5. Испитати конвергенцију интеграла и наћи вриједност

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

$$\alpha \neq 1 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0^+} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^a =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \quad \text{дивергира (не конвергира)} \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \quad \text{конвергира} \end{cases}$$

$$\alpha < 1 \Rightarrow \lim_{a\to 0} a^{\overset{>0}{1-\alpha}} = 0$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{a\to 0} a^{1-\alpha} = \lim_{a\to 0^+} a^{-(\alpha-1)} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a^{(\alpha-1)}} = +\infty$$

$$\alpha=1: \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+} \ln|x| \Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} (\ln 1 - \ln a) = -(-\infty) = +\infty$$

$\alpha=1$ овај интеграл не конвергира за $\alpha<1$ и његова вриједност је $\frac{1}{1-\alpha}$, а за $\alpha\geq 1$ овај интеграл дивергира

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

$$\alpha\neq 1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1 \quad \text{конвергира} \\ +\infty, & \alpha<1 \quad \text{дивергира} \end{cases}$$

$\to >0$ $\qquad \frac{1}{\infty}=0$

$$\alpha<1: \lim_{b\to +\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$$

$$\alpha>1: \lim_{b\to +\infty} b^{1-\alpha} = \lim_{b\to +\infty} b^{-(\alpha-1)} = \lim_{b\to +\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$$

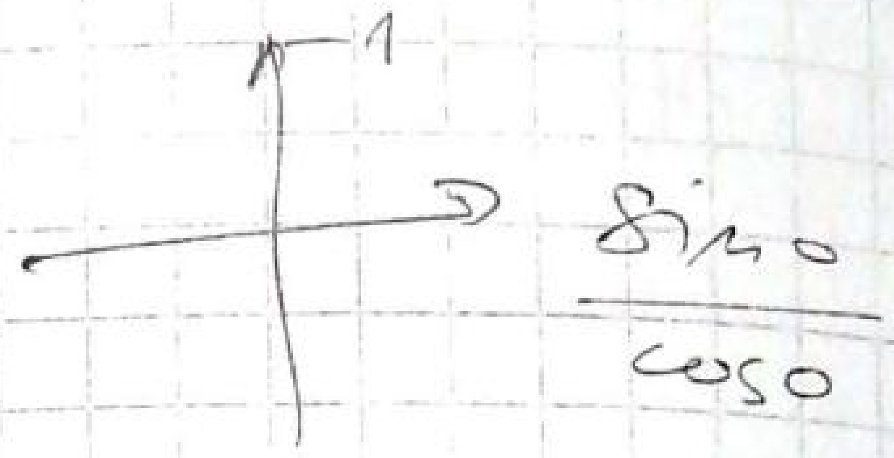
$$\alpha=1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to \infty} \ln|x| \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to +\infty} (\ln b - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = +\infty$$

Интеграл $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ конвергира за $\alpha > 1$ и његова вриједност је $\frac{1}{\alpha - 1}$, а дивергира за $\alpha \leq 1$

6. Испитати конвергенцију интеграла

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$



Нека је $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1 \cdot \frac{\pi}{2}}{1+x^2}, \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

Нека је $g(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^{+\infty} g(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{arctg} b - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} g(x)\, dx \text{ конвергира}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ |f(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in [0, +\infty) \\ 2^\circ \ \int_0^{+\infty} g(x) \cdot dx \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) \cdot dx$$

$\Downarrow$

конвергира

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x+2\sqrt{x}+3}$$

Нека је $f(x)=\frac{1}{e^x+2\sqrt{x}+3}$

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{e^x+2\sqrt{x}+3}\right| \le \frac{1}{e^x}, \quad \forall x\in[2,+\infty)$$

