1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

$a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

Нека је $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$

Тада је $f(n) = a_n$; $\forall n \in \geq 2$

1° $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$

2° $f(x)$ је непрекидна на $[2, +\infty]$ као

3° $f'(x) = \left((x \ln^2 x)^{-1}\right)' = -1 \cdot (x \ln^2 x)^{-2} \left(\ln^2 x + 2 \ln x \frac{1}{x}\right) =$

$= -\frac{\ln x (\ln x + 2)}{(x \ln^2 x)^2} = -\frac{(\ln x + 2)}{x^2 \ln^3 x}$

сваки члан је позитиван али је због минус негативан

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in [2, +\infty)$

f опада на интервалу $(2, +\infty)$

Из $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ следи, на основу К.И.К. да дати ред конвергира акко конвергира $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\ln x = t} \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{1}{x}\,dx = dt} \\ x & 2 & b \\ \hline t & \ln 2 & \ln b \end{array} \right.$

$$\lim \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} \cdot dt = \lim \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2}\, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln b} = -\lim_{b\to\infty} -\left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{\ln b}}} - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

коначан број

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\, dx \rightarrow$$ конвергира па конвергира

и $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

Алтернативни редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; ; \; a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in N$$

Лајбницов критеријум: $b_n = |a_n|$

1° b_n је опадајући $(b_n > b_{n+1})$

2° $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\Bigg\}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

① $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\dots$

$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

Нека је $b_n=|a_n|$ ш.ј. $b_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

1° $b_n-b_{n+1}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2(n+1)-1}{2^n}=$

$=\frac{2(2n-1)-2n-1}{2^n}=\frac{2(2n-1)-2n-1}{2^n}=$

$=\frac{2n-3}{2^n}>0\quad\forall n\geq 2$ (издвајемо b_1)

$b_n>b_{n+1}\quad\forall n\geq 2$

b_n - опадајући за $n\geq 0$

$\lim\limits_{b_n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^{n-1}}=0$

из (1) и (2) конвергира

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n!}{(2n)!}$

$b_n=|a_n|=\frac{n!}{(2n)!}$

$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\frac{n!}{(2n)!}}{\frac{(1+n)!}{(2n+2)!}}=\frac{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}}}{\frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}}{(2n+2)(2n+1)\cdot\cancel{2n!}}}=\frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{n+1}}$

$= 2(2n+1) > 1 \quad \forall n \in N$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \quad \forall n \in N \\ \\ b_n > 0 \quad ; \forall n \in N \end{array}\right\} \begin{array}{l} b_n > b_{n+1} \;; \forall n \in N \\ b_n \text{- опадајућ} \end{array}$$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)\ldots 2n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)\cdot 2n} = 0$

Из (1) и (2) закључујемо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

$a_n = (-1)^n \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

$b_n = |a_n| = \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

1° $n < n+1 \quad \forall n \in N$

$n^2 < (n+1)^2 \quad ; \forall n \in N$

$n^2+2 \leq (n+1)^2+2 \quad \forall n \in N$

$\sqrt{n^2+2} < \sqrt{(n+1)^2+2} \quad \forall n \in N$

$\sqrt{n^2+2} + n < \sqrt{(n+1)^2+2} + n+1 \quad ; \forall n \in N$

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} > \frac{2}{\sqrt{(n+1)^2+2}+n+1} \quad \forall n \in N$$

$b_n > b_{n+1} \quad \forall n \in N$

b_n – опадајући

$2^\circ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} = 0$

Из (1) и (2) следи $\sum a_n$ конвергира

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}\cdot\sqrt{n}}{n+4}$

$b_n = |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

1° Нека је $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$

Тада је $f(n) = b_n \quad ; \forall n \geq 3$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+4) - \sqrt{x}}{(x+4)^2} = \frac{x+4-2x}{2\sqrt{x}(x+4)^2} = \frac{4-x}{2\sqrt{x}(x+4)}$$

$f'(x) < 0 \iff 4-x < 0$

$\iff x > 4$

f опада на интервалу $(4, +\infty)$

$x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \quad \forall\, x_1\, x_2 \in (4, +\infty)$

