8. Израчунати површину дела равни који лежи између криве $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ и њене хоризонталне асимптоте у првом квадранту.

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{e^x-1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

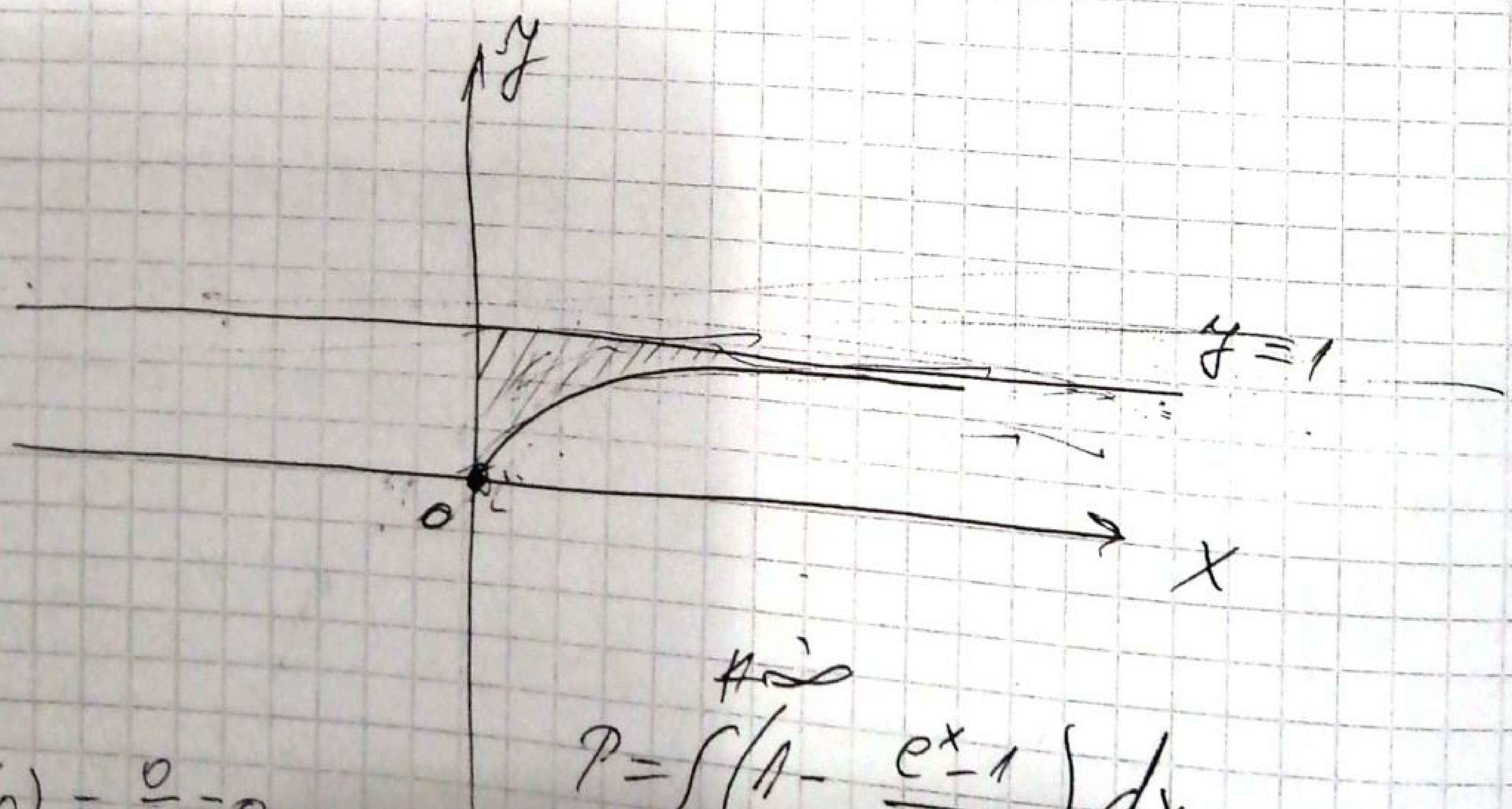
$y=1$ Х. А. $x\to+\infty$

$$1-f(x)=1-\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x+1}{e^x+1}=\frac{2}{e^x+1}>0$$

$\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ график је испод ~~[illegible]~~ осе

па и за $x\geq 0$

$\forall x\in [0,+\infty) \Rightarrow$ посматрамо 1. квадрант



$f(0)=\frac{0}{2}=0.$

$$P=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx=$$

$$=\ln 2.$$

Испитати конвергенцију интеграла

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}$

б) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)\cdot\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

а) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

Нека је $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+2x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+1} = 1 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ су еквиконвергентни

Показује се да је $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$. конвергентан интервал, а одавде следи да је

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ конвергентан

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \ldots = \pi.$$

② Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$

б) $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}$

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}} = \frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}$$

$$f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}}{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}}{\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}=1>0\Rightarrow$$

интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ и $\int_1^\infty g(x)dx$

су еквиконвергентни

- Интеграл $\int_1^\infty g(x)\cdot dx$, тј. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx$

је конвергентан ($\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ конв. ако $\alpha>1$)

па одавде следи да је конвергентан

и $\int_1^\infty f(x)dx$