⑤ Функцију $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ развити у синусни Фуријеов ред на $[0, \pi]$

Р/

Функцију f непарно проширимо на $[-\pi, \pi]$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x), & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \sin\frac{x}{2}, & 0 \le x \le \pi \\ -\sin(-\frac{x}{2}), & -\pi \le x < 0 \end{cases} = \sin\frac{x}{2}, \ x [-\pi, \pi]$$

Функцију $F(x)$ развијамо у Фуријеов ред $[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\cdot\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{F(x)}_{\text{неп.}}\cdot\underbrace{\cos nx}_{\text{парно}}\cdot dx}=0,\ \forall n\in N_0$$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{F(x)}_{\text{неп}}\ \overset{\text{непарно}}{\underbrace{\sin nx}_{\text{неп}}}}_{\text{парно}}\cdot dx=\frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi}F(x)\cdot\sin nx\ dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx\cdot dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos\left(nx-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{2n-1}{2}x\ dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{2n+1}{2}x\ dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot\sin\frac{2n-1}{2}x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\frac{2}{2n+1}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}x\Big|_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi\cdot(2n-1)}\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2}\cdot\pi\right)-\frac{2}{\pi(2n+1)}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}\cdot\pi=$$

$$=\frac{2}{\pi(2n-1)}\cdot\left(\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{2}{\pi(2n+1)}\cdot\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi(2n-1)}(-\cos n\pi)-\frac{2}{\pi(2n+1)}\cdot\cos n\pi=$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \cos n\pi \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) =$$

$$= \frac{-2 \cdot (-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n+1+2n-1}{4n^2-1}$$

$$= \frac{8(-1)^{n+1} \cdot n}{\pi \cdot (4n^2-1)}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n}{\pi \cdot (4n^2-1)} \sin nx$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi (4n^2-1)} \sin nx \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n}{\pi \cdot (4n^2-1)} \cdot \sin nx, \quad x \in [-0, \pi]$$

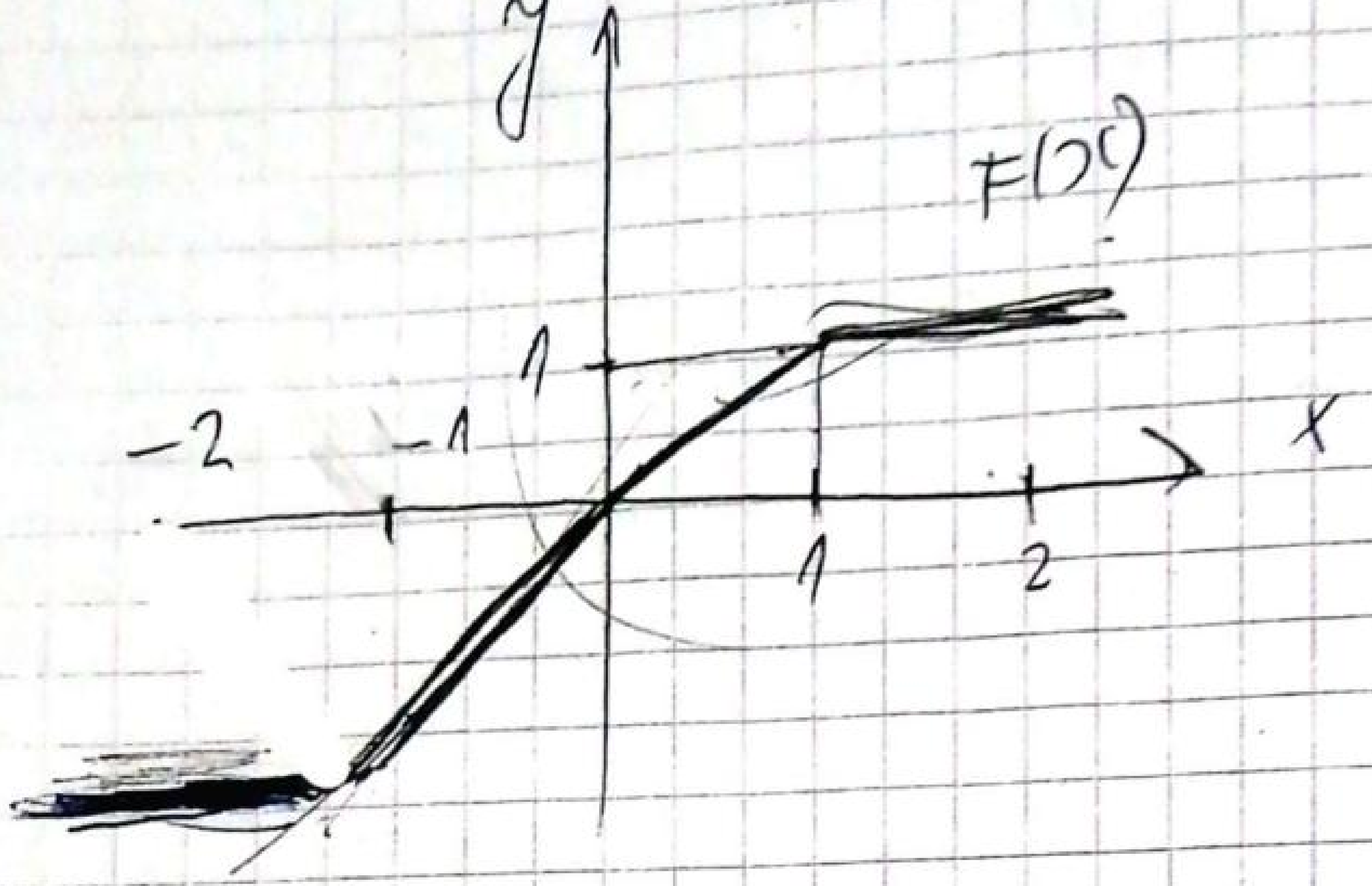
6. Функцију $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

