$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in N$$

нека је $b_n = \frac{1}{2^n}$. Тада је $a_n \leq b_n \ \forall n \in N$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ је геометријски, $q = \frac{1}{2}$

$|q| = \frac{1}{2} < 1$ па ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ a_n \leq b_n, \forall n \in N \\ 2^\circ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира}$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + n}$

$$a_n = \frac{1}{3^n + n}$$

$$\frac{1}{3^n + n} \leq \frac{1}{3^n}, \forall n \in N$$

$b_n = \frac{1}{3^n}$ $a_n \leq b_n, \forall n \in N$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира као геометријски за који је $q = \frac{1}{3}$ $(|q| = \frac{1}{3} < 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ a_n \leq b_n, \forall n \in N \\ 2^\circ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конверг}$$

7. Испитати конвергенцију

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1+2^n}$$

$$a_n = \frac{\sin 2n}{1+2^n}$$

$$\frac{\sin 2n}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$$

$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$a_n \leq b_n, \ \forall n \in N$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира као геометријски ред за који је $|2| = |\frac{1}{2}| < 1$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ a_n \leq b_n \ \forall n \in N \\ 2^\circ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира}$$

8. Испитати конвергенцију

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}}{\cancel{2^{n^2}} \cdot 2^{2n+1}}}{\frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{2^{n^2}}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1 \xrightarrow{\text{Даламберов критеријум}}$$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред конвергира

Испитати конвергенцију реда

$$\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{\underbrace{2\cdot 6\cdot 10}_{a_3,\ n=3}} + \cdots$$

$$a_n = \frac{4\cdot 7 \cdots (3n+1)}{2\cdot 6 \cdots (4n-2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\cancel{4\cdot 7 \cdots (3n+1)}(3n+4)}{\cancel{2\cdot 6 \cdots (4n-2)}(4n+2)}}{\dfrac{\cancel{4\cdot 7 \cdots (3n+1)}}{\cancel{2\cdot 6 \cdots (4n-2)}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1 \implies$$

Даламберовог критеријума

$\to$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{n!}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}}}{\dfrac{\cancel{n!}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$ даламберъ критерии

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

Р/

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n+1}-1\right)^{n\left(\frac{1}{n}\right)(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2}{n+1}(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{-2(n-1)}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-2}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$$

Кошиев критерии

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира објасни

12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$$

$$a_n=\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$$

2-1

$$\frac{1+\cos n}{2+\cos n}=1-\frac{1}{2+\cos n}\leq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\ln n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}\to 0}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1\xrightarrow{\text{Кошиев}}\text{ ред }\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ конвергира}$$

13. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^3}{e^n}$$

$$a_n=\frac{3^n\cdot n^3}{e^n}=\left(\frac{3}{e}\right)^n\cdot n^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{e}\right)^n\cdot n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{e}\left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\right)^3=\frac{3}{e}>1\xrightarrow{\text{Кошиев критериум}}$$

$$\text{ред }\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ дивергира}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

(Кошијев критеријум не даје одговор)

$$\lim_{n\to\infty} a_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n(-1)} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \implies \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ дивергира}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}, \quad a>0$$

Р:

$$a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{\cancel{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}(a+n+1)}}{\dfrac{n!}{\cancel{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1+a} = 1$$

Даламберов критеријум не даје одговор

пробајмо примену Рабеовог теста објашњење и може и овако?

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1+a}{n+1}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot n}{n+1} = a$$

за $a>1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

за $a<1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty}$ дивергира

<u>за $a=1$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2\cdot 3\cdots(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

општи члан тада $a_n = \frac{1}{n+1}$

Нека је $b_n = \frac{1}{n}$, тада је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

$0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow$ редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су еквиконвергентни

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира као хипархармонијски па дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+3n^2}{3^n}$$

$$a_n = \frac{(-2)^n+3n^2}{3^n}$$

Нека је $b_n = \frac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ и $c_n = \frac{3n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{3^n}$ 3^n

ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира као геометријски

$$|q| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{3n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{\cancel{3^n}\cdot 3}}{\frac{n^2}{\cancel{3^n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{1}{3} \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$$

$\xrightarrow{\text{Даламберов критеријум}}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} (b_n+c_n) \text{ конверг.}$$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$$

Р/ $a_n = n\cdot e^{-n^2}$

Нека је $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$$

тада је

$f(n) = a_n$, $\forall n \in N$

1° $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} > 0$ $\forall x \in [1, +\infty)$

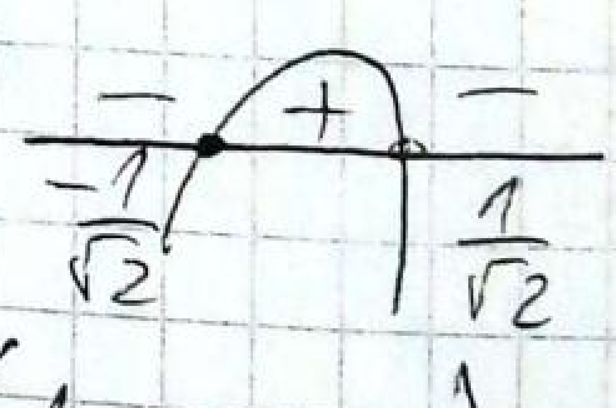
2° f је непрекидна као композиција непрекидних у области дефинисаности

3° $$f'(x) = \frac{e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{\cancel{e^{x^2}}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{(1-2x^2)}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}, \quad e^{x^2} > 0$$

$f'(x) < 0$ акко $1 - 2x^2 < 0$



$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in [1, +\infty)$

функција је опадајућа на $[1, +\infty)$

Из 1,2,3 на основу Кошијевог интегралног критеријума следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира (дивергира) акко

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$ конвергира (дивргира)

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & b \\ \hline t & 1 & b^2 \end{array} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\int_1^{b^2} \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} -e^{-t}\Big|_1^{b^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^{b^2}} + \frac{1}{e}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot e} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$ конвергира $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ✓