MATEMATIKA U U RAČUNARSTVU - NAPREDNI KURS – VII računske vježbe

Zadatak 1.

Data je generatorska funkcija:

$$X(z) = \frac{2z}{1+3z} - \frac{3}{2-z} + \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Odrediti niz $x(n)$.

Rješenje:

Sada idemo obratno, znamo generatorsku funkciju i tražimo niz čija je to generatorska funkcija. Opet koristimo dvije šablonske funkcije i osobine generatorskih funkcija. $X(z)$ se može pisati kao:

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) + X_3(z)$$

pa će, koristeći osobinu 1, biti

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) + x_3(n) \tag{1}$$

gdje je

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{2z}{1+3z} \\ X_2(z) &= \frac{3}{2-z} \\ X_3(z) &= \frac{1}{(1-2z)^2} \end{aligned}$$

Polazimo od

$$X_1(z) = \frac{2z}{1+3z}$$

znamo da je

$$\frac{1}{1-z} \to 1$$

Pokušavamo koristeći osobine date na početku transformisati niz $u(n) = 1$ u niz čija je generatorska funkcija zadata kao $X_1(z)$ tako što je uporedjujemo sa $\frac{1}{1-z}$.

Da bi dobili u imeniocu $+3z$ umjesto $-z$, iskoristićemo osobinu 4, gdje je $c = -3$, pa važi:

$$\frac{1}{1-(-3z)} \to 1 \cdot (-3)^n.$$

Sada želimo dobiti $\frac{z}{1-(-z)}$. Znamo da množenje sa z odgovara, na osnovu osobine 2, pomjeranju u desno i popunjavanju sa nulama. U našem slučaju je izvršeno pomjeranje samo za jedno mjesto, $z^N = z \Rightarrow N = 1$, pa će biti:

$$z\frac{1}{1-(-3z)} \to \begin{cases} 1 \cdot (-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1, \\ 0 \text{ za } n < 1. \end{cases}$$

Dalje, množenje konstantom generatorske funkcije odgovara množenju konstantom i samog niza:

$$2z\frac{1}{1-(-3z)} \to \begin{cases} 2\cdot(-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1, \\ 0 \text{ za } n < 1. \end{cases}$$

Dakle:

$$x_1(n) = \begin{cases} 2\cdot(-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1 \\ 0 \text{ za } n < 1. \end{cases}$$

Sada odredjujemo niz čija je generatorska funkcija oblika:

$$X_2(z) = \frac{3}{2-z}.$$

Opet je poredimo sa:

$$\frac{1}{1-z} \to 1.$$

Potrebno nam je da eliminišemo dvojku iz imenioca u $X_2(z)$ pa pišemo:

$$X_2(z) = \frac{3}{2(1-\frac{z}{2})}$$

Znamo da je

$$\frac{1}{1-z} \to 1$$

Primijenimo osobinu 4 da bi dobili $\frac{z}{2}$, pri čemu stavljamo da je $c = \frac{1}{2}$, i biće:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z} \to \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1$$

Ostaje nam još samo množenje konstantom $\frac{3}{2}$ da bi dobili niz čija je generatorska funkcija $X_2(z)$ i dobijamo:

$$\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \to \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 = \frac{3}{2}2^{-n}$$

Zaključujemo da je:

$$x_2(n) = \frac{3}{2}2^{-n}.$$

Ostaje još:

$$X_3(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Možemo koristiti osobinu 5, ali je lakše pisati:

$$\frac{1}{(1-2z)^2} = \frac{1}{1-2z}\frac{1}{1-2z}$$

Gledamo kako bismo dobili

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z}$$

Ovo je proizvod dvije generatorske funkcije, a na osnovu osobine 6 znamo da proizvodu generatorskih funkcija odgovara konvolucija odgovarajućih nizova:

$$x_{3''}(n) = \sum_{n=0}^{n} x_{3'}(n)h(n-k).$$

U našem slučaju je:

$$X_{3''}(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z},$$

dakle:

$$\begin{aligned} X_{3'}(z) &= \frac{1}{1-z} \\ H(z) &= \frac{1}{1-z} \\ X_{3''}(z) &= X_{3'}(z) \cdot H(z). \end{aligned} \tag{2}$$

Znamo da je:

$$\frac{1}{1-z} \to 1$$

pa je:

$$\begin{aligned} x_{3'}(n) &= 1 \\ h(n) &= 1 \end{aligned}$$

Takodje će biti i

$$h(n-k) = 1$$

Zamjenjujući ovo u:

$$x_{3''}(n) = \sum_{k=0}^{n} x_{3'}(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1$$

Ovo je niz koji odgovara generatorskoj funkciji

$$X_{3''}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

dakle:

$$\frac{1}{(1-z)^2} \to n+1$$

Nama treba:

$$X_3(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Iskoristimo osobinu 4, stavimo $c = 2$ i dobijamo:

$$\frac{1}{(1-2z)^2} \to 2^n\,(n+1)\,,$$

odnosno:

$$x_3(n) = 2^n\,(n+1)\,.$$

Vratimo se na početak zadatka kada smo zapisali da je:

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) + x_3(n).$$

Odredili smo:

$$x_1(n) = \begin{cases} 2\cdot(-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1 \\ 0 \text{ za } n < 1 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \frac{3}{2}2^{-n}$$

$$x_3(n) = n+1$$

Dakle:

$$x(n) = 2\cdot(-3)^{n-1} - \frac{3}{2}2^{-n} + 2^n\,(n+1) \text{ za } n \geq 1.$$

Za $x(0)$ uzimamo vrijednost za $x_1(n)$ koje važi za $n = 0$, a za ostale nizove samo umjesto n stavljamo 0, pa će biti:

$$x(0) = 0 - \frac{3}{2}2^{-0} + 2^0\,(0+1\ ) = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

Zadatak za vježbu:

Data je generatorska funkcija $X(z) = (z+1)(z-2)^2$. *Odrediti niz* $x(n)$.