развити у синусни Фуријеов ред

Функцију f непарно проширимо на $[-2, 2]$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 2] \\ -f(-x), & x \in [-2, 0) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \\ x, & -1 \le x < 0 \\ -1, & -2 \le x < -1 \end{cases}$$



Функцију F развијамо у Фуријеов ред на $[-2,2]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{n\pi}{2}x + b_n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x\right)$$

F је непарна па је $a_n = 0 \quad \forall n \in N_0$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{\underbrace{F(x)}_{\text{неп.}} \cdot \underbrace{\sin\frac{n\pi}{2}x}_{\text{неп}}}_{\text{парна}} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\int_{0}^{2} F(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{1} F(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x \cdot dx = \left[\begin{array}{l} F(x) = f(x) \\ x \in [0,2] \end{array}\right] =$$

$$= \int_{0}^{1} x \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x\, d + \int_{1}^{2} 1 \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x \cdot dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ v = \int \sin\frac{n\pi}{2}x\, dx = -\frac{2}{n\pi} \cdot \cos\frac{n\pi}{2}x \end{array}\right] =$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cdot x\cdot\cos\frac{n\pi}{2}\cdot x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\cdot\int_0^1\cos\frac{n\pi}{2}x\cdot dx-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\cancel{-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos n\pi+\underbrace{\cancel{\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}}}$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos n\pi=$$

