пробајмо примену Рабеовог теста    објашњење и може и овако?

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1+a}{n+1}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot n}{n+1}=a$$

за $a>1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

за $0<a<1$ ред $\sum_{n=1}$ дивергира

за $a=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2\cdot 3\cdots(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

општи члан тада $a_n=\frac{1}{n+1}$

Нека је $b_n=\frac{1}{n}$, тада је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

$0<\lim\frac{a_n}{b_n}<+\infty \Rightarrow$ редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су еквиконвергентни

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира као хипер хармонијски па дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+3n^2}{3^n}$

$$a_n = \frac{(-2)^n+3n^2}{3^n}$$

Нека је $b_n = \frac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ и $c_n = \frac{3n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{3^n}$ $\to 3^n$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира као геометријски

$$|q| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{3n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{\cancel{3^n}\cdot 3}}{\frac{n^2}{\cancel{3^n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{1}{3} \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$$

$\xrightarrow{\text{Даламберов критеријум}}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира

$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ конвергира} \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ конвергира} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n+c_n)$ конверг.

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$$

Р/ $a_n = n\cdot e^{-n^2}$

Нека је $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$$

тада је

$$f(n) = a_n \,, \forall n \in N$$

1° $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} > 0 \ \forall x \in [1, +\infty)$

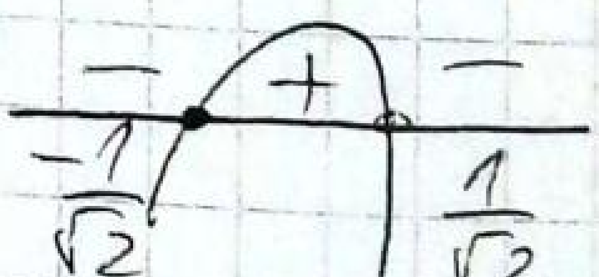
2° $f$ је непрекидна као композиција непрекидних у области дефинисаности

3° $$f'(x) = \frac{e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{\cancel{e^{x^2}}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{(1-2x^2)}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} \qquad e^{x^2} > 0$$

$f'(x) < 0$ акко $1 - 2x^2 < 0$




$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in [1, +\infty)$

функција је опадајућа на $[1, +\infty)$

Из 1,2,3 на основу Кошијевог интегралног критеријума следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира (дивергира) акко

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ конвергира (дивергира)}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & b \\ \hline t & 1 & b^2 \end{array} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\int_1^{b^2} \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} -e^{-t}\Big|_1^{b^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^{b^2}} + \frac{1}{e}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot e} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ конвергира} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергира}$$