# 1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - II računske vježbe

## 1.1 Zadatak 1.

*Koristeći se matematičkom indukcijom, dokazati da je* $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ *djeljivo sa* 24 *za svako* $n \geq 1$.

Rješenje:

1. Za $n = 1$ biće:

$$2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^1 - 5 = 24$$

što je sigurno djeljivo sa 24.

2. Uzmimo neko $n \geq 1$ i pretpostavimo da za njega važi da je $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ djeljivo sa 24. Dakle, može se pisati $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24m$ i $m \in Z$ (m je cijeli broj).

Treba dokazati da će, uz uvedenu pretpostavku, element dobijen za $n + 1$, dakle $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ biti djeljivo sa 24. $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ pokušavamo povezati sa elementom za koji smo pretpostavili da je djeljiv sa 24 ($2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24m$). Pokušajmo ih zapisati tako da su im eksponenti uz 5 i 7 jednaki:

$$\begin{gathered} 2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 2 \cdot 7 \cdot 7^n + 3 \cdot 5 \cdot 5^n - 5 \\ = 7 \cdot 2 \cdot 7^n + 5 \cdot 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3 \cdot 5^n - 2 \cdot 3 \cdot 5^n - 5 - 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \\ = 7 \cdot 2 \cdot 7^n + 7 \cdot 3 \cdot 5^n - 7 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 5^n + 30 \\ = 7(2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5) - 2 \cdot 3 \cdot 5^n + 30 \end{gathered}$$

Izraz u zagradi je sigurno djeljiv sa 24, jer je to pretpostavka od koje smo krenuli, dakle, možemo ga pisati kao $24m$, gdje je $m$ cio broj. Sada možemo pisati:

$$2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 7 \cdot 24m - 2 \cdot 3 \cdot 5^n + 30.$$

Da bi prethodni zbir bio djeljiv sa 24 i $2 \cdot 3 \cdot 5^n - 30$ mora biti djeljivo sa 24 za $n > 1$. To nije očigledno na osnovu njegovog oblika, pa dokazujemo indukcijom:

1. Za $n = 2$ biće:

$$6 \cdot 5^2 - 30 = 150 - 30 = 120 = 5 \cdot 24$$

što je sigurno djeljivo sa 24.

2. Uzmimo neko $n > 2$ i pretpostavimo da za njega važi da je $6 \cdot 5^n - 30$ djeljivo sa 24 i može se pisati kao $6 \cdot 5^n - 30 = 24 \cdot m$ gdje $m \in Z$.

Treba dokazati da će za $n + 1$, $6 \cdot 5^{n+1} - 30$ biti djeljivo sa 24. $6 \cdot 5^{n+1} - 30$ se dalje može pisati kao:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 5 \cdot 5^n - 30 &= 5 \cdot 6 \cdot 5^n - 30 - 4 \cdot 30 + 4 \cdot 30 \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 5^n - 5 \cdot 30 + 4 \cdot 30 \\ &= 5(6 \cdot 5^n - 30) + 120 \\ &= 5 \cdot 24 \cdot m + 24 \cdot 5 \end{aligned}$$

Oba sabirka se mogu zapisati kao proizvod cijelog broja i broja 24, slijedi da je zbir djeljiv sa 24, što smo i trebali dokazati.

## 1.2 Zadatak 2.

*Riješiti diferencnu jednačinu* $S(n) - 7S(n-1) + 10S(n-2) = 6 + 8 \cdot n$, *uz početne uslove:* $S(0) = 1$ *i* $S(1) = 2$.

Rješenje: U pitanju je nehomogena jednačina, ona se može rješavati tako što pronađemo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$, i jedno partikularno rješenje nehomogene jednačine $S_P(n)$. Opšte rješenje nehomogene jednačine je jednako sumi opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$ i partikularnog rješenja nehomogene jednačine $S_P(n)$:

$$S(n) = S_H(n) + S_P(n)$$

Najprije rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$S(n) - 7S(n-1) + 10S(n-2) = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

a njena rješenja (karakteristične vrijednosti) su:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 2$. Dakle, opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine biće:

$$S_H(n) = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot 2^n$$

Partikularno rjesenje tražimo u obliku koji odgovara desnoj strani nehomogene jednačine:

$$S_P(n) = a \cdot n + b,$$

jer nijedna karakteristična vrijednost nije jednaka jedinici.

