$$\frac{1}{n\cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n\in N$$

нека је $b_n = \frac{1}{2^n}$. Тада је $a_n \leq b_n \ \forall n\in N$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ је геометријски, $q=\frac{1}{2}$

$|q|=\frac{1}{2}<1$ па ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ a_n \leq b_n, \forall n\in N \\ 2^\circ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира}$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$

$$a_n = \frac{1}{3^n+n}$$

$$\frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n}, \forall n\in N$$

$b_n = \frac{1}{3^n}$ $\quad a_n \leq b_n, \forall n\in N$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира као геометријски за који је $q=\frac{1}{3}$ $\left(|q|=\frac{1}{3}<1\right)$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ a_n \leq b_n, \forall n\in N \\ 2^\circ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конверго}$$

7 Испитати конвергенцију

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1+2^n}$$

$$a_n = \frac{\sin 2n}{1+2^n}$$

$$\frac{\sin 2n}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$$

$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$a_n \leq b_n, \ \forall n \in N$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира као геометријски ред за који је $|q| = |\frac{1}{2}| < 1$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ a_n \leq b_n \ \forall n \in N \\ 2^\circ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира}$$

8 Испитати конвергенцију

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}}{\cancel{2^{n^2}} \cdot 2^{2n+1}}}{\frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{2^{n^2}}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1 \xrightarrow{\text{Даламберов принцип}} \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ред конвергира}$$

Испитати конвергенцију реда

$$\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\underbrace{\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}}_{a_3,\ n=3}+\cdots$$

$$a_n=\frac{4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\cancel{4\cdot 7\cdots(3n+1)}(3n+4)}{\cancel{2\cdot 6\cdots(4n-2)}(4n+2)}}{\dfrac{\cancel{4\cdot 7\cdots(3n+1)}}{\cancel{2\cdot 6\cdots(4n-2)}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1\Longrightarrow$$ Даламберовог критеријума

$\rightarrow$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$a_n=\frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}{(n+1)^n\cancel{(n+1)}}}{\dfrac{\cancel{n!}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$ даламберов критериум

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

R/ $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n+1}-1\right)^{n\left(\frac{1}{n}\,n-1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2}{n+1}(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{-2(n-1)}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-2}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$$

Кошиев критериум

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира објасни

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

$a_n = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

$\frac{1+\cos n}{2+\cos n} = 1 - \frac{1}{2+\cos n} \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-\ln n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-\frac{\ln n}{n}\to 0} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3} < 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \xRightarrow{\text{Кошијев}}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^3}{e^n}$

$a_n = \frac{3^n \cdot n^3}{e^n} = \left(\frac{3}{e}\right)^n \cdot n^3$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{e}\right)^n \cdot n^3} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{e} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = \frac{3}{e} > 1 \xrightarrow{\text{Кошијев крит.}}$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \underline{1}$$

(Кошијев критеријум не даје одговор

$$\lim_{n\to\infty} a_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n(-1)} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Longrightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ дивергира}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, \quad a>0$$

$$a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots\dots(a+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{\cancel{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}(a+n+1)}}{\dfrac{n!}{\cancel{(a+1)(a+2)}\dots(a+n)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1+a} = \underline{1}$$

Даламберов критеријум не даје одговор