Нека је $g(x)=\frac{1}{e^x}$

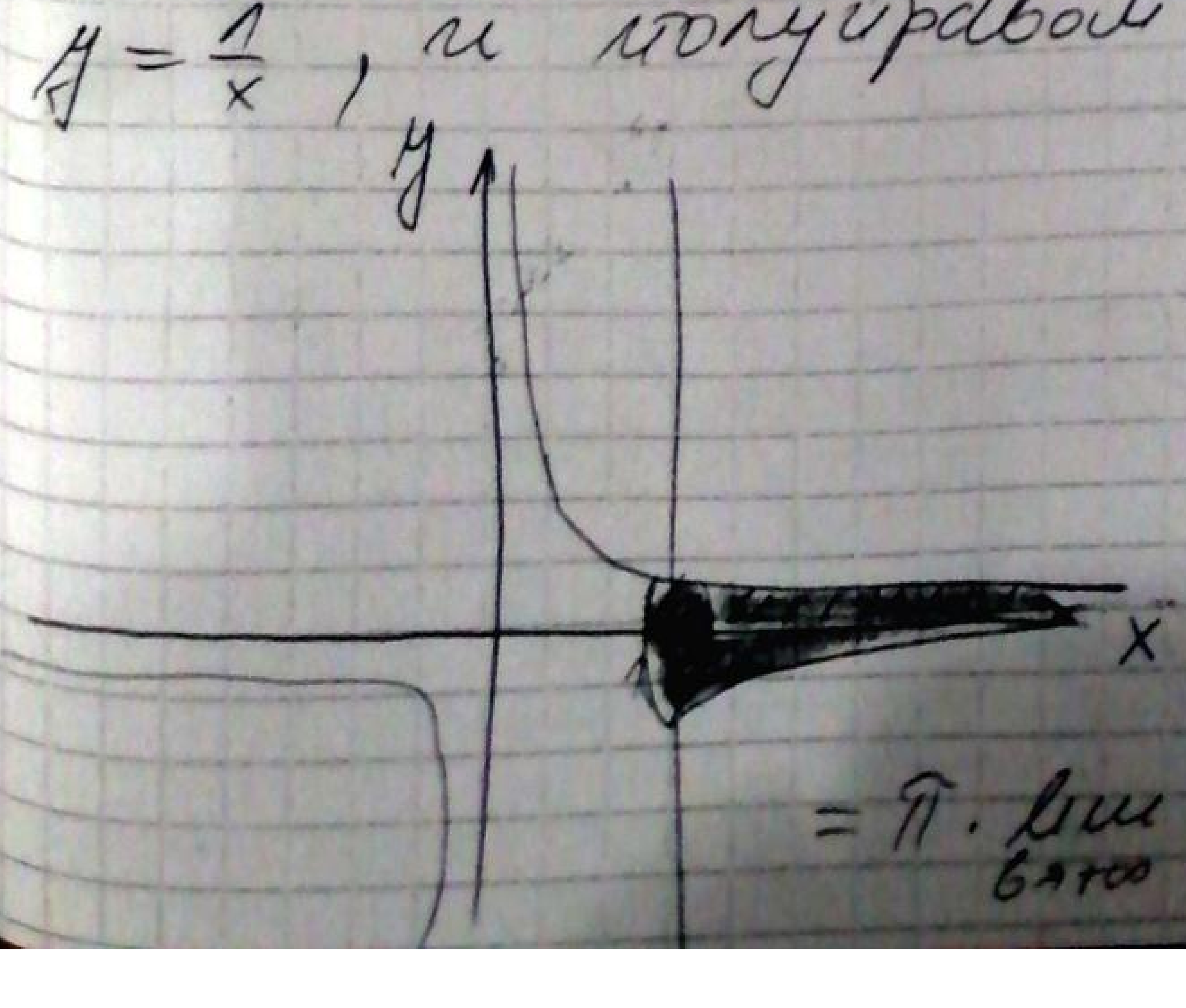
$$\int_2^{+\infty} g(x)\cdot dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{e^x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -e^{-x}\Big|_2^b =$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2} \Rightarrow \int_2^{+\infty} g(x)\,dx$$

конвергира

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ |f(x)|\le g(x), \ \forall x\in[-2,+\infty) \\ 2^\circ \ \int_2^{+\infty} g(x)\cdot dx \text{ конв.} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\cdot dx \text{ конвергира}$$

Израчунати запремину тијела које се добију ротацијом ~~~~ фигуре ограничене кривом $y=\frac{1}{x}$, и полуправом $(y=0,\ x>1)$ око О-хо



$$V=\pi\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx =$$

$$=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \pi$$