Uvrštavanjem $S_P(n)$ u polaznu jednačinu dobijaju se koeficijenti $a$ i $b$:

$$a \cdot n + b - 7(a(n-1) + b) + 10(a(n-2) + b)) = 6 + 8 \cdot n,$$

$$(4a)n + (4b - 13a) = 6 + 8n.$$

Da bi gornji izraz bio tačan za svako $n$ mora biti $4b - 13a = 6$ i $4a = 8$, odakle dobijamo $a = 2$ i $b = 8$. Dakle niz:

$$S_P(n) = 2n + 8$$

je rješenje polazne nehomogene jednačine.

Sada opšte rješenje polazne, nehomogene, jednačine dobijamo kao sumu $S(n) = S_H(n) + S_P(n)$, odnosno:

$$S(n) = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot 2^n + 8 + 2n$$

Iskoristićemo početne uslove da bismo odredili konstante $A_1$ i $A_2$:
$S(0) = 1$ povlači $A_1 + A_2 + 8 = 1$
$S(1) = 2$ povlači $5A_1 + 2A_2 + 8 + 2 = 2$
Rješavanjem ovog sistema jednačina dobija se: $A_1 = 2$ i $A_2 = -9$, pa je traženo rješenje rekurzivne relacije niz:

$$S(n) = 2 \cdot 5n - 9 \cdot 2n + 8 + 2n.$$

## 1.3 Zadatak 3.

*Riješiti diferencnu jednačinu* $S(n) - 6S(n-1) + 5S(n-2) = -8n + 14$, *uz početne uslove:* $S(0) = 0$ *i* $S(1) = 2$.

Rješenje: U pitanju je nehomogena jednačina, ona se može rješavati tako što pronađemo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$, i jedno partikularno rješenje nehomogene jednačine $S_P(n)$. Opšte rješenje nehomogene jednačine je jednako sumi opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$ i partikularnog rješenja nehomogene jednačine $S_P(n)$:

$$S(n) = S_H(n) + S_P(n)$$

Najprije rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$S(n) - 6S(n-1) + 5S(n-2) = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

dok su rješenja karakteristične jednačine:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

odnosno $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 5$, tako da će opšte rješenje homogene jednačine biti:

$$S_H(n) = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 5^n = A_1 + A_2 \cdot 5^n$$

U slučaju kada je desna strana rekurzivne jednačine oblika $a_0 \cdot n + b$, partikularno rješenje tražimo u obliku $S_P(n) = a \cdot n + b$ kada $\lambda = 1$ nije rješenje karakteristične jednačine. Budući da u našem slučaju $\lambda_1 = 1$ **jeste** jedno rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražićemo u obliku:

$$S_P(n) = n(a \cdot n + b),$$

Da bi odredili konstante $a$ i $b$, uvrstimo $S_P(n)$ u polaznu jednačinu:

$$n(a \cdot n + b) - 6(n-1)(a(n-1) + b) + 5(n-2)(a(n-2) + b) = -8n + 14$$
$$n^2(a - 6a + 5a) + n(-8a - b) - 6a + 6b + 20a - 10b = -8n + 14$$
$$n(-8a - b) + 14a - 4b = -8n + 14b$$

Da bi prethodni izraz bio tačan za svako $n$, treba da važe sljedeće jednakosti: $-8a - b = -8$ i $14a - 4b = 14$, odakle dobijamo da je $a = 1$ i $b = 0$. Dakle, jedno rješenje (partikularno) polazne nehomogene jednačine je:

$$S_P(n) = n(1 \cdot n + 0) = n \cdot n = n^2$$

Sada opšte rješenje polazne, nehomogene, jednačine dobijamo kao sumu $S(n) = S_H(n) + S_P(n)$, odnosno:

$$S(n) = A_1 + A_2 \cdot 5^n + n^2$$

Iskoristićemo početne uslove da bismo odredili konstante $A_1$ i $A_2$:
$S(0) = 1$ povlači $A_1 + A_2 \cdot 5^0 + 0^2 = A_1 + A_2 = 0$
$S(1) = 2$ povlači $A_1 + A_2 \cdot 5^1 + 1^2 = A_1 + 5A_2 + 1 = 2$
Rješavanjem ovog sistema jednačina dobija se: $A_1 = -\frac{1}{4}$ i $A_2 = \frac{1}{4}$, pa je traženo rješenje rekurzivne relacije niz:

$$S(n) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 5^n + n^2.$$