1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - I računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da je $4^n - 1$ *djeljivo sa* 3 *za svako* $n \geq 1$

Rješenje:

1. Za $n = 1$ biće:

$$4^1 - 1 = 3$$

što je sigurno djeljivo sa 3.

2. Uzmimo neko $n \geq 1$ i pretpostavimo da za njega važi da je $4^n - 1$ djeljivo sa 3.

Treba dokazati da će za $n + 1$, $4^{n+1} - 1$ biti djeljivo sa 3. $4^{n+1} - 1$ se dalje može pisati kao:

$$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 - 3 + 3 = 4 \cdot 4^n - 4 + 3 = 4 \cdot (4^n - 1) + 3$$

Izraz u zagradi je sigurno djeljiv sa tri, jer je to pretpostavka od koje smo krenuli, dakle, možemo ga pisati kao $3m$ gdje je m cio broj. Sada možemo pisati:

$$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 3m + 3 = 3\,(4m + 1)$$

ako je m cio broj i $m + 1$ će biti cio broj, dakle $4^{n+1} - 1$ će biti djeljivo sa 3. Slijedi da je tačna tvrdnja da je $4^n - 1$ djeljivo sa 3 za $n \geq 1$.

1.2 Zadatak 2.

Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da važi

$$2^n > n^2$$

za $n \geq 5$.

Rješenje:

1. $n = 5$

$$\begin{aligned} 2^5 &> 5^2 \\ 32 &> 25 \end{aligned}$$

što je sigurno tačno.

2. Pretpostavimo da za neko n, pri čemu je $n \geq 5$, važi polazna nejednakost, dakle:

$$2^n > n^2. \tag{1}$$

Treba pokazati da uz ovu pretpostavku polazna nejednakost važi i za $n + 1$, odnosno da važi:

$$2^{n+1} > (n + 1)^2$$

Pokušajmo uspostaviti vezu između $(n+1)^2$ i n^2:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \tag{2}$$

Znajući da je $n \geq 5$, zaključujemo da je:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{25}$$

Ako sumi u (2) dodamo umjesto $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{5}$, a znajući da je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$, odnosno da dodajemo veću vrijednost zaključujemo da će cijela novodobijena suma sada biti veća, isto važi i kada $\frac{1}{n^2}$ zamijenimo sa $\frac{1}{25}$, odnosno biće:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} < 2.$$

Radimo sa cijelim brojevima, zato smo tražili koji je prvi cijeli broj od kojeg će izraz biti manji. Sada imamo da je:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2}{n^2} &< 2 \\ (n+1)^2 &< 2n^2 \end{aligned}$$

Da bi i u izrazu (1) dobili $2n^2$ pomnožimo ga sa 2 i dobijamo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^n &> 2n^2 \\ 2^{n+1} &> 2n^2 \end{aligned}$$

Sada imamo da važi:

$$\begin{aligned} 2n^2 &< 2^{n+1} \\ (n+1)^2 &< n^2 \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &< 2n^2 < 2^{n+1} \\ (n+1)^2 &< 2^{n+1} \end{aligned}$$

Što je i trebalo dokazati.
Dakle, tvrdnja da je $2^n > n^2$ za svako $n \geq 5$ je tačna.