Одавде следи да важи и

$n < n+1 \quad ; \quad n \geq 5$

$f(n) > f(n+1) \quad ; n \geq 5$

$b_n > b_{n+1} \quad \forall n \geq 5$ (избацуемо b_3, b_4 иш a_3 и a_4)

$\Rightarrow$ из $(b_n)_{n\geq 5}$ је опадајући

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4} = \frac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 0$$

из (1) и (2) следи да $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Ово је алтернативни ред

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot \ln n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot \ln n}{n}$$

$$b_n = |a_n| = \frac{\ln n}{n}$$

Нека је $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Тада је $f(n) = b_n \quad \forall n \in N$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x) < 0 \iff 1 - \ln x < 0$

$\ln x > 1$

$x > e$

f опадајућа на $(e, +\infty)$

$x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in (e, +\infty)$

слиједи

$n < n+1 \;;\; \forall n \geq 3$

$f(n) > f(n+1) \quad \forall n \geq 3$ иј.

$b_n > b_{n+1} \quad \forall n \geq 3$ (избацујемо b_1, b_2 и a_1, a_2)

$(b_n)_{n\geq 3}$ опадајући

$2^\circ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Из (1.) и (2.) слиједи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

$S = K.$

⑥ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-$

Р/ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)$

$$a_1 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$$

$$a_4 = -\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)$$

$\vdots$

$$a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – алтернативни ред

$$b_n = |a_n| = \frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}$$

1° $b_n - b_{n+1}$

$$\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n} > \frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$$

$b_n > b_{n+1} \Rightarrow$ низ је опадајући

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)=0$$

Из (1) и (2) следи да $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Деф $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема:

Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Теорема: Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

1° $b_1 > b_2 > b_3 \cdots > b_n > b_{n+1} >$

2° $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

3° $\exists M>0$ тако да $|S_n| < M$; $\forall n$; $S_n = a_1 + \cdots a_n$

следи да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергентан!!

Теорема: Абел

$1.$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

2° Низ b_n монотон и ограничен $\Bigg\}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира.

Испитати конв. реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n} \cdot \cos\frac{\pi}{n+1}$$

Р/ Нека је: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ $\quad b_n = \cos\frac{\pi}{n+1}$

I Ред $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ је алтернативни

Нека је $\alpha_n = |a_n| = \frac{1}{\ln^2 n}$

$n < n+2 \; ; \; \forall n \geq 2$

$\ln n < \ln(n+1) \; ; \; \forall n \geq 2$

$\ln^2 n < \ln^2(n+1) \; ; \; \forall n \geq 2$

$\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{\ln^2(n+1)} \quad \forall n \geq 2$

$\underline{\alpha_n > \alpha_{n+1} \quad \forall n \geq 2}$

II $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln^2 n} = 0$

из (I и II) на основу Лајбницовог критеријума следи да ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty}$ конвергира

II 1°) $|b_n| = \left|\cos\frac{\pi}{n+1}\right| \leq 1 \Rightarrow$ низ b_n ограничен

2°) $\frac{\pi}{n+1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Функција $f(x)=\cos x$ је опадајућа

$\forall n \geq 2$

$\frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n+2}$; $\forall n \geq 2$

$\cos\frac{\pi}{n+1} < \cos\frac{\pi}{n+2}$

$b_n < b_{n+1} \rightarrow \forall n \geq 2$

$(b_n)_{n=2}$ монотоно растући низ

I $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ конвергира

$(b_n)_{n=2} \rightarrow$ монотон и ограничен

} Абел ред $\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n$ конвергира

2. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

I 1° уочимо $n < n+1$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ $\quad a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in N$

2° $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

II $b_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

геометријски низ конвергира

$|q| < 1$ монотон и ограничен

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$$

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \quad 1-\left(-1/2\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$|S_n| = \left|-\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right| = \frac{1}{3}\left|1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$1-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad n=1$$

$$1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad n=2$$

$$1-\left(-\frac{1}{8}\right) = 1+\frac{1}{8} = \frac{9}{8} \quad n=3$$

Низ S_n ограничен

I 1° $b_n > b_{n+1}$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

II (S_n) je ограничен

$S_n = a_1 + \dots + a_n$

Цироспе $\Rightarrow$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира