$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

низ S_n конвергира па конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Сума реда је $S=\frac{1}{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3}$

1) Наћи суму реда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$$

р/ $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је геометријски ред

Количник је $q = -\frac{1}{2}$

$|q| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n = 1 \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad ?$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1-\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}$$

(5) Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

р/

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^n \cdot 3^{-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e \cdot e^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} e \cdot \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}$$ геометријски ред

$q = \frac{e}{3}$

$|q| = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

$$a_n = e \cdot \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$S_n = e + e \cdot \frac{e}{3} + e \cdot \left(\frac{e}{3}\right)^2 + \cdots + e \cdot \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = e \cdot \frac{1 - \left(\frac{e}{3}\right)^n}{1 - \frac{e}{3}} = e \cdot \frac{3}{3-e} \cdot \left(1 - \left(\frac{e}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3e}{3-e} \cdot \left(1 - \overbrace{\left(\frac{e}{3}\right)^n}^{0}\right) = \frac{3e}{3-e}$$

Сума реда је $S = \frac{3e}{3-e}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}} = \frac{3e}{3-e}$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

Нека је $b_n=\frac{1}{e^n}$ и $c_n=\frac{1}{n(n+1)}$

Тада је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+c_n)$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ је геометријски ред за који је $q=\frac{1}{e}$. Пошто је $|q|=\frac{1}{e}<1$ то ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира

$S_n=b_1+\dots+b_n$

$S_n=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots\frac{1}{e^n}$

$S_n=\frac{1}{e}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}=$

$=\frac{1}{e-1}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$

$$c_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=c_1+c_2+\dots+c_n$$

$$S_n=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1 \Rightarrow$$

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{e-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{1}{e-1}$

$\Rightarrow$ низ (S_n) конвергира па конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n=1\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конверг. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (b_n+c_n)$ конвергира тј. конвергира

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конверг. и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Сума реда је $S_a = S_b + S_c$

$$S_a - \frac{1}{e-1} + 1 = \frac{e}{e-1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – хиперхармонијски ред

$p>1$ – ред конвергира $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

$p \leqslant 1$ – ред дивергира $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$

(7) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$$

$$a_n = \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}$$

– нека је $b_n = \frac{3}{5^n}$ $c_n = \frac{2}{n}$

тада је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ је геометријски $q = \frac{1}{5}$

$|q| < 1 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира (као хиперхармонијски за који је $p = 1$) па дивергира и

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ тј. ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{конвергентан}\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{дивергентан}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{дивергентан}$$