2cu =

Бројни редови са позитивним члановима

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in N$

Теорема (критеријум упоређивања):

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in N$

$a_n \le b_n$, $\forall n \in N$

- ако ред $\sum_{n=1}^{\infty}$ конвергира онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.
- ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира онда дивергира и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

важи $\underline{\underline{S_n^a \le S_n^b}}$

Пример 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ зашто 2

$n^n > 2^n \ \forall n \ge 2$

$\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}, \forall n \ge 2$ (избацујемо a_1)

1 Ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ конвергира геометријски за који је

$q=\frac{1}{2}$, $|q|=\frac{1}{2}<1$. Одавде следи конвергенцију

и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ ид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Пример 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} < n, \ \forall n \in N$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in N$$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира (хиперхармонијски $p=1$)

па следи да дивергира и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Теорема (Даламберов критеријум)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n>0, \ \forall n \in N$$

постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Тада:

- ако је $l<1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира
- ако је $l>1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира
- ако је $l=1$, теорема не даје одговор

примери

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\quad a_n = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot \cancel{n!}}}{\frac{1}{\cancel{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

$$a_n = \frac{2^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{n+1}}{\frac{\cancel{2^n}}{n}} =$$

$= \lim \frac{2n}{n+1} = 2 > 1 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергир.

Теорема (Кошијев критеријум)

Нека је $a_n > 0$, $\forall n \in N$ и нека постоји

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Тада:

1) ако је $l < 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

2) ако је $l > 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

3.) ако је $l = 1$, теорема не даје одговор

Теорема (Кошијев интегрални критеријум)

Нека је $f(x)$ позитивна, нерастућа, монотона и растућа функција на интервалу $[1,+\infty)$ и нека је $f(n) = a_n$

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко интеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира

Рабеов тест

Нека је $a_n > 0$, $\forall n \in N$ и нека постоји

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$$

тада је:

1. ако је $l > 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира
2. ако је $l < 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира
3. ако је $l = 1$ нема одговора

1. Испитати конвергенцију реда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

Теорема: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

$$0 < A < +\infty$$

Редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су еквиконвергентни

$a_n = \frac{1}{2n-1}$

Нека је $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су еквиконвергентни

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира као хиперхармонијски за који је $p=1$

па онда дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$a_n = \frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}}$$

Нека је $b_n = \frac{1}{n\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\cdot\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}}}{\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow$ редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

су еквиконвергентни

Scanned by TapScanner

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентан као хипехармонијски за који је $p=\frac{3}{2}>1$ па конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

6. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$$

Р/

$$a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\alpha}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

Нека је $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{n^{\alpha}\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha}\cdot\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\cancel{\frac{2}{n}}^{\,0}}+1)}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = \underline{1}$$

$0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow$ редови

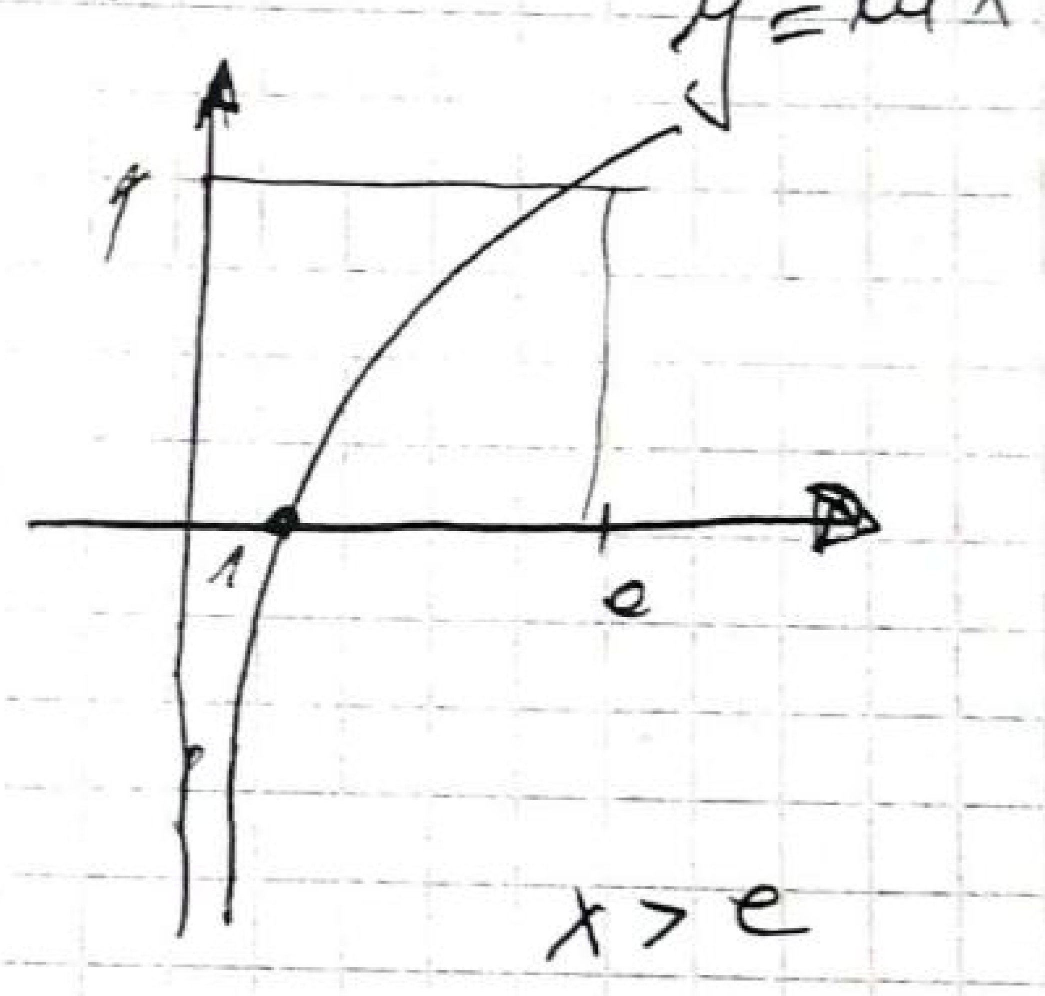
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су еквиконвергентни ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира за $\alpha+\frac{1}{2}>1$ тј. за $\alpha>\frac{1}{2}$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира за $\alpha+\frac{1}{2}\leq 1$ тј. за $\alpha\leq\frac{1}{2}$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира за $\alpha>\frac{1}{2}$, а дивергира за $\alpha\leq\frac{1}{2}$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$



Р/ $a_n = \frac{\ln n}{n}$

$\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n} \quad \forall n \geq 3$

$x > e$

$\ln x > \ln e$

$\ln x > 1$

Нека је $b_n = \frac{1}{n}$, тада је

$b_n \leq a_n \quad \forall n \geq 3$

ред $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ дивергира као хипергармонијски за који је $p=1$) па онда дивергира и ред $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ (на основу критеријума поређења.)

Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$

Р/ $a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n}$