$$\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

$$\boxed{\cos n\pi=(-1)^n}$$

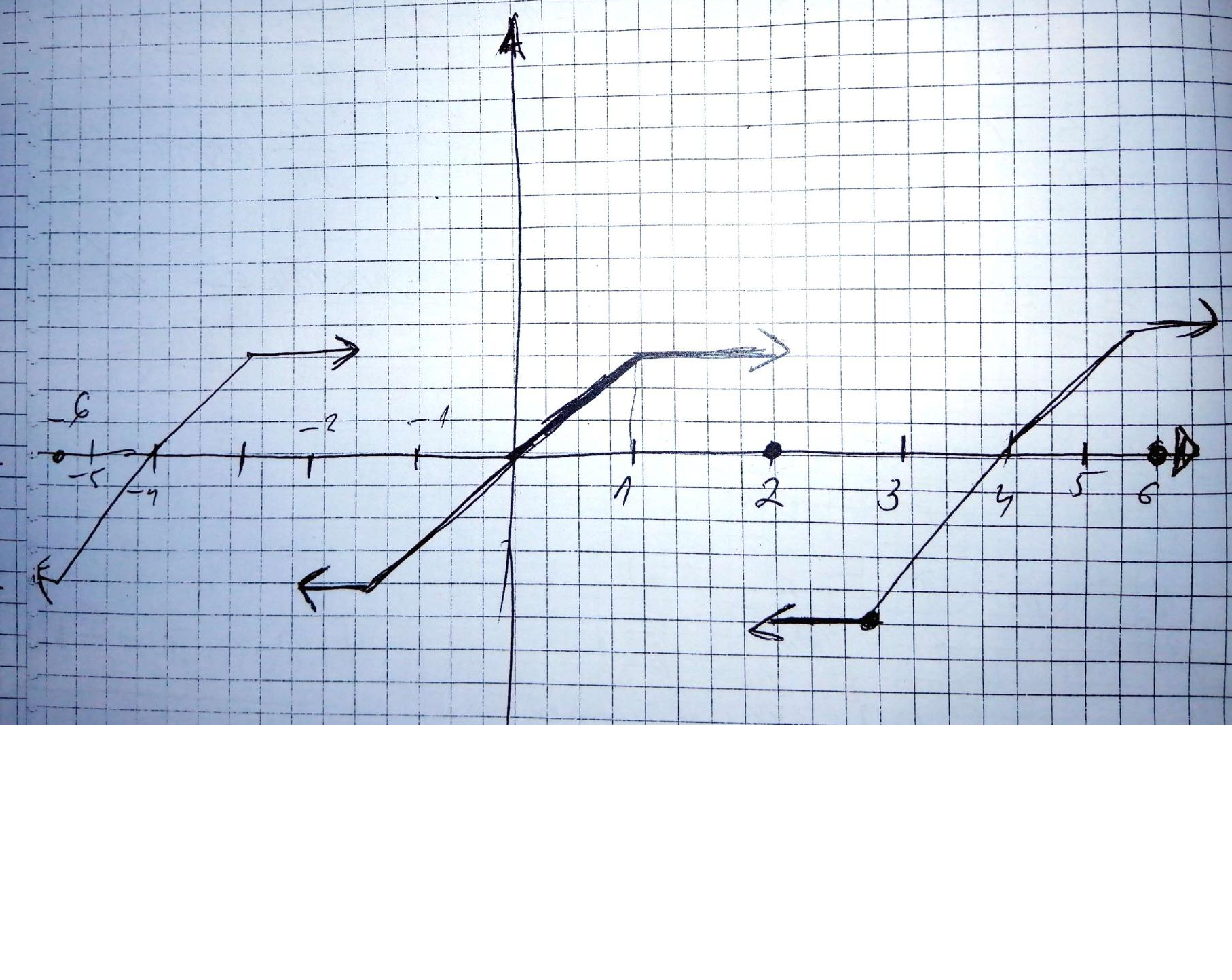
$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{k-1}, & n=2k-1,\ n-\text{непарно}\\ 0, & n-\text{парно}\end{cases}$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\cdot x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$$

