# Бројни редови

ека је дат бројни низ $(a_n)$. Израз

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

називамо **БРОЈНИМ РЕДОМ**

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ – чланови бројног реда

$a_n$ – општи члан реда

$S_n = a_1+\dots+a_n$ $n$-та парцијална сума реда

Ако постоји $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ онда $S$ називамо сумом и кажемо да је ред конвергентан и пишемо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Ако не постоји $\lim_{n\to\infty} S_n$ или је једнак $\pm\infty$, онда кажемо да је ред дивергентан

**Теорема** Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Теорема: Ако редови сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају са $S_1$ и $S_2$ онда редови $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ такође конвергирају ка сумама $S_1 \pm S_2$ и $c \cdot S_1$

Теорема: Додавањем или изостављањем коначно много чланова конвергентног реда добија се конвергентан ред

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$, $a \neq 0$ геометријски ред конвергира акко $|q| < 1$

1) Испитати конвергенцију редова.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n}$

$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}{\cancel{n}} = 1 \neq 0$$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ред дивергира

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

$a_n = \ln \frac{n}{n+1}$

$a_n = \ln n - \ln(n+1)$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{\ln 1}_{0} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3} + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 4} + \cancel{\ln n} - \ln(n+1)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -\ln(n+1) = -\infty \Rightarrow$ низ $(S_n)$ не конвергира па не конвергира ни ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тј. овај ред дивергира

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$

$a_n = \frac{n+1}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

$\neq 0$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

$a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n^2})}\right) = \ln\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$

ред $\sum_{n=1} a_n$ дивергира

2) Наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ где је

$a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$S_n = \cancel{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{4} - \cancel{2\sqrt{3}} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \cancel{\sqrt{3}} + \sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4}$
$+ \dots + \sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \cancel{\sqrt{n-1}}$
$\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} =$

$= -\sqrt{2} + 1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = 1 - \sqrt{2} + \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} =$

$= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$

?

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right) =$

$= 1 - \sqrt{2} \Rightarrow$ низ $S_n$ - конвергира па конвергира и дати ред. Суми реда је $1-\sqrt{2}$, односно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sqrt{2}$

③ Наћи суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$$

$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right)$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} + \dots + \cancel{\frac{1}{3n-2}} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) -$$