{1}{36} y^4}_{(x_2^2(y)}\Big)\,dy$$

$$\boxed{V = \frac{224}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}$$