$f(x)=S(x)$ — — — —, $x\in(-2,2)$

$f(x)=S(x)$ — — —, $x\in[0,2]$

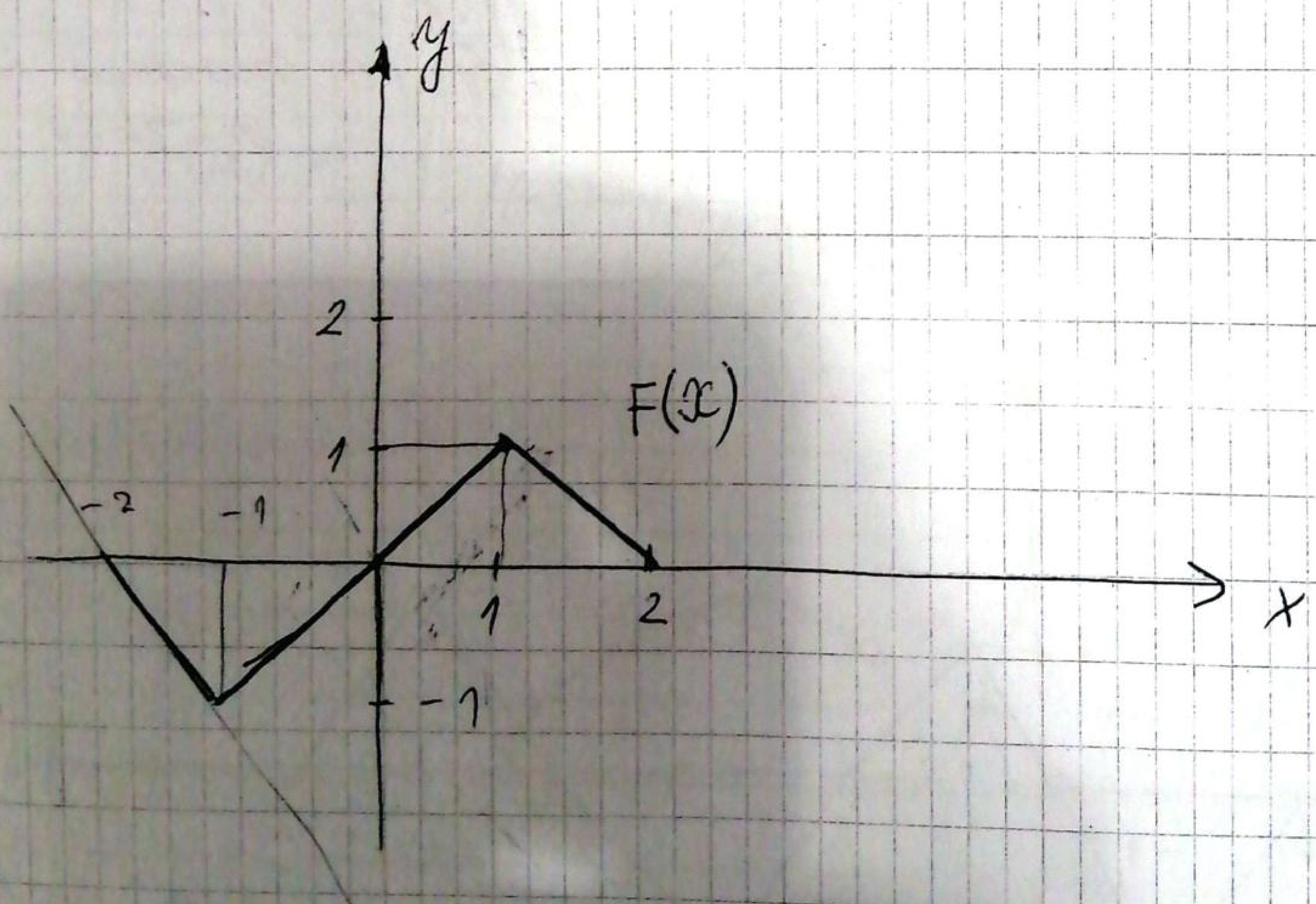

-6
-5
-4
-2
-1
1
2
3
4
5
6

1. Функцију $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \end{cases}$ развити по sin у Фуријеов ред

Р: Функцију f непарно проширимо на $[-2,2]$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,2] \\ -f(-x), & x \in [-2,0) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \\ x, & -1 \le x < 0 \\ -x-2, & -2 \le x < -1 \end{cases}$$



Функцију $F(x)$ развијамо у Фуријеов ред на $[-2,2]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{n\pi}{2}x + b_n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x\right)$$

Како је F непарна то је $a_n = 0$, $\forall n \in N$

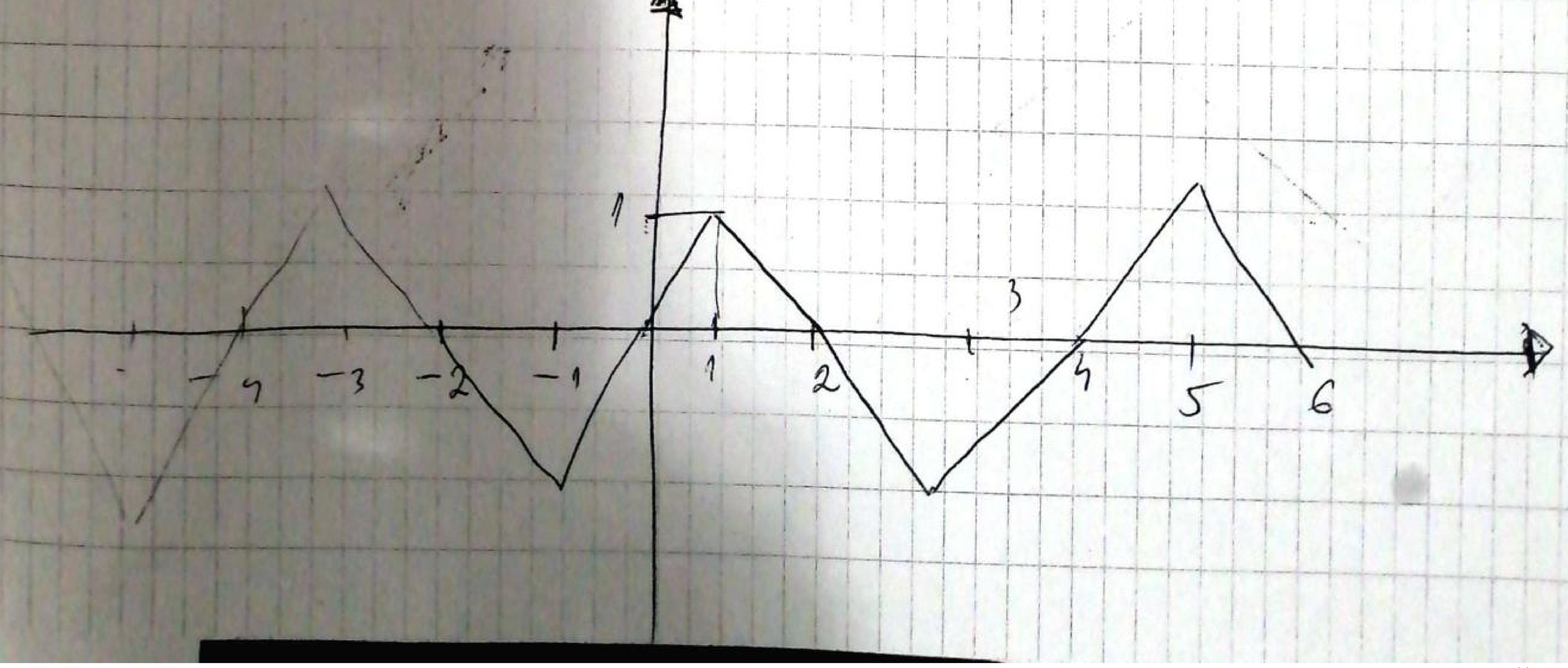
$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{\underbrace{F(x)}_{\text{неп}} \underbrace{\sin\frac{n\pi}{2}x}_{\text{неп}}}_{\text{parna}} \cdot dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{2} F(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{2}x \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 F(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 F(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{2}x \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 x\cdot \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 (2-x)\cdot \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= \ldots = \frac{8}{n^2\pi^2}\cdot \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \quad \left(\sin\frac{2k\pi}{2} = \sin k\pi = 0\right) \\ \frac{(-1)^k \cdot 8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n \text{ непарно},\ n = 2k-1 \end{cases}$$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 8}{(2k-1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x$$



$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8}{(2n-1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x, \quad x \in [-2, 2]$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8}{(2n-1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x, \quad x \in [0, 2]$$

2) Функцију $f(x) = |x^2 - 1|$ развити у ред по косинусима на интервалу $(-\pi, 0)$.

Р// Функцију $f(x)$ парно проширимо на интервал $(-\pi, \pi)$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi \le x \le 0 \\ f(-x), & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & -\pi \le x \le 0 \\ |(-x)^2 - 1|, & 0 < x \le \pi \end{cases} = |x^2 - 1|, \ x \in [-\pi, \pi]$$